جلد اول: درس‌نامه + آزمون‌های تشریحی و جامع

جامع ریاضی ۱ و حسابان

+ موج آزمون ویراست دوم

رشتهٔ ریاضی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی



نشر الگو

سرشناسه : اجلالی، کاظم، ۱۳۵۶-

عنوان و نام پدیدآور : جامع ریاضی ۱ و حسابان + موج آزمون رشتهٔ ریاضی (جلد اول) ویراست دوم/ قابل استفاده برای دانش‌آموزان و داوطلبان آزمون سراسری دانشگاه‌ها / مؤلفان: کاظم اجلالی و ارشک حمیدی

مشخصات نشر : تهران: نشر الگو

مشخصات ظاهری : ۶۸۴ ص. ۲۲×۲۹ س.م.

شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۶۳۹۰-۳۴-۷

وضعیت فهرست‌نویسی : فیپای مختصر

شناسهٔ افزوده : ارشک حمیدی، ۱۳۵۲-

یادداشت : فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.

شمارهٔ کتابشناسی ملی : ۵۴۲۱۰۸

نشر الگو

جامع ریاضی ۱ و حسابان + موج آزمون رشتهٔ ریاضی (جلد اول) ویراست دوم

www.olgoobooks.ir

ناشر : الگو

مدیر مسئول : محمدحسین متولی

مؤلفان : کاظم اجلالی و ارشک حمیدی

حروف‌چینی و صفحه‌آرایی : الگو

مدیر واحد فنی و ویرایش : ستین مختار

ویراستاران علمی : فهیمه گودرزی، عاطفه ربیعی و آریس آقانیانس

مدیر چاپ : مهرداد وفادار

نوبت چاپ : دوازدهم - ۱۴۰۴

تیراژ : ۲۵۰۰ نسخه

قیمت : ۷۵۰۰۰۰ تومان

کلیهٔ حقوق این اثر متعلق به انتشارات الگو است و هرگونه نسخه‌برداری و برداشت به هر صورت و شیوه به موجب بند ۵ از مادهٔ ۲ قانون حمایت از ناشران قابل پیگرد است.

آدرس انتشارات: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، خیابان دانشگاه، خیابان روانمهر شرقی، پلاک ۴۸

تلفن: ۰۲۱-۹۱۲۰۰۲۰۲

پیشگفتار

به نام خدا

هدف‌مان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب حسابان ۲ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های ریاضی ۱ و حسابان ۱ را مرور کنید. این کتاب چهارده فصل دارد. در فصل‌های اول تا دوازدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل سیزدهم «آزمون‌های جامع» و فصل چهاردهم «پاسخنامهٔ کلیدی» است.

مباحث کتاب حسابان ۲ را در پنج فصل نخست گنجانده‌ایم. هر یک از این فصل‌ها، در صورت لزوم، با درس‌هایی از کتاب‌های ریاضی ۱ و حسابان ۱ که پیش‌زمینهٔ درس‌های متناظرشان از کتاب حسابان ۲ هستند، شروع می‌شود. هفت فصل بعدی مربوط به مباحث کتاب‌های ریاضی ۱ و حسابان ۱ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «دست‌گرمی» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. هر آزمون ده پرسش دارد. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همهٔ مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هرچه جلوتر بروید، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم، که شامل آزمون‌های تألیفی و برگزیدهٔ کنکورهای سراسری است. یک فایل PDF شامل آزمون‌های تألیفی دیگر را هم می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

برای هر مطلب که در درس‌نامه آمده است یک شماره (گام) اختصاص داده‌ایم که بتوانیم خواننده را به آن ارجاع دهیم. کل مطالب این کتاب را در ۳۵۹ گام تنظیم کرده‌ایم. در کنار هر آزمون، یک جدول راهنمای ارجاع قرار داده‌ایم که در آن مشخص کرده‌ایم برای حل هر سؤال چه مطالبی مورد نیاز است. شمارهٔ این مطالب را در کنار شمارهٔ سؤال در ستون گام آورده‌ایم. توصیه می‌کنیم اگر نتوانستید سؤالی را حل کنید قبل از اینکه به پاسخ‌نامهٔ تشریحی مراجعه کنید، گام‌های اشاره شده در درس‌نامه را پیدا کنید و مطالعه نمایید. پاسخ پرسش‌های دست‌گرمی و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخهٔ چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را از سایت انتشارات الگو دریافت کنید. یادآوری می‌کنیم که اگر این کتاب را دارید، لازم نیست که کتاب موج‌آزمون ریاضی رشتهٔ ریاضی (از انتشارات الگو) را تهیه کنید، زیرا این کتاب شامل آزمون‌های کتاب موج آزمون نیز است.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها فهیمه گودرزی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

فصل اول: تابع

درس اول: مفاهیم اولیه (گام‌های ۱ تا ۷) ۱
آزمون‌های ۱ و ۲ ۷
درس دوم: توابع معروف (گام‌های ۸ تا ۱۳) ۹
آزمون‌های ۳ و ۴ ۱۴
درس سوم: سهمی و تابع درجهٔ دوم (گام‌های ۱۴ تا ۲۱) ۱۶
آزمون‌های ۵ تا ۷ ۲۴
درس چهارم: دامنه و برد تابع و تساوی توابع (گام‌های ۲۲ تا ۲۴) ۲۷
آزمون‌های ۸ تا ۱۰ ۳۳
درس پنجم: مدل‌سازی با توابع (گام ۲۵) ۳۶
آزمون ۱۱ ۳۸
درس ششم: جبر توابع (گام ۲۶) ۳۹
آزمون‌های ۱۲ تا ۱۴ ۴۲
درس هفتم: ترکیب توابع (گام‌های ۲۷ تا ۲۹) ۴۵
آزمون‌های ۱۵ تا ۱۸ ۵۰
درس هشتم: تبدیل نمودار توابع (گام‌های ۳۰ تا ۳۹) ۵۴
آزمون‌های ۱۹ تا ۲۲ ۶۹
درس نهم: توابع یک‌به‌یک (گام‌های ۴۰ تا ۴۶) ۷۷
آزمون‌های ۲۳ و ۲۴ ۸۱
درس دهم: توابع یکنوا (گام‌های ۴۷ تا ۵۹) ۸۳
آزمون‌های ۲۵ تا ۲۷ ۹۱
درس یازدهم: تابع وارون (گام‌های ۶۰ تا ۶۹) ۹۴
آزمون‌های ۲۸ تا ۳۲ ۱۰۱
آزمون‌های ۳۳ تا ۳۵: آزمون‌های فصل اول ۱۰۶
آزمون‌های ۳۶ و ۳۷: آزمون‌های فصل اول (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۱۰۹

فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (گام‌های ۷۰ تا ۷۲) ۱۱۱
آزمون‌های ۳۸ و ۳۹ ۱۱۵
درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی (گام‌های ۷۳ تا ۸۱) ۱۱۷
آزمون‌های ۴۰ و ۴۱ ۱۲۴
درس سوم: اتحادهای مثلثاتی (گام‌های ۸۲ تا ۸۴) ۱۲۶
آزمون‌های ۴۲ تا ۴۵ ۱۳۱
درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (گام‌های ۸۵ تا ۹۱) ۱۳۵
آزمون‌های ۴۶ و ۴۷ ۱۴۱
درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (گام‌های ۹۲ تا ۹۴) ۱۴۳
آزمون‌های ۴۸ تا ۵۰ ۱۴۷
درس ششم: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (گام‌های ۹۵ و ۹۶) ۱۵۰
آزمون‌های ۵۱ تا ۵۴ ۱۵۴
درس هفتم: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (گام‌های ۹۷ تا ۱۰۳) ۱۵۸
آزمون‌های ۵۵ تا ۵۸ ۱۶۳
درس هشتم: تانژانت مجموع دو زاویه (گام‌های ۱۰۴ و ۱۰۵) ۱۶۷
آزمون‌های ۵۹ تا ۶۲ ۱۷۱
درس نهم: توابع مثلثاتی (گام‌های ۱۰۶ تا ۱۱۱) ۱۷۵
آزمون‌های ۶۳ تا ۶۵ ۱۸۴
درس دهم: معادلات مثلثاتی (گام‌های ۱۱۲ تا ۱۲۲) ۱۸۷
آزمون‌های ۶۶ تا ۷۱ ۱۹۹
آزمون‌های ۷۲ تا ۷۴: آزمون‌های فصل دوم ۲۰۵
آزمون‌های ۷۵ تا ۷۸: آزمون‌های فصل دوم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۲۰۸

فصل سوم: حد و پیوستگی

درس اول: مفهوم حد و قضایای حد (گام‌های ۱۲۳ تا ۱۳۱) ۲۱۲

آزمون‌های ۷۹ تا ۸۲ ..... ۲۲۰

درس دوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا و گنگ (گام‌های ۱۳۲ تا ۱۳۵) ۲۲۴

آزمون‌های ۸۳ و ۸۴ ..... ۲۲۹

درس سوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای حدهای مثلثاتی (گام‌های ۱۳۶ تا ۱۴۰) ۲۳۱

آزمون‌های ۸۵ تا ۸۷ ..... ۲۳۷

درس چهارم: پیوستگی (گام‌های ۱۴۱ تا ۱۴۸) ۲۴۰

آزمون‌های ۸۸ تا ۹۰ ..... ۲۴۵

درس پنجم: حد بی‌نهایت (گام‌های ۱۴۹ تا ۱۵۲) ۲۴۸

آزمون‌های ۹۱ تا ۹۴ ..... ۲۵۴

درس ششم: مجانب قائم (گام‌های ۱۵۳ تا ۱۵۸) ۲۵۸

آزمون‌های ۹۵ تا ۹۷ ..... ۲۶۳

درس هفتم: حد در بی‌نهایت (گام‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳) ۲۶۶

آزمون‌های ۹۸ تا ۱۰۰ ..... ۲۷۲

درس هشتم: مجانب افقی (گام‌های ۱۶۴ تا ۱۶۹) ۲۷۵

آزمون‌های ۱۰۱ و ۱۰۲ ..... ۲۷۹

آزمون‌های ۱۰۳ تا ۱۰۵: آزمون‌های فصل سوم ۲۸۱

آزمون‌های ۱۰۶ تا ۱۰۸: آزمون‌های فصل سوم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۲۸۴

فصل چهارم: مشتق

درس اول: مفهوم مشتق (گام‌های ۱۷۰ تا ۱۸۴) ۲۸۷

آزمون‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲ ..... ۲۹۶

درس دوم: قواعد مشتق‌گیری (گام‌های ۱۸۵ تا ۱۸۹) ۳۰۰

آزمون‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷ ..... ۳۰۶

درس سوم: مشتق تابع مرکب (گام‌های ۱۹۰ تا ۱۹۲) ۳۱۱

آزمون‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲ ..... ۳۱۵

درس چهارم: مشتق‌پذیری (گام‌های ۱۹۳ تا ۱۹۹) ۳۲۰

آزمون‌های ۱۲۳ تا ۱۲۵ ..... ۳۲۶

درس پنجم: خط مماس بر نمودار تابع (گام‌های ۲۰۰ تا ۲۰۳) ۳۲۹

آزمون‌های ۱۲۶ و ۱۲۷ ..... ۳۳۲

درس ششم: آهنگ تغییر (گام‌های ۲۰۴ و ۲۰۵) ۳۳۴

آزمون ۱۲۸ ..... ۳۳۶

درس هفتم: مشتق دوم (گام ۲۰۶) ۳۳۷

آزمون‌های ۱۲۹ و ۱۳۰ ..... ۳۳۹

درس هشتم: قاعدهٔ هوپیتال (گام ۲۰۷) ۳۴۱

آزمون‌های ۱۳۱ و ۱۳۲ ..... ۳۴۴

آزمون‌های ۱۳۳ تا ۱۳۴: آزمون‌های فصل چهارم ۳۴۶

آزمون‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹: آزمون‌های فصل چهارم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۳۴۸

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (گام‌های ۲۰۸ و ۲۰۹) ۳۵۳

آزمون‌های ۱۴۰ و ۱۴۱ ..... ۳۵۶

درس دوم: نقاط بحرانی (گام ۲۱۰) ۳۵۸

آزمون‌های ۱۴۲ و ۱۴۳ ..... ۳۶۰

درس سوم: اکسترمم‌های نسبی (گام‌های ۲۱۱ تا ۲۱۵) ۳۶۲

آزمون‌های ۱۴۴ تا ۱۴۷ ..... ۳۶۹

درس چهارم: اکسترمم‌های مطلق (گام‌های ۲۱۶ تا ۲۱۸) ۳۷۳

آزمون‌های ۱۴۸ و ۱۴۹ ..... ۳۷۷

درس پنجم: بهینه‌سازی (گام ۲۱۹) ۳۷۹

آزمون‌های ۱۵۰ تا ۱۵۲ ..... ۳۸۳

درس ششم: جهت تقعر (گام‌های ۲۲۰ تا ۲۲۳) ۳۸۶

آزمون‌های ۱۵۳ تا ۱۵۵ ..... ۳۹۰

درس هفتم: نقطهٔ عطف (گام‌های ۲۲۴ و ۲۲۵) ۳۹۳

آزمون‌های ۱۵۶ تا ۱۵۸ ..... ۳۹۷

درس هشتم: رسم نمودار (گام‌های ۲۲۶ تا ۲۳۲) ۴۰۰

آزمون‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳ ..... ۴۱۲

آزمون‌های ۱۶۴ تا ۱۶۶: آزمون‌های فصل پنجم ۴۱۸
آزمون‌های ۱۶۷ تا ۱۷۰: آزمون‌های فصل پنجم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۴۲۱

فصل ششم: بازه و مجموعه

درس اول: مجموعه‌های اعداد (گام‌های ۲۳۳ و ۲۳۴) ۴۲۵
آزمون‌های ۱۷۱ و ۱۷۲ ۴۲۸
درس دوم: مجموعه‌ها (گام‌های ۲۳۵ تا ۲۴۳) ۴۳۰
آزمون‌های ۱۷۳ و ۱۷۴ ۴۳۴
آزمون ۱۷۵: آزمون فصل ششم ۴۳۶

فصل هفتم: الگو و دنباله

درس اول: الگو و دنباله (گام‌های ۲۴۴ تا ۲۴۶) ۴۳۷
آزمون‌های ۱۷۶ و ۱۷۷ ۴۴۱
درس دوم: دنبالهٔ حسابی (گام‌های ۲۴۷ تا ۲۵۵) ۴۴۳
آزمون‌های ۱۷۸ و ۱۷۹ ۴۴۶
درس سوم: دنبالهٔ هندسی (گام‌های ۲۵۶ تا ۲۶۳) ۴۴۸
آزمون‌های ۱۸۰ و ۱۸۱ ۴۵۲
درس چهارم: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (گام‌های ۲۶۴ تا ۲۶۸) ۴۵۴
آزمون‌های ۱۸۲ تا ۱۸۵ ۴۵۹
آزمون ۱۸۶: آزمون فصل هفتم ۴۶۳
آزمون‌های ۱۸۷ و ۱۸۸: آزمون‌های فصل هفتم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۴۶۴

فصل هشتم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

درس اول: توان و ریشه (گام‌های ۲۶۹ تا ۲۷۴) ۴۶۶
آزمون‌های ۱۸۹ و ۱۹۰ ۴۶۹
درس دوم: اتحاد (گام‌های ۲۷۵ تا ۲۸۲) ۴۷۱
آزمون‌های ۱۹۱ تا ۱۹۴ ۴۷۶
درس سوم: تجزیه (گام‌های ۲۸۳ و ۲۸۴) ۴۸۰
آزمون‌های ۱۹۵ و ۱۹۶ ۴۸۳
درس چهارم: گویا کردن مخرج‌های گنگ (گام ۲۸۵) ۴۸۵
آزمون ۱۹۷ ۴۸۷
درس پنجم: بخش‌پذیری و تقسیم (گام‌های ۲۸۶ تا ۲۸۸) ۴۸۸
آزمون‌های ۱۹۸ و ۱۹۹ ۴۹۰
آزمون‌های ۲۰۰ و ۲۰۱: آزمون‌های فصل هشتم ۴۹۲

فصل نهم: معادله، تعیین علامت و نامعادله

درس اول: حل معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۲۸۹ تا ۲۹۵) ۴۹۴
آزمون‌های ۲۰۲ و ۲۰۳ ۴۹۸
درس دوم: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۲۹۶ تا ۲۹۹) ۵۰۰
آزمون‌های ۲۰۴ و ۲۰۵ ۵۰۴
درس سوم: رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۳۰۰ و ۳۰۱) ۵۰۶
آزمون ۲۰۶ ۵۰۸
درس چهارم: معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم خاص (گام‌های ۳۰۲ تا ۳۰۵) ۵۰۹
آزمون ۲۰۷ ۵۱۳
درس پنجم: معادله‌های گویا (گام‌های ۳۰۶ تا ۳۱۰) ۵۱۴
آزمون‌های ۲۰۸ و ۲۰۹ ۵۱۸
درس ششم: تعیین علامت و نامعادله (گام‌های ۳۱۱ تا ۳۱۸) ۵۲۰
آزمون‌های ۲۱۰ و ۲۱۱ ۵۲۷
درس هفتم: معادله‌های گنگ (گام‌های ۳۱۹ تا ۳۲۲) ۵۲۹
آزمون‌های ۲۱۲ و ۲۱۳ ۵۳۲
درس هشتم: حل هندسی معادلات (گام ۳۲۳) ۵۳۴
آزمون‌های ۲۱۴ و ۲۱۵ ۵۳۷
آزمون ۲۱۶: آزمون فصل نهم ۵۳۹
آزمون‌های ۲۱۷ و ۲۱۸: آزمون‌های فصل نهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۵۴۰

فصل دهم: قدرمطلق و جزء صحیح

درس اول: قدرمطلق و ویژگی‌های آن (گام‌های ۳۲۴ و ۳۲۵) ۵۴۲
آزمون ۲۱۹ ۵۴۵

درس دوم: معادلات و نامعادلات قدرمطلقی (گام‌های ۳۲۶ تا ۳۲۹) ۵۴۶
آزمون‌های ۲۲۰ تا ۲۲۲ ۵۵۳
درس سوم: توابع شامل قدرمطلق (گام‌های ۳۳۰ تا ۳۳۲) ۵۵۶
آزمون‌های ۲۲۳ و ۲۲۴ ۵۵۹
درس چهارم: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (گام‌های ۳۳۳ تا ۳۳۴) ۵۶۱
آزمون‌های ۲۲۵ و ۲۲۶ ۵۶۴
درس پنجم: تابع جزء صحیح (گام‌های ۳۳۵ تا ۳۳۷) ۵۶۶
آزمون‌های ۲۲۷ و ۲۲۸ ۵۶۹
آزمون ۲۲۹: آزمون فصل دهم ۵۷۱
آزمون ۲۳۰: آزمون فصل دهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۵۷۲

فصل یازدهم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی (گام‌های ۳۳۸ تا ۳۴۰) ۵۷۳
آزمون‌های ۲۳۱ و ۲۳۲ ۵۷۷
درس دوم: معادلات و نامعادلات نمایی (گام‌های ۳۴۱ و ۳۴۲) ۵۷۹
آزمون‌های ۲۳۳ و ۲۳۴ ۵۸۲
درس سوم: لگاریتم (گام‌های ۳۴۳ تا ۳۴۵) ۵۸۴
آزمون‌های ۲۳۵ تا ۲۳۷ ۵۸۷

درس چهارم: توابع لگاریتمی (گام‌های ۳۴۶ تا ۳۴۹) ۹۰
آزمون‌های ۲۳۸ و ۲۳۹ ۹۵
درس پنجم: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (گام‌های ۳۵۰ و ۳۵۱) ۹۷
آزمون‌های ۲۴۰ تا ۲۴۲ ۰۱
آزمون ۲۴۳: آزمون فصل یازدهم ۰۴
آزمون‌های ۲۴۴ و ۲۴۵: آزمون‌های فصل یازدهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۰۵

فصل دوازدهم: هندسهٔ تحلیلی

درس اول: خط راست (گام‌های ۳۵۲ تا ۳۵۹) ۰۷
آزمون‌های ۲۴۶ تا ۲۴۸ ۱۴

فصل سیزدهم: آزمون‌های جامع

آزمون‌های ۲۴۹ تا ۲۷۷ ۱۷

فصل چهاردهم: پاسخنامهٔ کلیدی

دست‌گرمی ۷۵
آزمون‌ها ۷۶

Library of Congress

درس اول: مفاهیم اولیه

۱ زوج مرتب

دو عدد ۲ و ۳ را به دو طریق می‌توان کنار هم نوشت و یک **زوج** درست کرد: یکی $(۲,۳)$ و دیگری $(۳,۲)$. توجه کنید که در این زوج‌ها ترتیب نوشتن عددها مهم است، بنابراین هر یک از آن‌ها را یک **زوج مرتب** می‌نامیم. در هر زوج مرتب، عضو اول را **مؤلفهٔ اول** و عضو دوم را **مؤلفهٔ دوم** می‌نامند. مثلاً در زوج مرتب $(۲,۳)$، مؤلفهٔ اول ۲ و مؤلفهٔ دوم ۳ است.

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) وقتی برابرند که $a=c$ و $b=d$. بنابراین، مثلاً زوج مرتب $(۱,۲)$ با زوج مرتب $(۱,۳)$ برابر نیست، زیرا $۲\neq۳$. همین‌طور زوج مرتب $(۱,۲)$ با زوج مرتب $(۲,۱)$ برابر نیست، زیرا $۱\neq۲$.

تست ۱ اگر $(a^۲-a,a)=(۰,b^۲)$، آن‌گاه b چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

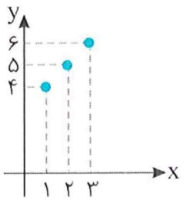
راه‌حل با توجه به تساوی دو زوج مرتب می‌توان نوشت $\begin{cases} a^۲-a=۰ \\ a=b^۲ \end{cases}$. پس $\begin{cases} a=۰, b=۰ \\ a=۱, b=\pm۱ \end{cases}$. بنابراین b می‌تواند سه مقدار مختلف داشته باشد.

۲ تابع

تعریف

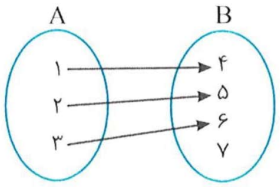
هر تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. A را دامنهٔ این تابع و B را هم‌دامنهٔ این تابع می‌نامند. مجموعهٔ عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده‌اند برد این تابع می‌نامند. بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنهٔ تابع است. دامنهٔ تابع f را با D_f و برد این تابع را با R_f نشان می‌دهیم.

مثال: تابع f از مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ به مجموعهٔ $B=\{۴,۵,۶,۷\}$ را در نظر بگیرید که ۴ را به ۱، ۵ را به ۲ و ۶ را به ۳ نسبت می‌دهد. می‌توانیم این تابع را به شکل‌های زیر نشان دهیم:



نمودار مختصاتی

$f=\{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۶)\}$
نمایش زوج مرتبی



نمودار پیکانی

در این تابع $D_f=\{۱,۲,۳\}$، $R_f=\{۴,۵,۶\}$ و هم‌دامنه مجموعهٔ $\{۴,۵,۶,۷\}$ است.

نکته

اگر تابع f به عضو a از مجموعهٔ A، عضو b از مجموعهٔ B را نسبت داده باشد،

- در نمودار پیکانی تابع f یک پیکان از a به b رسم می‌کنیم.
- در نمایش زوج مرتبی تابع f زوج مرتب (a,b) را قرار می‌دهیم.
- در نمودار مختصاتی تابع f نقطهٔ (a,b) را مشخص می‌کنیم.

تذکر برای مشخص بودن تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که رابطهٔ بین عضوهای دامنه و عضوهای هم‌دامنه را مشخص می‌کند معلوم باشد. برای نشان دادن اینکه تابع f تابعی با دامنهٔ A و هم‌دامنهٔ B است، می‌نویسیم $f:A\to B$ (بخوانید f از A به B است). اگر هم‌دامنهٔ تابعی مشخص نشده باشد، می‌توانیم هم‌دامنه را مجموعهٔ $\mathbb{R}$ یا برد تابع یا هر مجموعه‌ای که شامل برد تابع باشد در نظر بگیریم.

تست ۲

اگر عدد ۳ در دامنهٔ تابع $f=\{(۴,m-۱),(m+۱,۲m),(۵,۳m)\}$ باشد، کدام عدد در برد تابع قرار ندارد؟

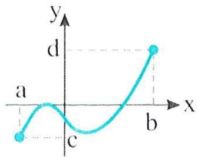
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل

دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\{۴,۵,m+۱\}$ است. چون عدد ۳ در دامنهٔ تابع است، پس $m+۱=۳$ و در نتیجه $m=۲$. بنابراین برد تابع مجموعهٔ $\{۱,۴,۶\}$ است و عدد ۲ در آن قرار ندارد.

تست ۳

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۳,۸]$ و برد تابع بازهٔ $[-۴,۵]$ باشد، حاصل $b+c$ کدام است؟



۱) ۷− ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۳

راه‌حل

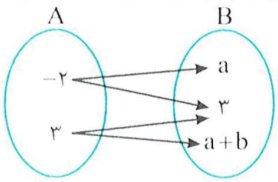
از روی شکل معلوم است که دامنهٔ تابع f بازهٔ $[a,b]$ است، پس $b=۸$. همچنین، برد تابع f بازهٔ $[c,d]$ است، پس $c=-۴$. بنابراین $b+c=۴$.

نکته ۳

- در نمودار پیکانی هر تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان به سمت عضوی از مجموعهٔ B خارج می‌شود.
- در نمایش زوج مرتبی تابع، هیچ دو زوج مرتب متمایزی وجود ندارد که مؤلفهٔ اولشان برابر باشد و مؤلفه‌های دومشان برابر نباشد.
- یک رابطه وقتی تابع است که در نمودار مختصاتی آن، هر خطی موازی محور y، نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تست ۴

در نمودار مقابل که مربوط به یک تابع است، مقدار b کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل

چون از ۲− دو پیکان خارج شده است، باید این پیکان‌ها به یک عدد رفته باشند. بنابراین $a=۳$. همچنین از عدد ۳ دو پیکان خارج شده است. پس $a+b=۳$ که چون $a=۳$، نتیجه می‌شود $b=۰$.

تست ۵

اگر رابطهٔ $f=\{(۲,m+۱),(۳,۴),(۲,۳),(۳,۳m+n)\}$ تابع باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

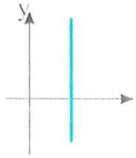
۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۲−

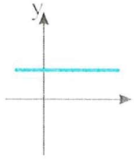
راه‌حل

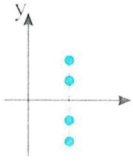
دو زوج مرتب $(۲,۳)$ و $(۲,m+۱)$ دارای مؤلفهٔ اول یکسان هستند. پس نمی‌توانند متمایز باشند. یعنی $m+۱=۳$ و در نتیجه $m=۲$. همچنین دو زوج مرتب $(۳,۴)$ و $(۳,۳m+n)$ دارای مؤلفهٔ اول یکسان هستند. پس باید مؤلفهٔ دوم یکسان داشته باشند. یعنی $۳m+n=۴$ که چون $m=۲$، نتیجه می‌شود $n=-۲$. بنابراین $m+n=۰$.

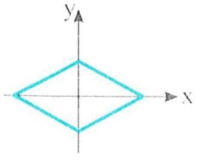
تست ۶

در کدام گزینه، نمودار یک تابع رسم شده است؟

۱) 

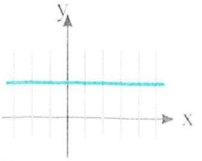
۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل

باید هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. پس نمودار گزینهٔ (۲) نمودار یک تابع است.



تعریف

اگر تابع f به عضو a از مجموعهٔ A عضو b از مجموعهٔ B را نسبت داده باشد، می‌نویسیم $f(a)=b$ و b را **مقدار تابع** f به‌ازای a می‌نامیم.

تست ۷ دربارهٔ تابع $f=\{(1,m-1),(2,m+n),(3,2n),(4,m)\}$ می‌دانیم $f(1)=3$ و $f(2)=5$. حاصل $f(3)+f(4)$ کدام است؟

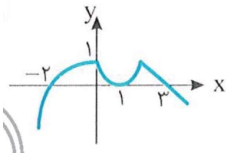
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل با توجه به فرض $f(1)=3$، می‌توان نوشت $m-1=3\Rightarrow m=4$

همچنین $f(2)=5$، پس $m+n=5\xrightarrow{m=4}4+n=5\Rightarrow n=1$

اکنون مقدارهای m و n را در نمایش زوج مرتبی تابع f جای‌گذاری می‌کنیم، در نتیجه $f=\{(1,3),(2,5),(3,2),(4,4)\}$. بنابراین $f(4)=4$ و $f(3)=2$. در نتیجه $f(3)+f(4)=6$.

تست ۸ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر تساوی $f(2a-1)+f(0)=1$ درست باشد، حاصل‌ضرب مقدارهای ممکن a کدام است؟



۱) ۱ ۲) -1
۳) ۶ ۴) -6

راه‌حل چون $f(0)=1$، تساوی داده شده به‌صورت $f(2a-1)=0$ در می‌آید. چون نمودار تابع در نقاط $x=-2$، $x=1$ و $x=3$ محور طول‌ها را قطع کرده است، پس $f(-2)=f(1)=f(3)=0$ و در نتیجه $2a-1=-2\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$, $2a-1=3\Rightarrow a=2$, $2a-1=1\Rightarrow a=1$

بنابراین حاصل‌ضرب مقدارهای ممکن a برابر -1 است.

۵ ضابطهٔ تابع

می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که در ازای هر ورودی یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنهٔ تابع داده می‌شوند و خروجی‌ها در برد هستند. در ضمن، به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد. البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسان داشته باشند. اگر x عضوی از دامنهٔ تابع f و y خروجی این تابع به ازای x باشد، می‌نویسیم $y=f(x)$.

به عملیاتی که ماشین تابع روی ورودی انجام می‌دهد تا آن را به خروجی تبدیل کند، **ضابطهٔ تابع** می‌گویند.

مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=-x$، به هر عدد حقیقی قرینه‌اش را نسبت می‌دهد.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+1$ به هر عدد از بازهٔ $[-1,1]$ عددی را که یک واحد از این عدد بزرگ‌تر است، نسبت می‌دهد. می‌توانیم این تابع را به‌صورت مقابل نشان دهیم:

$f:[-1,1]\to[0,2]$

$f(x)=x+1$

در تابع f، $D_f=[-1,1]$، $R_f=[0,2]$ و هم‌دامنهٔ تابع می‌تواند هر مجموعهٔ شامل $[0,2]$ باشد. بنابراین می‌توانیم تابع f را به‌صورت مقابل نشان دهیم:

$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=x+1$

تست ۹ دربارهٔ تابع $f(x)=3x-2$ می‌دانیم $f(2a)+f(a)=5$. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل در ضابطهٔ تابع f به جای x، a و $2a$ را قرار می‌دهیم: $f(a)=3a-2$, $f(2a)=3(2a)-2=6a-2$

بنابراین $f(a)+f(2a)=5\Rightarrow 3a-2+6a-2=5\Rightarrow 9a-4=5\Rightarrow a=1$

تست ۱۰ اگر $f(x)=3x+4$، حاصل $f(2x-1)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

۱) $2f(x)+7$ ۲) $3f(x)-7$ ۳) $3f(x)+7$ ۴) $2f(x)-7$

راه‌حل اگر در تساوی $f(x)=3x+4$ به جای x عبارت $2x-1$ قرار دهیم به‌دست می‌آید $f(2x-1)=3(2x-1)+4=6x+1=2(3x+4)-7=2f(x)-7$

تست ۱۱ اگر $f(۳x+۱)=۲x+۵$، مقدار $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

راه‌حل برای اینکه از تساوی $f(۳x+۱)=۲x+۵$ مقدار $f(۴)$ را حساب کنیم. ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $۳x+۱=۴$. اگر این معادله را حل کنیم به‌دست می‌آید $x=۱$. بنابراین

$$f(۳\times۱+۱)=۲\times۱+۵\Rightarrow f(۴)=۷$$

تست ۱۲ اگر $f(\frac{x-۱}{۲})=x^۲-۲x+۱$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $۲x^۲$ ۲) $\frac{x^۲}{۴}$ ۳) $\frac{x^۲}{۲}$ ۴) $۴x^۲$

راه‌حل **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(\frac{x-۱}{۲})=(x-۱)^۲ \xrightarrow{\frac{x-۱}{۲}=t} f(t)=(۲t)^۲\Rightarrow f(t)=۴t^۲$$

بنابراین $f(x)=۴x^۲$.

راه‌حل دوم به جای x، $۲x+۱$ قرار می‌دهیم بنابراین

$$f(\frac{x-۱}{۲})=(x-۱)^۲ \xrightarrow{x\to ۲x+۱} f(x)=(۲x+۱-۱)^۲=(۲x)^۲=۴x^۲$$

تست ۱۳ اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، ضابطهٔ تابع f برای $|x|\geq ۲$ کدام است؟

۱) $x^۲$ ۲) $x^۲+۲$ ۳) $x^۲-۲$ ۴) $x^۲-x$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲x(\frac{۱}{x})\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲$$

بنابراین $f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲$. اگر فرض کنیم $t=x+\frac{۱}{x}$، آن‌گاه $f(t)=t^۲-۲$ و $|t|\geq ۲$. بنابراین اگر $|x|\geq ۲$، آن‌گاه $f(x)=x^۲-۲$.

تست ۱۴ اگر $f(x)=۲x+۱-f(x+۱)$ و $f(۴)=۲$، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل با استفاده از رابطهٔ داده شده $f(۳)=۵-f(۳)$. پس برای به‌دست آوردن $f(۲)$ باید مقدار $f(۳)$ را به‌دست آوریم $f(۲)=۲\times۲+۱-f(۳)$. اکنون به راحتی می‌توان $f(۲)$ را به‌دست آورد:

$$f(۳)=۵ \xrightarrow{f(۴)=۲} f(۳)=۲\times۳+۱-f(۴)$$

$f(۲)=۵-f(۳)=۵-۵=۰$.

رابطه و تابع

فرض کنید رابطه‌ای بین x و y به‌صورت یک تساوی داریم. در این صورت y تابعی از x است اگر و فقط اگر به ازای هر x فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد که در تساوی داده شده صدق کند. به عبارت دیگر. اگر $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ در تساوی مورد نظر صدق کنند و $x_۱=x_۲$. آن‌گاه $y_۱=y_۲$.

مثال: مجموعهٔ زوج مرتب‌هایی که در رابطهٔ $y^۲=x$ صدق می‌کنند. تابع نیست. زیرا مثلاً زوج مرتب‌های $(۱, ۱)$ و $(۱-, ۱)$ عضو این مجموعه هستند (این دو زوج مرتب مؤلفه‌های اول برابر و مؤلفه‌های دوم نابرابر دارند). توجه کنید که به ازای هر مقدار مثبت x، دو مقدار برای y وجود دارد. زیرا $y=\sqrt{x}$ یا $y=-\sqrt{x}$.

مثال: در رابطهٔ $x^۲+۴y^۲+۴x-۴y+۵=۰$، y تابعی از x است. توجه کنید که این رابطه را می‌توانیم به شکل مجموع دو مربع کامل بنویسیم:

$$x^۲+۴x+۴+۴y^۲-۴y+۱=۰\Rightarrow (x+۲)^۲+(۲y-۱)^۲=۰$$

بنابراین باید هر دو عبارت $(x+۲)^۲$ و $(۲y-۱)^۲$ برابر صفر باشند که نتیجه می‌شود $x=-۲$ و $y=\frac{۱}{۲}$. یعنی تنها زوج مرتبی که در رابطهٔ داده شده صدق می‌کند $(-۲, \frac{۱}{۲})$ است. پس در این رابطه y تابعی از x است.

تذکر اگر رابطه‌ای را بتوان به‌صورت $y=f(x)$ نوشت. که در این‌جا $f(x)$ عبارتی جبری برحسب x است. آن‌گاه y تابعی از x است.

مثال: در رابطهٔ $y^۳+۳y^۲+۳y=x$ ، y تابعی از x است، زیرا رابطه را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$(y+۱)^۳-۱=x\Rightarrow(y+۱)^۳=x+۱\Rightarrow y+۱=\sqrt[۳]{x+۱}\Rightarrow y=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$$

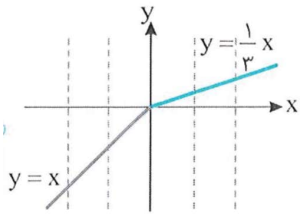
واضح است که در تساوی بالا به ازای هر مقدار از x فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید. پس در این رابطه y تابعی از x است.

تذکر اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، این رابطه یک تابع است، اگر و فقط اگر هر خط موازی محور y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: در رابطهٔ $۲y+|y|=x$ ، y تابعی از x است.

ابتدا توجه کنید که اگر $y\geq ۰$ ، آن‌گاه رابطه به‌صورت مقابل است: $۲y+y=x\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x$

و اگر $y<۰$ ، آن‌گاه رابطه به‌صورت مقابل است: $۲y-y=x\Rightarrow y=x$



پس نمودار رابطه به شکل روبه‌رو است و چون هر خط موازی محور y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس در این رابطه y تابعی از x است.

تذکر به کمک تعریف تابع می‌توانیم ثابت کنیم در رابطهٔ داده شده، y تابعی از x است.

مثال: در رابطهٔ $y^۳+y=x$ ، y تابعی از x است.

فرض کنید دو زوج مرتب $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ عضو رابطه باشند. اگر $x_۱=x_۲$ ، آن‌گاه باید نشان دهیم $y_۱=y_۲$ تا در رابطهٔ داده شده y تابعی از x باشد. پس

$$x_۱=x_۲\Rightarrow y_۱^۳+y_۱=y_۲^۳+y_۲\Rightarrow y_۱^۳-y_۲^۳+y_۱-y_۲=۰$$

$$(y_۱-y_۲)(y_۱^۲+y_۱y_۲+y_۲^۲)+(y_۱-y_۲)=۰\Rightarrow(y_۱-y_۲)(y_۱^۲+y_۱y_۲+y_۲^۲+۱)=۰$$

اکنون توجه کنید که عبارت $y_۱^۲+y_۱y_۲+y_۲^۲+۱$ ممکن نیست صفر شود و همواره مقداری مثبت دارد، زیرا

$$y_۱^۲+y_۱y_۲+y_۲^۲+۱=(y_۱+\frac{۱}{۲}y_۲)^۲+\frac{۳}{۴}y_۲^۲+۱>۰$$

بنابراین $y_۱-y_۲=۰\Rightarrow y_۱=y_۲$

تست ۱۵ در کدام رابطه y تابعی از x است؟

۱) $y-\sqrt{y}=x-۲$ ۲) $y+\frac{۱}{y}=x^۲-۲$ ۳) $y-\frac{۱}{y}=x^۳-۲$ ۴) $y+\sqrt{y}=x^۴-۲$

راه‌حل گزینه‌های (۱) تا (۳) را به کمک مثال نقض رد می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) : $x=۲\Rightarrow y-\sqrt{y}=۰\Rightarrow y=۰,y=۱$

گزینهٔ (۲) : $x=\frac{۳}{\sqrt{۲}}\Rightarrow y+\frac{۱}{y}=\frac{۹}{۲}-۲=\frac{۵}{۲}\Rightarrow y=۲,y=\frac{۱}{۲}$ ، گزینهٔ (۳) : $x=\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow y-\frac{۱}{y}=۰\Rightarrow y=۱,y=-۱$

توجه کنید که در هر قسمت مقدار x را طوری انتخاب می‌کنیم که معادلهٔ حاصل ساده باشد و بیش از یک جواب داشته باشد.

تابع چندضابطه‌ای

تابع چندضابطه‌ای تابعی است که بتوان آن را روی زیرمجموعه‌های مختلف دامنه‌اش با ضابطه‌های مختلف نشان داد.

$$f(x)=\begin{cases}f_۱(x) & x\in A_۱\\ f_۲(x) & x\in A_۲\\ \vdots & \\ f_n(x) & x\in A_n\end{cases}$$

که $A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_n$ برابر دامنهٔ تابع f است و $f_۱(x)$ ، $f_۲(x)$ ، ... و $f_n(x)$ به ترتیب روی $A_۱$ ، $A_۲$ ، ... و A_n تابع هستند. معمولاً هیچ دو مجموعه‌ای از مجموعه‌های $A_۱$ ، $A_۲$ ، ... و A_n عضو مشترکی ندارند. ولی اگر عضوی مانند a متعلق به دو مجموعه مانند A_k و A_t باشد، آن‌گاه باید $f_k(a)=f_t(a)$.

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 2 \\ 3x-1 & x\leq 2 \end{cases}$ اگر $x\geq 2$ ، $y=x^2+1$ تابع است. همچنین اگر $x\leq 2$ ، $y=3x-1$ تابع است. از طرف دیگر مجموعه‌های $[2,+\infty)$ و $(-\infty,2]$ دارای عضو مشترک $x=2$ هستند ولی مقدار $f(2)$ از هر دو ضابطهٔ $f(x)=3x-1$ و $f(x)=x^2+1$ برابر ۵ به‌دست می‌آید.

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ x-1 & x\leq 0 \end{cases}$ آن‌گاه f تابع نیست زیرا به $x=0$ دو مقدار متفاوت ۱ و ۱− را نسبت می‌دهد.

تست ۱۶ اگر $f(x)=\begin{cases} -1 & x\in\mathbb{Z} \\ 2 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$ ، حاصل عبارت $f(\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+\cdots+f(\sqrt{20})$ کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۲ ۳) ۳۲− ۴) ۲۹−

راه‌حل: اعداد $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ و $\sqrt{16}$ صحیح هستند. پس $f(\sqrt{4})=f(\sqrt{9})=f(\sqrt{16})=-1$. اما ۱۶ عدد دیگری که در عبارت وجود دارند. صحیح نیستند. بنابراین مقدار تابع برای آن‌ها برابر ۲ است. پس $f(\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+\cdots+f(\sqrt{20})=3(-1)+16\times 2=29$.

تست ۱۷ کدام‌یک تابع است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ x-1 & x\leq 1 \end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 2 \\ 2x & x\leq 2 \end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ 2x & x\leq 1 \end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ x^2-1 & x<1 \end{cases}$

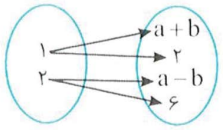
راه‌حل: در گزینهٔ (۱) برای هر x در بازهٔ $(0,1]$ دو مقدار y وجود دارد. پس این گزینه تابع نیست. در گزینهٔ (۳) برای $x=1$ دو مقدار متفاوت برای y وجود دارد. پس این گزینه هم تابع نیست. در گزینهٔ (۴) برای هر x در بازهٔ $(0,1)$ دو مقدار y وجود دارد. پس این گزینه هم تابع نیست. ولی در گزینهٔ (۲) اگر $x>2$ ، $y=x^2$ ، تابع است و برای $x<2$ ، $y=2x$ تابع است. همچنین برای $x=2$ ، $2x=x^2$. پس فقط یک مقدار $y=4$ برای $x=2$ وجود دارد. بنابراین گزینهٔ (۲) تابع است.

دست‌گرمی

۱- اگر دو زوج مرتب $(a+2b,3)$ و $(-1,2a-b)$ برابر باشند، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲- نمودار مقابل نمایش یک تابع است. مقدار ab کدام است؟



۱) ۴− ۲) ۶
۳) ۸− ۴) ۱۰

۳- رابطهٔ $f=\{(3,4),(3n,m),(3,m^2),(4,m+n),(4,2n+1)\}$ تابع است. مقدار mn کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۲− ۴) ۶−

۴- اگر برد تابع $f=\{(2,2m+n),(3,3m),(4,6)\}$ تک‌عضوی باشد، مقدار mn کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۵- اگر $f(x)=4x+4$ ، حاصل $f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})$ کدام است؟

۱) x ۲) $\frac{x}{2}$ ۳) $\frac{x}{4}$ ۴) $\frac{x}{8}$

۶- اگر $f(\frac{x+1}{x-1})=\frac{2}{x-1}$ ، ضابطهٔ تابع f برای $x\neq 0$ کدام است؟

۱) $\frac{x+1}{2}$ ۲) $\frac{1}{x+1}$ ۳) $x+1$ ۴) $\frac{2}{x+1}$

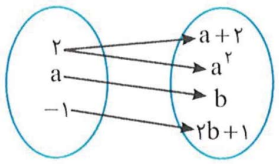
۷- اگر $f(x)=\begin{cases} kx+4 & x<4 \\ \frac{2}{5}x & x\geq 4 \end{cases}$ و $f(2)-f(4)=\frac{2}{5}$ ، مقدار k کدام است؟

۱) ۴− ۲) ۳− ۳) ۲− ۴) ۱−

۱- تابع $f=\{(۱,۲),(۲a-b,۲b+c),(۱,۲a)\}$ فقط یک زوج مرتب دارد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲- اگر نمودار مقابل نمایش یک تابع باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



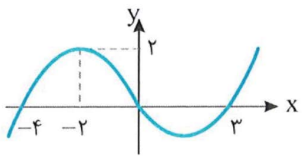
۱) ۱ یا ۴ ۲) ۲ یا ۶

۳) ۱− یا ۲ ۴) ۲− یا ۶

۳- اگر تعداد اعضای برد تابع $f=\{(۱,۳),(۳,۵),(۵,a^۲)\}$ کمتر از تعداد اعضای دامنهٔ آن باشد، چند مقدار مختلف برای a وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. معادلهٔ $f(x)=۱$ چند جواب دارد؟



۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۵- اگر $f(x^۲-۴x)=۸x-۲x^۲+۱۲$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۶- اگر $f(x)=x^۲-۲x$، ساده شدهٔ عبارت $f(x-۱)+f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $۲f(x)$ ۲) $f(x)+۲$ ۳) $۲f(x)-۲$ ۴) $۲f(x)+۲$

۷- اگر $f(\frac{x+۱}{x-۲})=۲x-۱$، آن‌گاه $f(x)$ برای هر $x\neq ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۳x+۳}{x-۱}$ ۲) $\frac{۳x-۱}{x-۱}$ ۳) $\frac{۲x-۳}{x-۱}$ ۴) $\frac{۵x+۴}{x-۱}$

۸- اگر $f(x)=\begin{cases} mx^۲-x & x\geq ۲ \\ ۴x-m & x\leq ۲ \end{cases}$ تابع باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۹- در تابع $f(x)=\begin{cases} ۱ & x\in\mathbb{Q} \\ ۰ & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ حاصل عبارت $f(\sqrt[۴]{۲})+f(\sqrt[۴]{۳})+\cdots+f(\sqrt[۴]{۱۰۰})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰- در کدام رابطه، y تابعی از x است؟

۱) $|y|=|x|$ ۲) $(y-۱)^۳=|x-۱|$ ۳) $|y|=x^۲+۱$ ۴) $|y^۳|=x-۱$

آزمون ۲ — مفاهیم اولیه (۲)

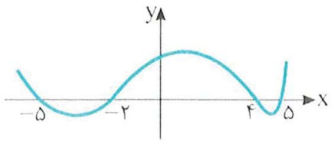
۱۱- اگر $f=\{(۲,m^۳-m),(m,۱),(۲,۰),(۰,۲),(۲m,۱)\}$ تابع باشد، چند مقدار مختلف برای m وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲- در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۴,۲),(۵,۴)\}$ اگر $f(f(a))=۲$، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۳- اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $f(x)\leq ۰$ صدق می‌کنند؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۸

۱۴- اگر $f(x)-۲f(۲)=x^۲-۳x+۴$، مقدار $f(-۲)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۵- اگر $f(x^۲+۱)=x^۴-x^۲$، آن‌گاه برای $x\geq ۱$ ضابطهٔ f کدام است؟

۱) $x^۲-۳x$ ۲) $x^۲-۳x+۲$ ۳) $x^۲-x+۲$ ۴) $x^۲-x$

۱۶- اگر $f(x+۲)=\frac{x^۳+۶x^۲+۱۲x}{x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱۰}$، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $\frac{x^۳+۸}{x^۳-۲}$ ۲) $\frac{x^۳-۸}{x^۳+۲}$ ۳) $\frac{x^۳-۴}{x^۳+۱}$ ۴) $\frac{x^۳-۸}{x^۳-۱}$

۱۷- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۱-x}}{x} & ۰<x\leq ۱\\ \frac{\sqrt{۱+x}}{x} & -۱\leq x<۰\end{cases}$، آن‌گاه $f(-x)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $f(\frac{۱}{x})$ ۴) $-f(\frac{۱}{x})$

۱۸- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}ax+b & x\leq -۱\\ ax+۴b & x>-۱\end{cases}$. اگر $f(-۱)+f(۶)=-۱۰$، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) $۳a$ ۲) $۳b-۲$ ۳) $۳b+۲$ ۴) $-۳a$

۱۹- اگر $f(x)=\begin{cases}۲x^۲+a & x\geq ۲\\ ax^۳-۲ & x\leq ۲\end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار $۷f(۷a)$ کدام است؟

۱) ۱۴۲۰ ۲) ۱۴۷۰ ۳) ۱۴۰۰ ۴) ۱۴۱۰

۲۰- در کدام‌یک از رابطه‌های زیر y تابعی از x است؟

۱) $y^۳+۳y^۲+۳y-x^۳=۰$ ۲) $y^۲-۲y+x^۲=۰$

۳) $y^۳-xy+x^۳=۴$ ۴) $y^۲+xy+x^۲=۹$

سؤال	گام
۱۱	۱ ۲
۱۲	۴
۱۳	۲ ۴
۱۴	۵
۱۵	۵ ۲۷۵
۱۶	۵ ۲۷۹
۱۷	۵ ۷
۱۸	۴ ۷
۱۹	۴ ۷
۲۰	۶

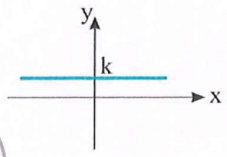
درس دوم: توابع معروف

برخی تابع‌ها که معمولاً با آن‌ها سروکار داریم نام خاصی دارند. در این درس این تابع‌ها را معرفی می‌کنیم.

تابع ثابت

تعریف

تابع ثابت تابعی است که برد آن فقط یک عضو دارد. اگر f تابعی ثابت باشد، ضابطهٔ آن به شکل $f(x)=k$ است، که در اینجا k عددی حقیقی است. اگر دامنهٔ تابع ثابت f مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار آن خطی موازی محور x است.



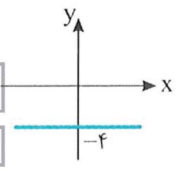
تست ۱ تابع $f=\{(1,5),(2,2m+1),(-2,3m-k),(4,m+n)\}$ یک تابع ثابت است. مقدار $m+n+k$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل چون تابع ثابت است، باید برد آن تک عضوی باشد. پس $2m+1=5\Rightarrow m=2$ ، $3m-k=5\xrightarrow{m=2}k=1$ ، $m+n=5\xrightarrow{m=2}n=3$

بنابراین $m+n+k=6$.

تست ۲ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(a+b^2)x+2b$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار ab کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

راه‌حل نمودار رسم شده متعلق به تابع ثابت $f(x)=-4$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. بنابراین باید تساوی $(a+b^2)x+2b=-4$ به‌ازای هر مقدار x برقرار باشد. پس

$a+b^2=0\Rightarrow a=-b^2$ ، $2b=-4\Rightarrow b=-2\xrightarrow{a=-b^2}a=-4$

بنابراین $ab=8$.

تست ۳ اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(a+2)x^2+(b-a)x+a+b$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $f(-4)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -4 ۴) -8

راه‌حل چون f تابعی ثابت است، در آن جمله‌ای که برحسب x باشد (یعنی جمله‌ای که در آن توان x غیر از صفر باشد) وجود ندارد. بنابراین باید ضریب‌های x^2 و x صفر باشند. در نتیجه

$a+2=0\Rightarrow a=-2$ ، $b-a=0\Rightarrow b=a=-2$

به این ترتیب $f(x)=a+b=-2-2=-4$. در نتیجه $f(-4)=-4$.

تست ۴ مقدار a کدام باشد تا تابع $f(x)=\frac{3x+1}{ax+3}$ با دامنهٔ $[1,2]$ تابعی ثابت باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۹

راه‌حل فرض کنید مقدار این تابع ثابت k باشد. در این صورت

$$\frac{3x+1}{ax+3}=k\Rightarrow 3x+1=kax+3k\Rightarrow 1=3k\Rightarrow k=\frac{1}{3}\ ,\quad 3=ka$$

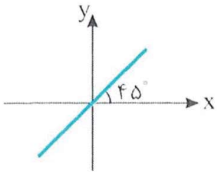
در نتیجه $3=\frac{a}{3}$، بنابراین $a=9$.

۹

تابع همانی

تعریف

تابع همانی تابعی است که دامنه و برد آن برابرند و هر عضو از دامنهٔ تابع به همان عضو در برد تابع نظیر می‌شود. ضابطهٔ تابع همانی f به‌صورت $f(x)=x$ است. اگر دامنهٔ تابع همانی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار آن خط به معادلهٔ $y=x$ است.



تست ۵

تابع $f=\{(-۱,m-۳),(۳,m+n),(۴,۴)\}$ همانی است. حاصل $m-n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

تابع همانی هر عضو از دامنه را به خودش نظیر می‌کند. پس $f(۳)=۳\Rightarrow m+n=۳\Rightarrow ۲+n=۳\Rightarrow n=۱$ ، $f(-۱)=-۱\Rightarrow m-۳=-۱\Rightarrow m=۲$

بنابراین $m-n=۱$.

تست ۶

اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۳x+(a+b)x+a-۲$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ تابع همانی باشد، حاصل $a+f(b)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۲

راه‌حل

توجه کنید که $f(x)=(۳+a+b)x+a-۲$. در نتیجه، اگر f تابع همانی باشد، باید $۳+a+b=۱$ و $a-۲=۰$. بنابراین $a=۲$ و $b=۱-۳-a=-۴$.

بنابراین $f(x)=x$. به این ترتیب، چون $f(b)=b$، پس $a+f(b)=a+b=۲-۴=-۲$.

تست ۷

اگر $f(x)=\dfrac{x^۲+(a+۱)x+b-۲}{x-۱}$ ضابطهٔ یک تابع همانی باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

راه‌حل

ضابطهٔ تابع همانی $f(x)=x$ است. پس

$\dfrac{x^۲+(a+۱)x+b-۲}{x-۱}=x\Rightarrow x^۲+(a+۱)x+b-۲=x^۲-x$

تساوی اخیر به ازای هر $x\neq ۱$ باید برقرار باشد. پس

$a+۱=-۱\Rightarrow a=-۲$ ، $b-۲=۰\Rightarrow b=۲$

در نتیجه $a-b=-۴$.

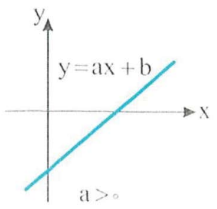
۱۰

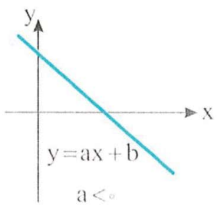
تابع خطی

تعریف

هر تابعی را که ضابطهٔ آن به شکل $f(x)=ax+b$ است، **تابعی خطی** می‌نامند. (a و b اعدادی حقیقی‌اند.)

اگر دامنهٔ تابع خطی $f(x)=ax+b$، مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار آن خطی راست است که شیب آن a است و اگر دامنهٔ تابع خطی $f(x)=ax+b$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، نمودار تابع f نقاطی از خط $y=ax+b$ است.





تست ۸

اگر تابع $f=\{(m,۱۰),(-۱,-۵),(۲,m)\}$ یک تابع خطی باشد، مجموع مقدارهای m کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۵ ۴) -۶

راه‌حل

ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم نمودار این تابع نقاطی روی خط راست $y=ax+b$ است. مقدار a، شیب خط. ثابت است. بنابراین

$a=\dfrac{۱۰+۵}{m+۱}=\dfrac{m+۵}{۲+۱}\Rightarrow\dfrac{۱۵}{m+۱}=\dfrac{m+۵}{۳}$

پس از ساده کردن معادله نتیجه می‌شود $m^۲+۶m-۴۰=۰$. پس $m=۴$ یا $m=-۱۰$. بنابراین مجموع مقدارهای m برابر -۶ است.

تست ۹ دربارهٔ تابع خطی f با دامنهٔ $\mathbb{R}$، می‌دانیم $f(۱)=-۲$ و $f(-۲)=۷$. مقدار $f(۷)$ کدام است؟

۱) -۲۰ ۲) -۱۶ ۳) -۱۴ ۴) -۱۲

راه‌حل ضابطهٔ تابع خطی f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $x=۱$ و $x=-۲$ در ضابطه نتیجه می‌شود $f(۱)=a+b=-۲$ و $f(-۲)=-۲a+b=۷$. از حل دستگاه معادله‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $a=-۳$ و $b=۱$. پس ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=-۳x+۱$ است، بنابراین $f(۷)=-۲۱+۱=-۲۰$.

تست ۱۰ اگر f تابعی خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و به‌ازای هر مقدار x تساوی $f(x)+f(۲x)+f(۳x)=۲۴x-۱۲$ برقرار باشد، مقدار $f(\frac{x}{۴})$ کدام است؟

۱) $۴x-۴$ ۲) $۴x-۲$ ۳) $۲x-۴$ ۴) $x-۴$

راه‌حل فرض می‌کنیم ضابطهٔ تابع خطی f به‌صورت $f(x)=ax+b$ باشد. در این صورت

$$f(x)+f(۲x)+f(۳x)=۲۴x-۱۲\Rightarrow ax+b+۲ax+b+۳ax+b=۲۴x-۱۲\Rightarrow ۶ax+۳b=۲۴x-۱۲$$

بنابراین $۶a=۲۴$ و $۳b=-۱۲$. در نتیجه $a=۴$ و $b=-۴$. به این ترتیب $f(x)=۴x-۴$. پس $f(\frac{x}{۴})=۴(\frac{x}{۴})-۴=x-۴$.

تست ۱۱ در مورد تابع خطی f به ازای هر مقدار x تساوی $f(f(x))=۴x+۶$ برقرار است. مقدار $f(۰)$ کدام است؟

۱) ۲ یا ۶ ۲) -۲ یا ۶ ۳) -۲ یا -۶ ۴) ۲ یا -۶

راه‌حل ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=ax+b$ است. بنابراین $f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b$. پس تساوی $a^۲x+(ab+b)=۴x+۶$ یک اتحاد است. یعنی

$$\begin{cases} a^۲=۴ \\ ab+b=۶ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=۲\xrightarrow{ab+b=۶} b=۲\Rightarrow f(x)=۲x+۲\Rightarrow f(۰)=۲ \\ a=-۲\xrightarrow{ab+b=۶} b=-۶\Rightarrow f(x)=-۲x-۶\Rightarrow f(۰)=-۶ \end{cases}$$

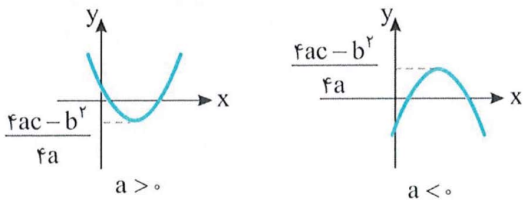
تابع چندجمله‌ای

تعریف

هر تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$ است، که در اینجا n عددی صحیح و نامنفی است و $a_۰$، $a_۱$، ... و a_n عددهایی حقیقی هستند و $a_n\neq ۰$، تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند.

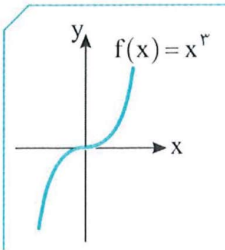
نکته تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم

ضابطهٔ تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم به‌صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ است $(a\neq ۰)$ که دامنهٔ آن $\mathbb{R}$، برد آن $[\frac{۴ac-b^۲}{۴a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{۴ac-b^۲}{۴a}]$ و نمودار آن یک سهمی است.



نکته تابع چندجمله‌ای درجهٔ سوم

ضابطهٔ تابع چندجمله‌ای درجهٔ سوم به‌صورت $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ است $(a\neq ۰)$، که دامنه و برد آن مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است. نمودار تابع $f(x)=x^۳$ به‌صورت مقابل است.



تست ۱۲ اگر f یک تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد، $f(۰)=۱$، $f(۱)=۲$ و $f(-۱)=۴$، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

راه‌حل فرض کنید $f(x)=ax^۲+bx+c$. پس $f(-۱)=a-b+c=۴\Rightarrow a-b=۳$ ، $f(۱)=a+b+c=۲\Rightarrow a+b=۱$ ، $f(۰)=c=۱$.

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=۱\\a-b=۳\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=۲$ و $b=-۱$. در نتیجه $f(x)=۲x^۲-x+۱$. پس $f(۲)=۷$.

تست ۱۳ اگر $f(x)=x^۳-(k+۹۶)x$ و $f(-۱)=۸$ ، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) -۹ ۲) -۸ ۳) -۷ ۴) -۶

راه‌حل راه‌حل اول چون $f(x)=x^۳-(k+۹۶)x$. پس $f(-۱)=۸\Rightarrow(-۱)^۳-(k+۹۶)(-۱)=۸\Rightarrow-۱+(k+۹۶)=۸\Rightarrow k+۹۶=۹$

بنابراین $f(x)=x^۳-۹x$ و $f(۱)=۱-۹=-۸$.

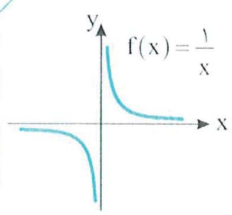
راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۱)+f(-۱)=۱-(k+۹۶)+(-۱)-(k+۹۶)(-۱)=۰$. پس $f(۱)=-f(-۱)=-۸$.

تابع گویا

تعریف اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر نباشد، به تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ و دامنهٔ $D_f=\{x|Q(x)\neq۰\}$ تابع گویا می‌گوییم.

نکته نمودار تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$ که دامنهٔ آن $\mathbb{R}-\{۰\}$ است به شکل مقابل است.

از روی این نمودار معلوم است که برد تابع f مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ است.



تست ۱۴ اگر $a\notin\{۰,-۱,۱\}$ ، در تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ مقدار $f(a)f(-\frac{۱}{a})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $(a+۱)^۲$ ۴) $\frac{۱}{(a-۱)^۲}$

راه‌حل با جای‌گذاری $-\frac{۱}{a}$ به جای x در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید $f(-\frac{۱}{a})=\frac{-\frac{۱}{a}+۱}{-\frac{۱}{a}-۱}=\frac{\frac{-۱+a}{a}}{\frac{-۱-a}{a}}=\frac{a-۱}{-a-۱}=\frac{۱-a}{a+۱}$. بنابراین

$$f(a)\times f(-\frac{۱}{a})=\frac{a+۱}{a-۱}\times\frac{۱-a}{a+۱}=-۱$$

تست ۱۵ اگر $f(\frac{x+۲}{x-۱})=\frac{mx+۱}{x+۱}$ و $f(۴)=۳$ ، مقدار $f(۰)$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۲ ۳) ۷ ۴) ۲

راه‌حل ابتدا x ای پیدا می‌کنیم که $\frac{x+۲}{x-۱}=۴$. به این‌ترتیب $\frac{x+۲}{x-۱}=۴\Rightarrow x+۲=۴(x-۱)\Rightarrow x=۲$

اکنون اگر در تساوی $f(\frac{x+۲}{x-۱})=\frac{mx+۱}{x+۱}$ قرار دهیم $x=۲$ ، به‌دست می‌آید $f(\frac{۲+۲}{۲-۱})=\frac{m\times۲+۱}{۲+۱}$ ، یعنی $f(۴)=\frac{۲m+۱}{۳}$ و چون $f(۴)=۳$ ، پس

$\frac{۲m+۱}{۳}=۳$ و در نتیجه $m=۴$. به این‌ترتیب $f(\frac{x+۲}{x-۱})=\frac{۴x+۱}{x+۱}$. اکنون x ای پیدا می‌کنیم که $\frac{x+۲}{x-۱}=۰$. به‌این‌ترتیب $x=-۲$. در نتیجه

$$f(\frac{-۲+۲}{-۲-۱})=\frac{۴\times(-۲)+۱}{-۲+۱}\Rightarrow f(۰)=۷$$

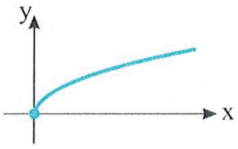
تابع ریشهٔ n اُم

تعریف

اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، به تابعی که به هر عدد نامنفی، ریشهٔ n اُم نامنفی آن را نسبت می‌دهد، **تابع ریشهٔ n اُم** می‌گوییم و اگر n عددی طبیعی، فرد و مخالف یک باشد، به تابعی که به هر عدد حقیقی، ریشهٔ n اُم آن را نسبت می‌دهد، **تابع ریشهٔ n اُم** می‌گوییم.

نکته

- نمودار تابع ریشهٔ دوم به‌صورت زیر است.

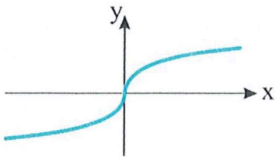


$f(x)=\sqrt{x}$

$D_f=[0,+\infty)$

$R_f=[0,+\infty)$

- نمودار تابع ریشهٔ سوم به‌صورت زیر است.



$f(x)=\sqrt[3]{x}$

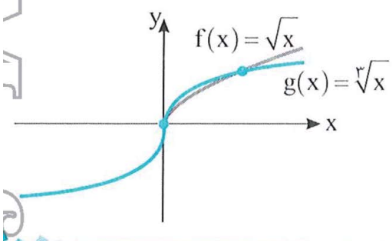
$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}$

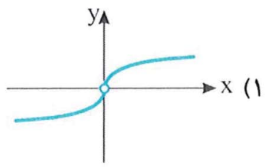
تست ۱۶ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با نمودار تابع $g(x)=\sqrt[3]{x}$ در چند نقطه مشترک است؟

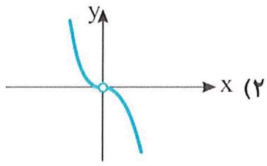
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

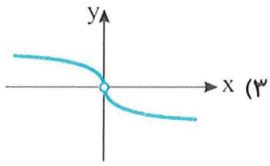
راه‌حل نمودار تابع‌های f و g را در شکل مقابل رسم کرده‌ایم. از روی شکل معلوم می‌شود که این نمودارها دو نقطهٔ مشترک دارند.

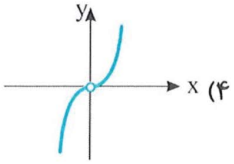


تست ۱۷ اگر $f(x)=\sqrt[3]{-x}$، نمودار تابع $g(x)=f(x^2)f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل توجه کنید که به ازای $x\neq 0$ ، $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{-x^2}\sqrt[3]{-\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{(-x^2)(-\frac{1}{x})}=f(x^2)f(\frac{1}{x})=g(x)$. بنابراین نمودار تابع g به‌صورت گزینهٔ (۱) است.

دست‌گرمی

۸- اگر $f=\{(1,2),(2,a-b),(3,3a-7b)\}$ تابعی ثابت باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹- اگر f تابع همانی با ضابطهٔ $f(x-4)=(2a-7)x+b+1$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $f(a+b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۵ ۴) -5

۱۰- اگر $f(x)=ax(x-3)+x(x-b)+b$ ضابطهٔ یک تابع خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $f(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱- در تابع چندجمله‌ای $f(x)=ax^2+bx+c$ مقدار $f(3)-2f(2)+2f(0)$ کدام است؟

۱) $af(1)$ ۲) $f(-1)$ ۳) $b+f(0)$ ۴) $f(-2)$

۱۲- اگر $\frac{2x+f(x)}{xf(x)-3}=4$ ، ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) $\frac{2x}{4x+1}$ ۲) $\frac{4x+12}{4x-1}$ ۳) $\frac{3x-2}{2x+1}$ ۴) $\frac{2x+12}{4x-1}$

آزمون ۳ توابع معروف (۱)

۲۱- اگر $f=\{(۲,۴),(۳,m-۲),(-۲,m+۲n),(-۳,mn+k)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۶

۲۲- اگر $f(x)=(۴-a)x^۲+(۳+b)x+ab+۱۹$ ضابطهٔ یک تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $f(a+b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) -۱۲

۲۳- تابع $f=\{(-۴,m-۲n),(۶,n+m),(\frac{m}{n},k)\}$ یک تابع همانی است. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۲۴- اگر $f(x)=\frac{x^۲+۲ax+۴a-۴}{x+۲}$ ضابطهٔ یک تابع همانی باشد، مقدار $f(-a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۵- اگر f تابعی خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، $f(۲)-۳f(-۲)=۴۶$ و $f(۳)-۳f(۱)=۲۲$، مقدار $f(-۲)$ کدام است؟

۱) -۱۷ ۲) -۱۹ ۳) -۲۱ ۴) -۲۳

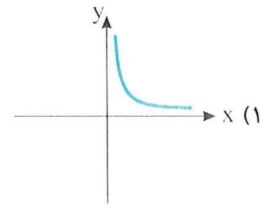
۲۶- در مورد تابع خطی f می‌دانیم به ازای هر x تساوی $f(x-۱)+۲f(x+۲)=-۹x+۲۱$ برقرار است. ضابطهٔ تابع f کدام است؟

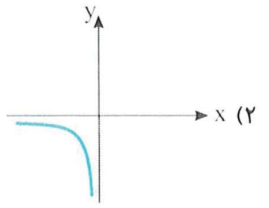
۱) $f(x)=-۵x+۴$ ۲) $f(x)=-۴x-۲$ ۳) $f(x)=-۳x+۱۰$ ۴) $f(x)=-۲x+۳$

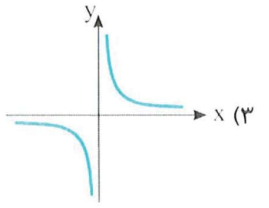
۲۷- دربارهٔ تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲-bx$ می‌دانیم $f(۲)=۰$ و $f(-۱)=۳$، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

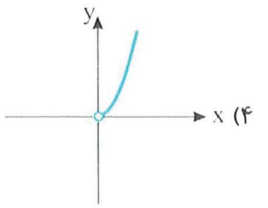
۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲}{x+|x|}$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^۳}}$ خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+x+۱}{x^۳-۱}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=x^۲-۲$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال	گام
۲۱	۸
۲۲	۸
۲۳	۹
۲۴	۹ ۲۸۳
۲۵	۱۰
۲۶	۵ ۱۰
۲۷	۴ ۱۱
۲۸	۱۲ ۳۲۴
۲۹	۱۳
۳۰	۱۱ ۱۲ ۳۲ ۲۸۱

۳۱- اگر f تابع همانی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و $f(۲)=۱۴-۲k$، مقدار $f(۱۴-۳k)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۳۲- اگر $f(x)=(kx-۲)(m-x)+۲x^۲$ ضابطهٔ یک تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $k+m$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۳- اگر $f(x)=(a-۲)x^۲+(b-۳)x+a+b-c$ ضابطهٔ تابع همانی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مقدار c کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

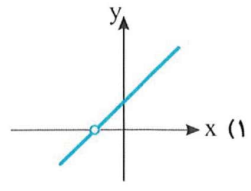
۳۴- به‌ازای کدام مقدار a، $f(x)=\frac{۲x+۱}{ax-۳}$ ضابطهٔ یک تابع ثابت است؟

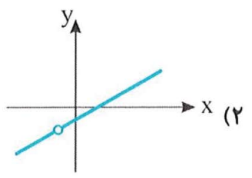
۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) -۸

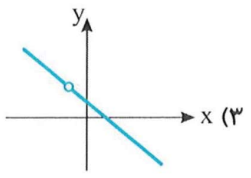
۳۵- اگر $f(x)=mx(۲-x)+x^۲-۴x-m$ ضابطهٔ یک تابع خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟

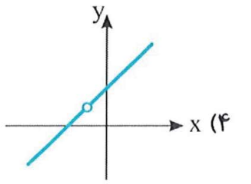
۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۶- اگر $f(x)=\frac{x^۲+mx+۲}{x+۱}$، ضابطهٔ تابعی خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۱\}$ باشد، نمودار این تابع کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۷- برای تابع خطی f با دامنهٔ $\mathbb{R}$، تساوی‌های $f(f(۱))=۱$ و $f(f(-۱))=-۷$ برقرار است. مقدار $f(۰)$ کدام است؟

۱) -۱ یا -۳ ۲) ۱ یا -۳ ۳) -۱ یا ۳ ۴) ۱ یا ۳

۳۸- در مورد تابع $f(x)=ax^۲-bx+۲$ تساوی $f(x-۱)-f(x)=۶x+۲$ به ازای هر x برقرار است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۸

۳۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۱}$ خط $y=k$ را قطع نمی‌کند. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۴۰- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x+|x|}{۲}}$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=x^۲-۱$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال
۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰

درس سوم: سهمی و تابع درجهٔ دوم

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ را که در آن $a\neq 0$ و $D_f=\mathbb{R}$ **تابع درجهٔ دوم** می‌نامیم. نمودار این تابع یک **سهمی** به صورت‌های مقابل است.

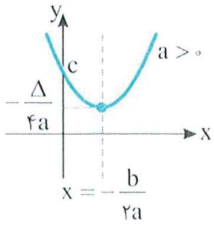


نکته — ویژگی‌های سهمی

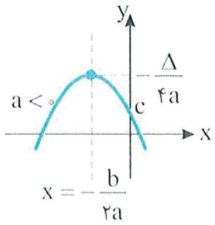
۱۴

نقطهٔ $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ رأس نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ و خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن این نمودار است.

(توجه کنید که $\Delta=b^2-4ac$).



سهمی پایین‌ترین نقطه (مینیمم) دارد.



سهمی بالاترین نقطه (ماکزیمم) دارد.

تست ۱

رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^2-4x+2$ کدام نقطه است؟

۱) $(2,-2)$ ۲) $(-2,2)$ ۳) $(2,2)$ ۴) $(-2,-2)$

راه‌حل

رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ نقطهٔ $\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ است. در این سهمی $a=1$، $b=-4$ و $c=2$. بنابراین $-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times 1}=2$ و

$$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{4\times 1\times 2-(-4)^2}{4\times 1}=\frac{8-16}{4}=-2$$

پس رأس سهمی مورد نظر نقطهٔ $(2,-2)$ است.

تست ۲

اگر رأس سهمی به معادلهٔ $y=2mx^2-mx+2$ روی خط $y=1$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -4 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 8

راه‌حل

رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ نقطهٔ $\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ است. بنابراین

$$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{4\times(2m)\times 2-(-m)^2}{4\times(2m)}=1\Rightarrow\frac{16m-m^2}{8m}=1\Rightarrow m^2=8m$$

پس $m=0$ یا $m=8$. اگر $m=0$، ضریب x^2 صفر می‌شود که ممکن نیست. پس $m=8$.

تست ۳

عرض پایین‌ترین نقطهٔ سهمی به معادلهٔ $y=mx^2+3x+2$ برابر -5 است. معادلهٔ خط تقارن سهمی کدام است؟

۱) $x=-\frac{14}{3}$ ۲) $x=3$ ۳) $x=-3$ ۴) $x=-\frac{11}{3}$

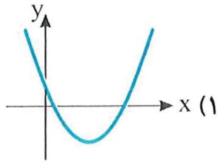
راه‌حل

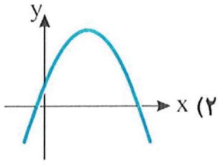
عرض رأس سهمی $\frac{4\times 2m-9}{4m}$ است. بنابراین

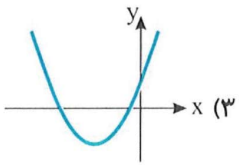
$$\frac{8m-9}{4m}=-5\Rightarrow 8m-9=-20m\Rightarrow 28m=9\Rightarrow m=\frac{9}{28}$$

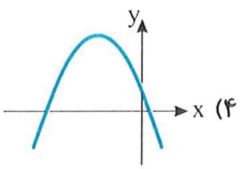
معادلهٔ خط تقارن سهمی $x=-\frac{3}{2m}$ است. بنابراین $x=-\frac{3}{2\times\frac{9}{28}}=-\frac{14}{3}$ معادلهٔ خط تقارن سهمی است.

تست ۴ نمودار تابع $y=-x^۲+۳x+۱$ کدام است؟

۱) 

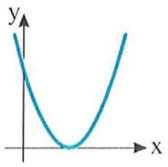
۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل چون ضریب $x^۲$ عدد -۱ است، پس سهمی دارای بالاترین نقطه است و نمودار آن به شکل ∩ است. از طرف دیگر، طول رأس سهمی $x=-\frac{۳}{۲\times(-۱)}=\frac{۳}{۲}$ است، پس طول رأس سهمی باید در قسمت مثبت محور x قرار گیرد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

تست ۵ ضابطهٔ تابع رسم شده در شکل مقابل کدام گزینه می‌تواند باشد؟



۱) $y=x^۲-\sqrt{۸}x+۱$

۲) $y=x^۲+\sqrt{۱۲}x+۳$

۳) $y=x^۲-\sqrt{۱۲}x+۳$

۴) $y=x^۲+\sqrt{۸}x+۲$

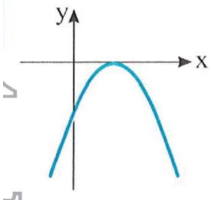
راه‌حل با توجه به شکل داده شده، طول رأس سهمی عددی مثبت و عرض آن صفر است. در سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-\sqrt{۱۲}x+۳$ طول رأس سهمی $x=-\frac{-\sqrt{۱۲}}{۲\times۱}=\sqrt{۳}$ و عرض آن $y=(\sqrt{۳})^۲-\sqrt{۱۲}\sqrt{۳}+۳=۰$ است.

نکته ۱۵

اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ را که یک سهمی است داشته باشیم، آن‌گاه برای تعیین مقدار یا علامت a، b و c به شکل زیر عمل می‌کنیم.

- اگر سهمی به‌صورت ∪ باشد، آن‌گاه $a>۰$ و اگر سهمی به‌صورت ∩ باشد، آن‌گاه $a<۰$.
- با توجه به علامت a و علامت طول رأس سهمی $(x=-\frac{b}{۲a})$ می‌توانیم علامت b را مشخص کنیم.
- عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور y مقدار c است، پس علامت c علامت عرض این نقطه است.

تست ۶ سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست است؟



۱) $c<۰, b<۰, a>۰$

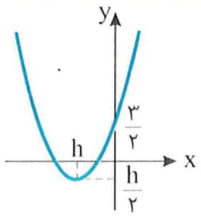
۲) $c<۰, b=۰, a>۰$

۳) $c<۰, b>۰, a<۰$

۴) $c>۰, b>۰, a<۰$

راه‌حل چون سهمی دارای بالاترین نقطه است، پس $a<۰$. چون عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور عرض‌ها منفی است، پس $c<۰$. چون طول رأس سهمی عددی مثبت است، پس $\frac{-b}{۲a}>۰$ و چون $a<۰$، پس $b>۰$.

تست ۷ سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار b کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) -۳

۴) ۳

راه‌حل سهمی از نقطهٔ $(\frac{۳}{۲}, ۰)$ عبور کرده است، پس $۰+۰+c=\frac{۳}{۲}$، در نتیجه $c=\frac{۳}{۲}$. بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=x^۲-bx+\frac{۳}{۲}$ است. همچنین از معادلهٔ داده شده نتیجه می‌شود طول رأس سهمی $\frac{b}{۲}$ است. پس $h=\frac{b}{۲}$، یعنی $b=۲h$. بنابراین معادلهٔ سهمی $y=x^۲-۲hx+\frac{۳}{۲}$ است. از طرف دیگر سهمی از نقطهٔ $(\frac{h}{۲}, h)$ عبور کرده است. بنابراین

$$\frac{h}{۲}=h^۲-۲h^۲+\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲h^۲+h-۳=۰\Rightarrow h=۱,\ h=-\frac{۳}{۲}$$

واضح است که h عددی منفی است و $h=۱$ قابل قبول نیست. بنابراین $h=-\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $b=-۳$.

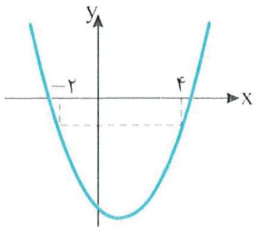
۱۶

نکته تقارن در سهمی

با توجه به اینکه خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ است، نقاطی که در دو طرف محور تقارن روی سهمی قرار دارند و عرض آن‌ها یکسان است فاصلهٔ یکسان از محور تقارن دارند. یعنی محور تقارن سهمی از وسط این دو نقطه می‌گذرد و همچنین نقاط روی سهمی که طول آن‌ها $x=-\frac{b}{2a}+m$ و $x=-\frac{b}{2a}-m$ است عرض یکسان دارند.

تست ۸

معادلهٔ محور تقارن سهمی مقابل کدام است؟



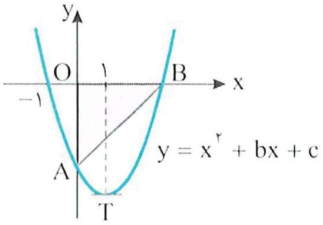
۱) $x=1$
۲) $x=\frac{1}{2}$
۳) $x=2$
۴) $x=\frac{3}{2}$

راه‌حل $x=4$ و $x=-2$ دارای عرض یکسان روی سهمی هستند، پس محور تقارن سهمی از وسط آن‌ها می‌گذرد.

بنابراین $x=\frac{-2+4}{2}=1$ محور تقارن سهمی است.

تست ۹

در شکل مقابل، مساحت مثلث AOB چقدر است؟



۱) $\frac{7}{2}$
۲) $\frac{9}{2}$
۳) ۴
۴) $\frac{3}{2}$

راه‌حل از روی شکل معلوم است که طول رأس سهمی برابر با ۱ است. در نتیجه

$$\frac{-b}{2}=1\Rightarrow b=-2$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=x^2-2x+c$ است. همچنین سهمی از نقطهٔ $(-1,0)$ گذشته است. بنابراین

$$1+(-1)(-2)+c=0\Rightarrow c=-3$$

خط $x=1$ محور تقارن سهمی است. بنابراین طول نقطهٔ B برابر ۳ است. زیرا فاصلهٔ ۱ تا ۱− برابر با فاصلهٔ B تا ۱ است. از طرف دیگر عرض نقطهٔ A با c برابر است. پس عرض نقطهٔ A، برابر ۳− است. در نتیجه مساحت مثلث AOB برابر است با

$$\frac{1}{2}OA\times OB=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$$

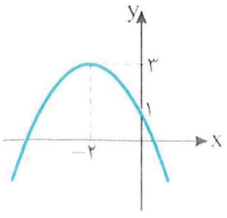
۱۷

نکته

معادلهٔ هر سهمی را می‌توان به شکل $y=a(x-h)^2+k$ نوشت، که در اینجا $a\neq 0$. رأس این سهمی نقطهٔ (h,k) است و خط $x=h$ محور تقارن این سهمی است.

تست ۱۰

معادلهٔ سهمی روبه‌رو کدام است؟



۱) $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$
۲) $y=(x+2)^2+3$
۳) $y=-(x+2)^2+3$
۴) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

راه‌حل با توجه به اینکه رأس سهمی نقطهٔ $(-2,3)$ است. می‌توان معادلهٔ آن را به‌صورت $y=a(x+2)^2+3$ نوشت. سهمی از نقطهٔ $(0,1)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند. بنابراین

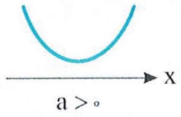
$$1=a(0+2)^2+3\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

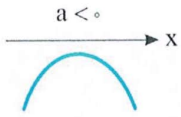
و معادلهٔ سهمی $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$ است.

نکته ۱۸

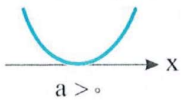
سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ نسبت به محور x می‌تواند سه وضع زیر را داشته باشد.

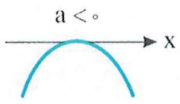
۱) اگر $b^۲-۴ac<۰$، سهمی پایین یا بالای محور x قرار دارد.



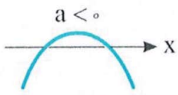


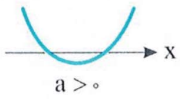
۲) اگر $b^۲-۴ac=۰$، سهمی بر محور x مماس است.





۳) اگر $b^۲-۴ac>۰$، سهمی محور x را در دو نقطه قطع می‌کند.





تست ۱۱

سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۴x+۲m$ محور x را در دو نقطه قطع می‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $m>۲$ ۲) $m<۲$ ۳) $m>-۲$ ۴) $m<-۲$

راه‌حل اگر $b^۲-۴ac>۰$، آن‌گاه سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ محور x را در دو نقطه قطع می‌کند. پس

$$۱۶-۸m>۰\Rightarrow m<۲$$

تست ۱۲

سهمی با کدام معادله محور طول‌ها را قطع نمی‌کند؟

۱) $y=x^۲-۳x-۱$ ۲) $y=-x^۲+۳x-۱$ ۳) $y=x^۲-۲x+۳$ ۴) $y=-x^۲+x+۲$

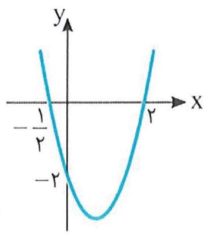
راه‌حل اگر سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ محور طول‌ها را قطع نکند، آن‌گاه $b^۲-۴ac<۰$. بنابراین سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۲x+۳$ محور طول‌ها را قطع نمی‌کند، زیرا $b^۲-۴ac=۴-۱۲=-۸<۰$.

نکته ۱۹

معادلهٔ هر سهمی که محور x را در دو نقطه به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع می‌کند به‌صورت $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ است و معادلهٔ هر سهمی که در نقطه‌ای به طول $x_۱$ بر محور x مماس است به‌صورت $y=a(x-x_۱)^۲$ است.

تست ۱۳

مختصات رأس سهمی روبه‌رو کدام است؟



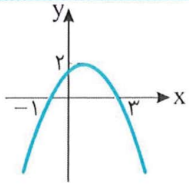
۱) $(\frac{۳}{۴},-۳)$ ۲) $(\frac{۲}{۳},-\frac{۲۵}{۶})$

۳) $(\frac{۳}{۴},-\frac{۲۵}{۸})$ ۴) $(\frac{۲}{۳},-\frac{۱۳}{۳})$

راه‌حل چون سهمی از نقاط $(-\frac{۱}{۲},۰)$ و $(۲,۰)$ گذشته است، پس معادلهٔ آن به شکل $y=a(x+\frac{۱}{۲})(x-۲)$ است. همچنین نقطهٔ $(۰,-۲)$ نقطه‌ای از سهمی است، پس مختصات آن در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، پس $-۲=a(۰+\frac{۱}{۲})(۰-۲)$. پس $a=۲$. بنابراین معادلهٔ سهمی $y=۲(x+\frac{۱}{۲})(x-۲)$، یعنی $y=۲x^۲-۳x-۲$ است و مختصات رأس آن $(\frac{۳}{۴},-\frac{۲۵}{۸})$ است.

تست ۱۴

سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ به‌صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) -۱ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

راه‌حل **راه‌حل اول** سهمی در دو نقطه به طول‌های -۱ و ۳ محور x را قطع کرده، پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=a(x+۱)(x-۳)=ax^۲-۲ax-۳a$ است.

عرض رأس سهمی برابر ۲ است، پس

$$\frac{۴(a)(-۳a)-(-۲a)^۲}{۴a}=\frac{-۱۲a^۲-۴a^۲}{۴a}=۲\Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

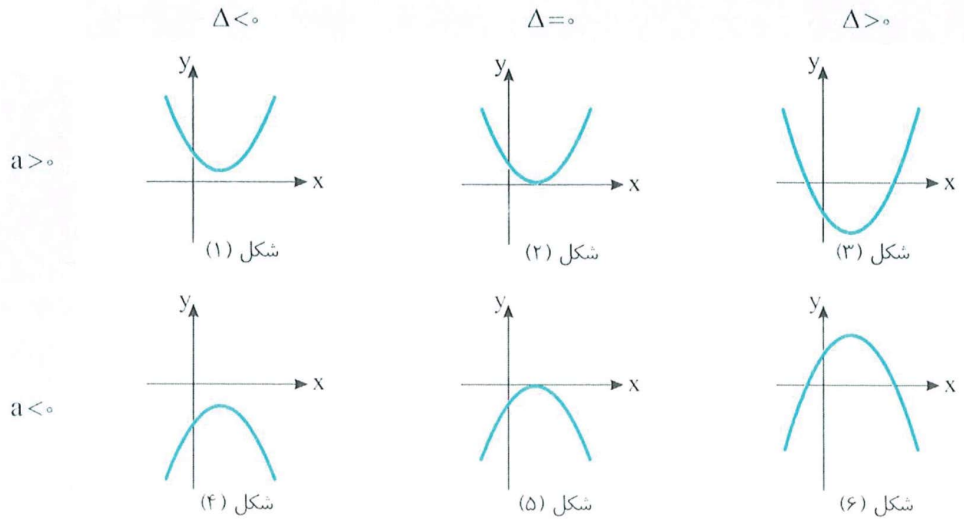
راه‌حل دوم وسط دو نقطهٔ $(۳,۰)$ و $(-۱,۰)$ نقطهٔ $(۱,۰)$ است، پس $x=۱$ محور تقارن این سهمی است. در نتیجه

$$y=a(x-۱)^۲+۲ \xrightarrow{\text{نقطهٔ } (۳,۰) \text{ روی سهمی}} ۰=a(۴)+۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

سهمی در صفحهٔ مختصات

با توجه به علامت a، b و c نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ که یک سهمی است می‌تواند از دو، سه یا چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات بگذرد.

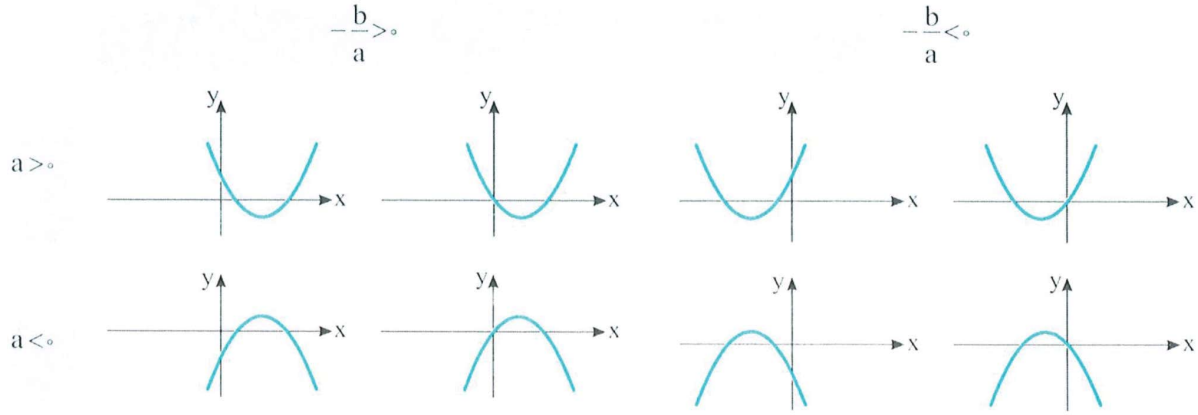
۱) اگر $a>0$، نمودار حتماً از ناحیه‌های اول و دوم می‌گذرد. اگر $a<0$، نمودار حتماً از ناحیه‌های سوم و چهارم می‌گذرد.



۲) اگر $\Delta\leq 0$، سهمی فقط از دو ناحیهٔ صفحهٔ مختصات می‌گذرد، و برعکس. به شکل‌های (۱)، (۲)، (۴) و (۵) در جدول بالا توجه کنید.

۳) اگر معادلهٔ $f(x)=0$ دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد $(\frac{c}{a}<0)$، سهمی از هر چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات می‌گذرد. به شکل‌های (۳) و (۶) در جدول بالا توجه کنید.

۴) اگر معادلهٔ $f(x)=0$ دو جواب هم‌علامت داشته باشد (یعنی $\Delta>0$، $\frac{c}{a}>0$)، یا اینکه یک جواب صفر و یک جواب مخالف صفر داشته باشد $(c=0)$، سهمی از سه ناحیهٔ صفحهٔ مختصات می‌گذرد.



تست ۱۵ سهمی به معادلهٔ $y=x^2-mx+m^2-4$ از چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور می‌کند. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل

شرط اینکه سهمی از چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور کند این است که در دو نقطه محور x را قطع کند که طول یکی مثبت و طول دیگری منفی باشد.

پس معادلهٔ $x^2-mx+m^2-4=0$ باید دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد. بنابراین $\frac{m^2-4}{1}<0\Rightarrow m^2<4\Rightarrow -2<m<2$

پس m می‌تواند مقادیر صحیح ± 1 و ۰ را داشته باشد.

تست ۱۶ نمودار تابع درجهٔ دوم $y=mx^2+x+m$ فقط در دو ناحیهٔ صفحهٔ مختصات قرار دارد. حدود m کدام است؟

۱) $|m|\geq\frac{1}{2}$ ۲) $|m|\leq\frac{1}{2}$ و $m\neq 0$ ۳) $|m|\geq 1$ ۴) $m\neq 0$ و $m^2<1$

راه‌حل توجه کنید که اگر $m=0$، آن‌گاه $y=x$ که تابع درجهٔ دوم نیست. اگر معادلهٔ $mx^2+x+m=0$ جواب نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد نمودار تابع $y=mx^2+x+m$ فقط در دو ناحیهٔ صفحهٔ مختصات قرار می‌گیرد. بنابراین

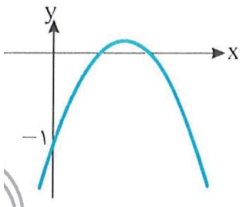
$$\Delta=1-4m^2\leq 0\Rightarrow m^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow|m|\geq\frac{1}{2}$$

تست ۱۷

سهمی به معادلهٔ $y=-2x^2+mx-1$ فقط از ناحیهٔ دوم صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $m>\sqrt{8}$ ۲) $m>0$ ۳) $-\sqrt{8}<m<\sqrt{8}$ ۴) $m<-\sqrt{8}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که ضریب x^2 منفی است و سهمی ماکزیمم دارد، پس از ناحیه‌های سوم و چهارم صفحهٔ مختصات عبور می‌کند. بنابراین سهمی باید از ناحیهٔ دوم عبور نکند ولی از ناحیهٔ اول عبور کند. با توجه به اینکه سهمی از نقطهٔ $(0,-1)$ عبور می‌کند، فقط حالتی که در شکل رسم شده است، ممکن است اتفاق بیفتد که در این صورت معادلهٔ $-2x^2+mx-1=0$ دو جواب مثبت دارد. یعنی $\Delta>0$، $S>0$ و $P>0$.



$$\Delta=m^2-8>0\Rightarrow m>\sqrt{8}\text{ یا }m<-\sqrt{8},\quad S=\frac{m}{2}>0\Rightarrow m>0,\quad P=\frac{1}{2}>0\Rightarrow m\in\mathbb{R}$$

بنابراین برای هر m عضو $(\sqrt{8},+\infty)$، سهمی شرایط گفته شده را دارد.

تست ۱۸

سهمی به معادلهٔ $y=mx^2+2mx+1$ از ناحیهٔ سوم صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $m>0$ ۲) $0<m\leq 1$ ۳) $m\leq 1$ ۴) $\frac{1}{2}<m\leq 1$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که اگر $m=0$، آن‌گاه معادلهٔ داده شده متعلق به یک سهمی نیست. اگر $m<0$، آن‌گاه سهمی ماکزیمم دارد و حتماً از ناحیهٔ سوم عبور می‌کند. پس

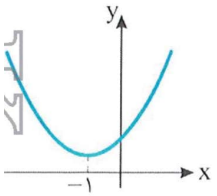
$$m>0\quad (1)$$

اکنون توجه کنید که رأس سهمی نقطهٔ $(-1,-m+1)$ است، پس در حالت‌های مقابل سهمی از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند.

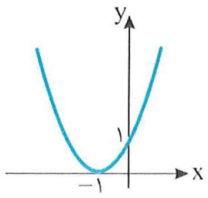
بنابراین کافی است $\Delta\leq 0$:

$$\Delta=4m^2-4m\leq 0\Rightarrow 4m(m-1)\leq 0\Rightarrow 0\leq m\leq 1\qquad (2)$$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $0<m\leq 1$.



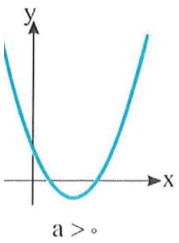
$\Delta<0$



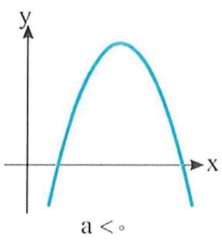
$\Delta=0, m\neq 0$

ماکزیمم و مینیمم تابع درجهٔ دوم

تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که نمودار این تابع سهمی است و رأس این سهمی نقطهٔ $(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ است $(\Delta=b^2-4ac)$. در ضمن، اگر $a>0$، دهانهٔ این سهمی رو به بالاست و اگر $a<0$، دهانهٔ این سهمی رو به پایین است. (شکل‌های روبه‌رو را ببینید). از روی این شکل‌ها، نکتهٔ زیر به‌دست می‌آید.



$a>0$



$a<0$

نکته

تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\Delta=b^2-4ac$.

الف) اگر $a>0$، کمترین مقدار این تابع به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آید و برابر با $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

ب) اگر $a<0$، بیشترین مقدار این تابع به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آید و برابر با $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

تست ۱۹ اگر بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲-(a^۳-a)x+۱-a$ به‌ازای $x=۴$ حاصل شود. این مقدار کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) -۴۶ ۳) ۳۲ ۴) -۱۶

راه‌حل بیشترین مقدار تابع f به‌ازای $x=-\frac{-(a^۳-a)}{۲a}$ حاصل می‌شود. پس

$$\frac{a^۳-a}{۲a}=۴\Rightarrow a^۲-۱=۸\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=\pm ۳$$

به‌ازای $a=۳$ تابع f کمترین مقدار و به‌ازای $a=-۳$ این تابع بیشترین مقدار را دارد. پس $a=-۳$ قابل قبول است و بیشترین مقدار تابع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x)=-۳x^۲+۲۴x+۴\Rightarrow \text{بیشترین مقدار تابع } f=f(۴)=-۳\times ۱۶+۲۴\times ۴+۴=۵۲$$

تست ۲۰ نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ از نقطه‌های $(۱,-۱)$، $(-۲,۱۱)$ و $(۳,۱)$ می‌گذرد. کمترین مقدار این تابع کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

راه‌حل توجه کنید که $f(۳)=۱\Rightarrow ۹a+۳b+c=۱$، $f(-۲)=۱۱\Rightarrow ۴a-۲b+c=۱۱$، $f(۱)=-۱\Rightarrow a+b+c=-۱$.

برای حل دستگاه سه معادله و سه مجهول به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a+b+c=-۱ \\ ۴a-۲b+c=۱۱ \\ ۹a+۳b+c=۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{را در } (-۱) \text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین معادلهٔ دوم}} \begin{cases} a+b+c=-۱ \\ -۴a+۲b-c=-۱۱ \\ ۹a+۳b+c=۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{معادلهٔ دوم + معادلهٔ سوم}]{\text{معادلهٔ اول + معادلهٔ دوم}} \begin{cases} -۳a+۳b=-۱۲ \\ ۵a+۵b=-۱۰ \end{cases}$$

در نتیجه به دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} -a+b=-۴ \\ a+b=-۲ \end{cases}$ می‌رسیم که جواب‌های آن $a=۱$ و $b=-۳$ است. اکنون اگر این مقادیر را در معادلهٔ $a+b+c=-۱$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید $c=۱$. بنابراین $f(x)=x^۲-۳x+۱$. کمترین مقدار این تابع برابر است با

$$-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(-۳)^۲-۴(۱)(۱)}{۴}=-\frac{۵}{۴}$$

تست ۲۱ به ازای چه مقداری از a مجموع مربع‌های جواب‌های معادلهٔ $x^۲-(a-۲)x-a-۱=۰$ کمترین مقدار ممکن است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\Delta=a^۲+۸>۰$. از طرف دیگر، $x_۱+x_۲=a-۲$ و $x_۱x_۲=-a-۱$. بنابراین

$$A=x_۱^۲+x_۲^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲=(a-۲)^۲-۲(-a-۱)=a^۲-۴a+۴+۲a+۲=a^۲-۲a+۶=(a-۱)^۲+۵$$

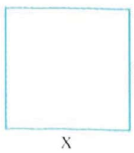
واضح است که کمترین مقدار ممکن برای A به ازای $a=۱$ به‌دست می‌آید و این مقدار برابر ۵ است.

تست ۲۲ ۱۰۰ متر حصار فلزی داریم. مساحت زمین مستطیل شکلی که می‌توانیم با این حصار آن را احاطه کنیم حداکثر چند متر مربع است؟

۱) ۵۴۵ ۲) ۶۱۵ ۳) ۶۲۵ ۴) ۷۱۵

راه‌حل فرض کنید طول زمین x و عرض آن y باشد. معلوم است که محیط زمین ۱۰۰ متر است. بنابراین

$$۲x+۲y=۱۰۰\Rightarrow x+y=۵۰\Rightarrow y=۵۰-x$$

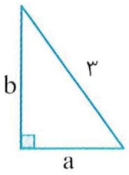


مساحت این زمین برابر است با $xy=x(۵۰-x)=۵۰x-x^۲$. بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $f(x)=۵۰x-x^۲$ به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۵۰}{۲(-۱)}=۲۵$ به‌دست می‌آید. در نتیجه $y=۵۰-x=۲۵$. بنابراین بیشترین مساحت زمین مورد نظر برابر است با $۲۵\times ۲۵=۶۲۵$.

تست ۲۳ بیشترین مساحت مربوط به مثلث‌های قائم‌الزاویه با وتری به طول ۳ واحد چقدر است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

راه‌حل اگر طول ضلع‌های قائمهٔ مثلث را a و b فرض کنیم، مساحت مثلث از رابطهٔ $S=\frac{ab}{۲}$ به‌دست می‌آید که بین a و b رابطهٔ $a^۲+b^۲=۹$ برقرار است، پس $b^۲=۹-a^۲$. ابتدا، بیشترین مقدار $S^۲$ را به‌دست می‌آوریم. برای این کار، $S^۲$ را برحسب یک متغیر می‌نویسیم:



$$S^۲=\frac{a^۲b^۲}{۴}=\frac{a^۲(۹-a^۲)}{۴}=\frac{-(a^۲)^۲+۹a^۲}{۴}=-\frac{۱}{۴}(a^۲)^۲+\frac{۹}{۴}a^۲$$

در نتیجه $S^۲$ به‌صورت یک عبارت درجهٔ دوم برحسب $a^۲$ است که بیشترین مقدار آن برابر است با $S^۲_{max}=\frac{-(\frac{۹}{۴})^۲}{۴\times(-\frac{۱}{۴})}=\frac{۸۱}{۱۶}$.

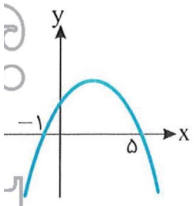
در نتیجه $S_{max}=\frac{۹}{۴}$.

دست‌گرمی

۱۳- نقطهٔ $A(۱,-۱)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+۲x+b$ است. مقدار ab کدام است؟

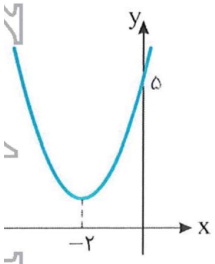
۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۴- معادلهٔ محور تقارن سهمی مقابل کدام است؟



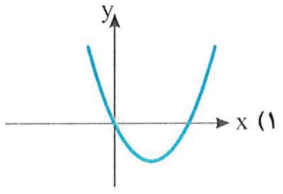
۱) $x=۲$
۲) $y=۲$
۳) $x=۳$
۴) $y=۳$

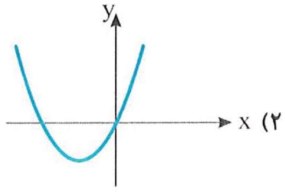
۱۵- شکل روبه‌رو سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+bx+c$ را نشان می‌دهد. حاصل $b-c$ کدام است؟

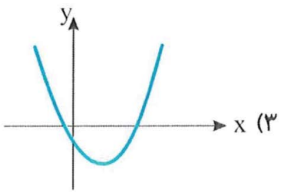


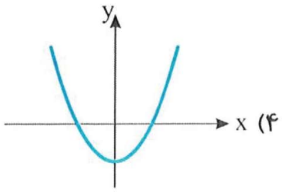
۱) -۱
۲) -۲
۳) ۱
۴) ۲

۱۶- اگر $b<c<۰<a$، سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟

۱) 

۲) 

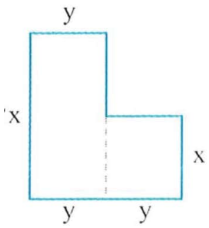
۳) 

۴) 

۱۷- نمودار تابع $y=x^۲+mx+۴-m^۲$ به ازای کدام مقدارهای m از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد؟

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۵}}<m\leq ۲$ ۲) $-۲\leq m\leq ۲$ ۳) $-\frac{۴}{\sqrt{۵}}\leq m\leq ۲$ ۴) $-۲\leq m<\frac{۴}{\sqrt{۵}}$

۱۸- با طنابی به طول ۴۰ متر زمینی به شکل زیر را محصور کرده‌ایم. بیشترین مساحت محصور شدهٔ ممکن کدام است؟

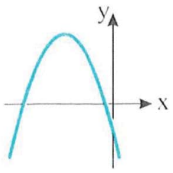


۱) ۵۰
۲) ۷۵
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۵

آزمون ۵ — سهمی و تابع درجهٔ دوم (۱)

سؤال	گام
۴۱	۱۴
۴۲	۱۴
۴۳	۱۴
۴۴	۱۴ ۱۶ ۲۹۶
۴۵	۱۹
۴۶	۲۰
۴۷	۲۰
۴۸	۲۱
۴۹	۲۱ ۲۵
۵۰	۲۱ ۲۵

۴۱- معادلهٔ سهمی مقابل به کدام صورت می‌تواند باشد؟



۱) $y=x^۲+۳x-۱$
۲) $y=۲x^۲+۵x-۲$
۳) $y=-x^۲+۴x-۲$
۴) $y=-x^۲-۴x-۱$

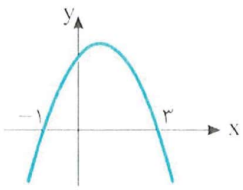
۴۲- رأس سهمی به معادلهٔ $y=kx^۲-۲x+۲$ روی خط $y=-۲x$ است. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۳- اگر محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=mx^۲+۲m^۲x+۳m$ خط $x=۲$ باشد، عرض رأس این سهمی چقدر است؟

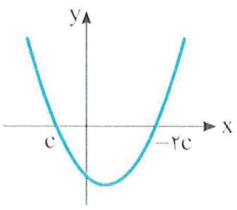
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۴- معادلهٔ سهمی مقابل به‌صورت $y=ax^۲-bx+c$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۵- نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $ac+b$ کدام است؟



۱) -۱
۲) -۲
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۴}$

۴۶- به‌ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=mx^۲+۳x+m-۲$ محور x را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟

۱) $۰<m<۲$
۲) $۱<m<۲$
۳) $-۱<m<۱$
۴) $۰<m<۱$

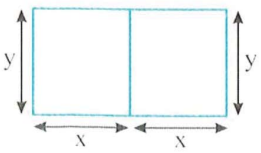
۴۷- نمودار تابع $f(x)=(m-۱)x^۲+x+m-۱$ از ناحیه‌های اول و دوم صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $m<۱$
۲) $m\leq\frac{۱}{۲}$
۳) $m\geq\frac{۳}{۲}$
۴) $۰<m\leq\frac{۱}{۲}$

۴۸- اگر کمترین مقدار تابع $f(x)=x^۲-۶x+۲m$ برابر با ۵ باشد، مقدار m کدام است؟

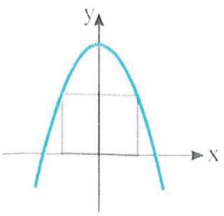
۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۷

۴۹- مطابق شکل با ۲۰۰m نردهٔ چوبی، اصطبلی درست کرده‌ایم. حداکثر مقدار مساحت این اصطبل کدام است؟



۱) ۵۰۰۰
۲) ۱۰۰۰۰
۳) $\frac{۵۰۰۰}{۳}$
۴) $\frac{۱۰۰۰۰}{۳}$

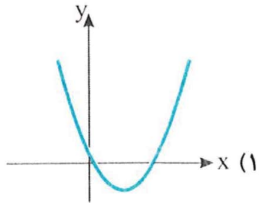
۵۰- در شکل مقابل دو رأس مستطیل روی محور x و دو رأس دیگر روی سهمی $y=۴-x^۲$ است. بیشترین مقدار محیط مستطیل کدام است؟

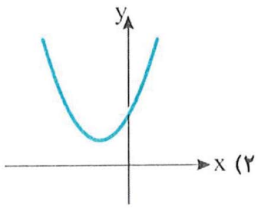


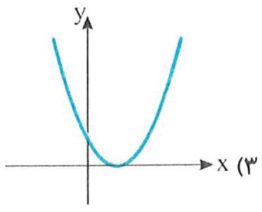
۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) $۶\sqrt{۳}$

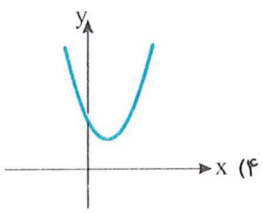
آزمون ۶ — سهمی و تابع درجهٔ دوم (۲)

-۵۱ سهمی به معادلهٔ $y=۳x^۲-۲x+۱$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

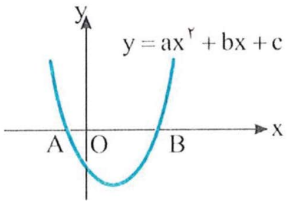
-۵۲ اگر هر یک از سهمی‌های به معادله‌های $y=ax^۲-۲ax+۲$ و $y=bx^۲+۲bx+۱$ از رأس سهمی دیگر عبور کند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) $-\frac{۱}{۵}$

-۵۳ اگر خط $x=\frac{۱}{۲}$ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=(۳m-۴)x^۲+(m-۲)x+m^۲$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

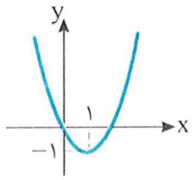
-۵۴ در شکل مقابل، اگر $OA<OB$، کدام گزینه حتماً درست است؟



۱) $a-\frac{b}{c}<۰$ ۲) $\frac{a}{c}-bc>۰$

۳) $ac-b<۰$ ۴) $bc>۰$

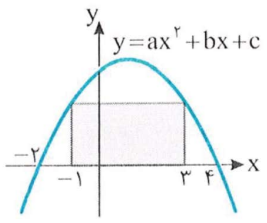
-۵۵ نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار b کدام است؟



۱) ۲ ۲) -۲

۳) ۴ ۴) -۴

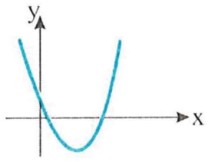
-۵۶ در شکل روبه‌رو، مساحت مستطیل رنگی برابر ۸ است. مقدار c کدام است؟



۱) $\frac{۱۶}{۵}$ ۲) ۳

۳) $\frac{۱۷}{۵}$ ۴) ۶

-۵۷ اگر نمودار تابع $f(x)=(m+۲)x^۲-۲(m+۱)x+m$ به‌صورت زیر باشد، حدود m کدام است؟



۱) $(\frac{۱}{۵},+\infty)$ ۲) $(-\infty,۲)\cup(۳,+\infty)$

۳) $(۰,۲)$ ۴) $(۰,+\infty)$

-۵۸ اگر نمودار تابع $f(x)=-x^۲+mx+۲m$ از ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات عبور کند، حدود m کدام است؟

۱) $m>۰$ ۲) $۰<m<۸$ ۳) $m<-۸$ یا $m>۰$ ۴) $-۸<m<۰$

-۵۹ در معادلهٔ درجه دوم $x^۲+(k-۲)x-k=۰$ حاصل‌جمع جواب‌ها دو برابر حاصل‌ضرب جواب‌هاست. اگر $f(x)=kx^۲-۴x+۱$ کدام گزینه درست است؟

۱) بیشترین مقدار f برابر ۳ است.

۲) کمترین مقدار f برابر ۳ است

۳) بیشترین مقدار f برابر -۱ است.

۴) کمترین مقدار f برابر -۱ است.

-۶۰ بیشترین مساحت ممکن برای مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع اندازه‌های دو ضلع قائمهٔ آن‌ها برابر ۸ است، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

سؤال	گا
۵۱	۱۴
۵۲	۱۴
۵۳	۱۴
۵۴	۱۵
۵۵	۱۴
۵۶	۱۹
۵۷	۲۰
۵۸	۲۰ ۱۸
۵۹	۲۱
۶۰	۲۱ ۲۵

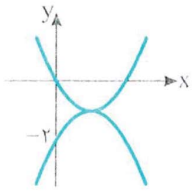
آزمون ۷ سهمی و تابع درجهٔ دوم (۳)

سؤال	گام
۶۱	۱۴ ۲۰
۶۲	۱۴
۶۳	۱۴
۶۴	۱۵
۶۵	۱۴
۶۶	۱۸ ۲۰
۶۷	۲۰ ۳۱۸
۶۸	۲۱ ۲۵
۶۹	۲۱ ۲۹۷
۷۰	۲۱ ۲۵

۶۱- سهمی به معادلهٔ $y=-x^2+4x-1$ از کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۶۲- رأس سهمی‌های به معادله‌های $y=x^2-2x$ و $y=ax^2+bx+c$ مطابق شکل بر هم منطبق است. مقدار abc کدام است؟



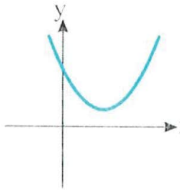
۱) ۴ ۲) ۶

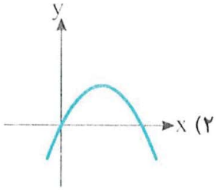
۳) -6 ۴) -4

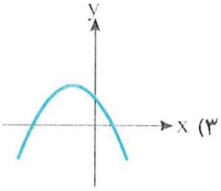
۶۳- محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=x^2-4x+1$ بر محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=ax^2-a^3x$ منطبق است. مقدار a کدام است؟

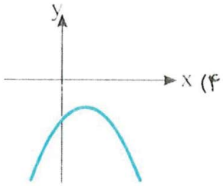
۱) ±1 ۲) ±2 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) $\pm2\sqrt{2}$

۶۴- اگر $\frac{b^2}{4a}>c$، کدام گزینه می‌تواند سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ باشد؟

۱) 

۲) 

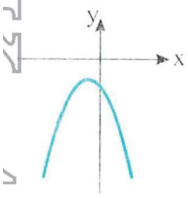
۳) 

۴) 

۶۵- سهمی‌ای که از نقاط $(0,-1)$، $(4,1)$ و $(9,2)$ می‌گذرد، از کدام نقطهٔ دیگر عبور می‌کند؟

۱) $(3,-3)$ ۲) $(-3,3)$ ۳) $(2,0)$ ۴) $(-2,1)$

۶۶- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=(m+1)x^2+(m+1)x-4$ به شکل مقابل است؟



۱) $m\in(-17,-1)$

۲) $m\in(-15,-2)$

۳) $m\in(-18,-1)$

۴) $m\in(-18,-1)$

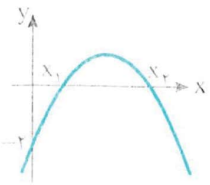
۶۷- نمودار تابع $f(x)=x^2+mx-m$ فقط از ناحیهٔ سوم صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $(-\infty,0)$ ۲) $(-\infty,-4)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(4,+\infty)$

۶۸- در مستطیل‌هایی با محیط ۲۴، طول کوتاه‌ترین قطر کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{3}$

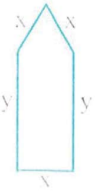
۶۹- در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=-x^2+bx+c$ رسم شده است. اگر $x_1^2+x_2^2-\frac{3}{2}x_1x_2=42$، بیشترین مقدار تابع f کدام است؟



۱) $\frac{49}{4}$ ۲) ۱۲

۳) $\frac{41}{4}$ ۴) $\frac{57}{4}$

۷۰- پنجره‌ای به شکل مقابل مفروض است. اگر محیط پنجره $4m$ باشد، مقدار x کدام باشد تا بیشترین مقدار نور به درون بتابد؟



۱) $\frac{8}{8-\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{4}{6-\sqrt{3}}$

۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

درس چهارم: دامنه و برد تابع و تساوی توابع

دامنهٔ برخی توابع

وقتی می‌خواهیم یک تابع را معرفی کنیم باید دامنهٔ آن را نیز مشخص کنیم. مثلاً دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-2$ می‌تواند $\mathbb{R}$ یا $[1,2]$ یا $\{0,1,2,3\}$ یا هر مجموعهٔ دلخواه دیگری باشد. ولی اگر دامنهٔ تابع f را معین نکردیم و فقط ضابطهٔ آن را نوشتیم، قرارداد می‌کنیم که دامنهٔ f را مجموعهٔ تمام مقادیری از x در نظر بگیریم که $f(x)$ به‌ازای آن‌ها بامعنی است.

مثال: اگر ضابطهٔ تابع‌های f و g را به‌صورت $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ معرفی کنیم، دامنهٔ تابع f را مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ در نظر می‌گیریم، زیرا عبارت $\frac{1}{x}$ فقط به‌ازای $x=0$ بامعنی نیست. همچنین دامنهٔ تابع g را مجموعهٔ $[0,+\infty)$ در نظر می‌گیریم، زیرا عبارت $\sqrt{x}$ فقط به‌ازای مقادیری از x که منفی باشند بامعنی نیست.

نکته

- دامنهٔ تابع‌های چندجمله‌ای، قدرمطلق و جزءصحیح مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است.
- اگر f و g دو تابع باشند، دامنهٔ تابع h با ضابطهٔ $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ برابر است با $D_h=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$.
- اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ برابر با D_f است.
- اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ برابر است با $D_g=\{x|x\in D_f, f(x)\geq 0\}$.

بنابر نکتهٔ بالا برای به‌دست آوردن دامنهٔ توابع کسری، باید مقادیری از x را که مخرج کسر را صفر می‌کنند پیدا کنیم و مجموعهٔ این مقادیر را از اشتراک دامنه‌های توابع صورت کسر و مخرج کسر کم کنیم.

برای به‌دست آوردن دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج باید مقادیری از x را پیدا کنیم که به ازای آن‌ها مقدار تابع زیر رادیکال نامنفی باشد و مجموعهٔ این مقادیر را با دامنهٔ تابع زیر رادیکال اشتراک بگیریم.

تست ۱ چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+2}{2x^3-5x^2+2x}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم $2x^3-5x^2+2x=0\Rightarrow x(2x^2-5x+2)=0\Rightarrow x(2x-1)(x-2)=0\Rightarrow x=0,\ x=\frac{1}{2},\ x=2$

پس دو عدد صحیح $x=0$ و $x=2$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

تست ۲ چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اولاً باید $x\neq 0$، ثانیاً باید $x-\frac{1}{x}\neq 0$. یعنی $\frac{x^2-1}{x}\neq 0\Rightarrow x^2-1\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$

بنابراین $x=0$، $x=1$ و $x=-1$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

تست ۳ دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x^2-(a^2+1)x-b^2}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{-1,6\}$ است. مقدار a^2+b^2 کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

راه‌حل **راه‌حل اول** دو عدد ۶ و -1 در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس $x=6$ و $x=-1$ ریشه‌های مخرج ضابطهٔ تابع هستند

$$x=6\Rightarrow 36-6(a^2+1)-b^2=0\Rightarrow b^2=30-6a^2 \quad , \quad x=-1\Rightarrow 1+(a^2+1)-b^2=0\Rightarrow b^2=a^2+2$$

بنابراین $30-6a^2=a^2+2\Rightarrow a^2=4 \xrightarrow{b^2=a^2+2} b^2=6$

در نتیجه $a^2+b^2=10$.

راه‌حل دوم معادلهٔ درجهٔ دومی را که -1 و ۶ جواب‌های آن باشد می‌نویسیم و برابر عبارت مخرج قرار می‌دهیم

$$(x-6)(x+1)=x^2-5x-6=x^2-(a^2+1)x-b^2$$

پس $a^2+1=5\Rightarrow a^2=4 \ , \ b^2=6\Rightarrow a^2+b^2=10$

تست ۴ دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x}{3x^2+6x+m}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است. حدود m کدام است؟

۱) $m>3$ ۲) $m<3$ ۳) $m>-3$ ۴) $m<-3$

راه‌حل برای اینکه دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ باشد، مخرج $f(x)$ نباید ریشه داشته باشد. پس $\Delta=36-4\times 3m<0\Rightarrow 12m>36\Rightarrow m>3$

تست ۵ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{4x-x^2-3}$ بازهٔ $[a\,.\,b]$ است. مقدار $2a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل باید نامعادلهٔ $4x-x^2-3\geq 0$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت روبه‌رو جواب نامعادله $1\leq x\leq 3$ است. پس $D_f=[1\,.\,3]$ و در نتیجه $a=1$ ، $b=3$ و $2a+b=5$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2+4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

تست ۶ چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{|x-1|-3}$ قرار ندارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل باید نامعادلهٔ $|x-1|-3\geq 0$ را حل کنیم:

$$|x-1|\geq 3\Rightarrow x-1\geq 3\Rightarrow x\geq 4 \quad \text{یا} \quad x-1\leq -3\Rightarrow x\leq -2$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=(-\infty\,.\,-2]\cup[4\,.\,+\infty)$ است و اعداد صحیح -1 ، 0 ، 1 ، 2 و 3 در آن قرار ندارند.

تست ۷ چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{|x+1|-2}$ وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

راه‌حل باید عبارت $\sqrt{16-x^2}$ بامعنی باشد و مخرج کسر صفر نشود. در نتیجه $D_f=\{x\,|\,16-x^2\geq 0\,.\,|x+1|\neq 2\}$. مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $16-x^2\geq 0$ به شکل $[-4\,.\,4]$ است و جواب‌های معادلهٔ $|x+1|=2$ به‌صورت $x=1$ و $x=-3$ هستند. در نتیجه $D_f=[-4\,.\,4]-\{-3\,.\,1\}$. بنابراین تنها هفت عدد صحیح در دامنهٔ تابع وجود دارد.

تست ۸ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2+m}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، کمترین مقدار ممکن m کدام است؟

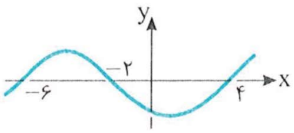
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\{x\,|\,x^2+2x+2+m\geq 0\}$. برای اینکه همواره $x^2+2x+2+m\geq 0$ باشد، باید $\Delta\leq 0$.

$$\Delta=2^2-4(2+m)\leq 0\Rightarrow 4-8-4m\leq 0\Rightarrow m\geq -1$$

بنابراین کمترین مقدار ممکن m برابر -1 است.

تست ۹ نمودار تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در شکل مقابل رسم شده است. چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{(-x-۴)f(x)}}$ قرار دارند؟



۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

راه‌حل توجه کنید که $D_g=\{x|(-x-۴)f(x)>۰\}=\{x|(x+۴)f(x)<۰\}$ در جدول تعیین علامت زیر، عبارت $(x+۴)f(x)$ تعیین علامت شده است.

x	$-\infty$		-۶		-۴		-۲		۴		$+\infty$
f		−	۰	+		+	۰	−	۰	+	
x+۴		−		−	۰	+		+		+	
$(x+۴)f(x)$		+	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	

در نتیجه مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت $(-۲,۴)\cup(-۶,-۴)$ است. بنابراین عددهای صحیح ۵−، ۱−، ۰، ۱، ۲ و ۳ در دامنهٔ تابع هستند.

برد برخی توابع

برد برخی توابع را می‌توان به روش بیان شده در نکتهٔ زیر به‌دست آورد.

نکته ۲۳

- **دامنه و برد در تابع خطی**

در تابع خطی $f(x)=ax+b$ اگر دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، برد آن هم برابر $\mathbb{R}$ است و اگر دامنهٔ تابع بازهٔ $[m,n]$ باشد، در این صورت اگر $a>۰$، برد تابع بازهٔ $[f(m),f(n)]$ است و اگر $a<۰$ و برد تابع بازهٔ $[f(n),f(m)]$ است.

- برد تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ به‌صورت زیر است:

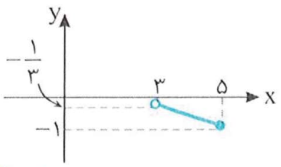
$$a>۰\Rightarrow R_f=[\frac{۴ac-b^۲}{۴a},+\infty),\quad a<۰\Rightarrow R_f=(-\infty,\frac{۴ac-b^۲}{۴a}]$$

- برد برخی تابع‌ها را می‌توان به کمک خواص نابرابری‌ها یا نمودار آن‌ها پیدا کرد.

تست ۱۰ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲-x}{۳}$ بازهٔ $(۳,۵]$ باشد، برد این تابع کدام است؟

۱) $[-۱,۱)$ ۲) $[-۱,-\frac{۱}{۳})$ ۳) $(\frac{۱}{۳},۱]$ ۴) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}]$

راه‌حل **راه‌حل اول** $f(x)=-\frac{x}{۳}+\frac{۲}{۳}$ یک تابع خطی است که در آن ضریب x منفی است، پس برد تابع با توجه به دامنهٔ آن $[f(۵),f(۳))$ است که برابر $(-\frac{۱}{۳},-۱]$ می‌شود.



راه‌حل دوم اگر $x\in(۳,۵]$، آن‌گاه $۳<x\le۵\Rightarrow-۵\le-x<-۳\Rightarrow۲-۵\le۲-x<۲-۳\Rightarrow-۱\le\frac{۲-x}{۳}<-\frac{۱}{۳}$

بنابراین برد تابع f بازهٔ $(-\frac{۱}{۳},-۱]$ است. از روی نمودار تابع f هم واضح است که برد آن بازهٔ $(-\frac{۱}{۳},-۱]$ است.

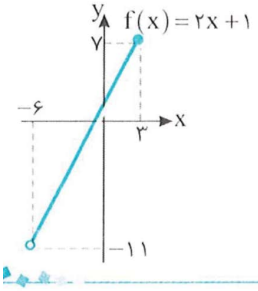
تست ۱۱ اگر $f(x)=۲x+۱$ و برد تابع f بازهٔ $(-۱۱,۷]$ باشد، مجموع عددهای صحیح واقع در دامنهٔ f چقدر است؟

۱) ۵− ۲) ۷− ۳) ۹− ۴) ۱۵−

راه‌حل چون برد تابع f بازهٔ $(-۱۱,۷]$ است. پس $-۱۱<f(x)\le۷$، یعنی

$$-۱۱<۲x+۱\le۷\Rightarrow-۱۲<۲x\le۶\Rightarrow-۶<x\le۳$$

بنابراین عددهای صحیح ۵−، ۴−، ۳−، ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲ و ۳ در دامنهٔ تابع f هستند، که مجموعشان برابر است با ۹−. از روی نمودار تابع f هم واضح است که دامنهٔ تابع بازهٔ $(-۶,۳]$ است.



تست ۱۲ اگر حداکثر دو عدد طبیعی در برد تابع $f(x)=-x^۲-۳x+۲m$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m<\frac{۱}{۸}$ ۲) $m<\frac{۳}{۸}$ ۳) $m>\frac{۱}{۸}$ ۴) $m>\frac{۳}{۸}$

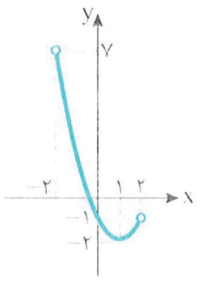
راه‌حل ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=(-\infty,\frac{۸m+۹}{۴}]$. بنابراین چون حداکثر دو عدد طبیعی در برد تابع f است، پس این دو عدد باید ۱ و ۲ باشند.

در نتیجه $\frac{۸m+۹}{۴}<۳$، بنابراین $m<\frac{۳}{۸}$.

تست ۱۳ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x-۱$ و دامنهٔ $(-۲,۲)$ مفروض است. چند عدد صحیح در برد این تابع وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

راه‌حل **راه‌حل اول** نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است که بخشی از یک سهمی است. برد این تابع بازهٔ $[-۲,۷)$ است که نُه عدد صحیح در آن وجود دارد.



راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۲x-۱=(x-۱)^۲-۲$$

از طرف دیگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $(-۲,۲)$ است، پس اگر $-۲<x<۲$، آن‌گاه

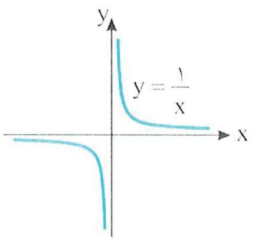
$$-۳<x-۱<۱\Rightarrow ۰\le(x-۱)^۲<۹\Rightarrow -۲\le(x-۱)^۲-۲<۷\Rightarrow -۲\le f(x)<۷$$

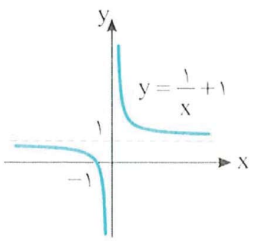
پس برد تابع f بازهٔ $[-۲,۷)$ است که نُه عدد صحیح در آن قرار دارد.

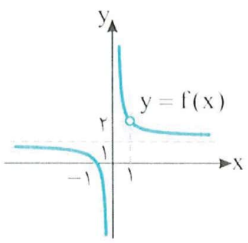
تست ۱۴ در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+۱}{x}$ و دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ مجموع اعدادی که در برد تابع قرار ندارند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}+۱=\frac{x+۱}{x}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار تابع f با دامنهٔ داده شده به‌صورت زیر است و برد این تابع $\mathbb{R}-\{۱,۲\}$ است و در نتیجه مجموع اعدادی که در برد تابع f قرار ندارند، برابر ۳ است.



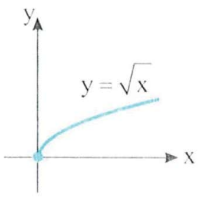


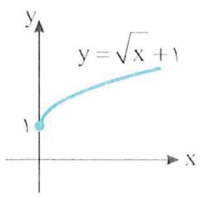


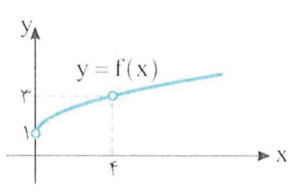
تست ۱۵ اگر $f(x)=\sqrt{x}+۱$ و $D_f=(۰,+\infty)-\{۴\}$، چند عدد طبیعی در برد تابع f وجود ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x}+۱$ به‌دست می‌آید. نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}+۱$ با دامنهٔ داده شده به‌صورت زیر است. واضح است که $R_f=(۱,+\infty)-\{۳\}$، بنابراین دو عدد طبیعی ۱ و ۳ در برد تابع f قرار ندارند.







تعریف

دو تابع f و g را برابر (مساوی) می‌نامیم، به شرطی که

۱) $D_f = D_g$ ۲) به ازای هر x از دامنهٔ دو تابع $f(x)=g(x)$.

تذکر اگر دو تابع f و g برابر باشند، آن‌گاه برد آن‌ها هم برابر است. ولی اگر دامنه و برد دو تابع f و g برابر باشند، این دو تابع لزوماً برابر نیستند. مثلاً دو تابع $g=\{(1,4),(3,2)\}$ و $f=\{(1,2),(3,4)\}$ برابر نیستند، در حالی که $D_f=D_g$ و $R_f=R_g$.

تست ۱۶ اگر تابع‌های $f=\{(1,a),(2,2a+b),(c,3)\}$ و $g=\{(1,4),(2,5),(4,3)\}$ مساوی باشند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:

$$(1,a)=(1,4)\Rightarrow a=4\ ,\quad (2,2a+b)=(2,5)\Rightarrow 2a+b=5\xrightarrow{a=4}8+b=5\Rightarrow b=-3\ ,\quad (c,3)=(4,3)\Rightarrow c=4$$

بنابراین $a+b+c=5$.

تست ۱۷ کدام دو تابع برابرند؟

۱) $f(x)=\frac{x^2}{x}$ و $g(x)=x$ ۲) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ و $g(x)=x+1$

۳) $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$ و $g(x)=x$ ۴) $f(x)=\frac{x^3-4x}{x-2}$ و $g(x)=x^2+2x$

راه‌حل تابع‌های $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}$ و $g(x)=x$ برابرند، زیرا $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x=g(x)$. در بقیهٔ گزینه‌ها دامنهٔ دو تابع داده شده، برابر نیستند.

گزینهٔ (۱) $D_f=\mathbb{R}-\{0\}, D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ (۲) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}, D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

گزینهٔ (۴) $D_f=\mathbb{R}-\{2\}, D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\neq D_g$

تست ۱۸ کدام دو تابع برابرند؟

۱) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-2}$ ۲) $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{4-x}$

۳) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+2}$ ۴) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ و $g(x)=x-2$

راه‌حل تابع‌های $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{4-x}$ برابرند. زیرا

$$D_f=D_g=[0,4],\quad f(x)=\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{x(4-x)}=\sqrt{x}\sqrt{4-x}=g(x)$$

در گزینهٔ (۱) تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-2}$ دامنهٔ یکسان ندارند زیرا $D_f=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ و $D_g=[2,+\infty)$، پس برابر نیستند. همین‌طور در گزینهٔ (۳) تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+2}$، نیز دامنهٔ یکسان ندارند، چون $D_f=(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$ و $D_g=[0,+\infty)$. در گزینهٔ (۴) تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ و $g(x)=x-2$ با وجود داشتن دامنه‌های برابر، ضابطهٔ برابر ندارد. زیرا

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|\neq g(x)$$

تست ۱۹ اگر دو تابع $f(x)=\frac{۷}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{ax+b}{x^۲+cx+d}$ با هم مساوی باشند. مقدار $|ad-bc|$ کدام است؟

۱) ۷۵ ۲) ۶۳ ۳) ۵۱ ۴) ۶۵

راه‌حل برای اینکه دو تابع برابر باشند باید ضابطهٔ تابع g به‌صورت $g(x)=\frac{a(x-۳)}{(x-۳)^۲}$ باشد، که دامنهٔ دو تابع برابر $\mathbb{R}-\{۳\}$ شود. بنابراین

$$g(x)=\frac{ax+b}{(x-۳)^۲}=\frac{۷}{x-۳}\Rightarrow ax+b=۷(x-۳)=۷x-۲۱ \quad , \quad x^۲+cx+d=(x-۳)^۲\Rightarrow x^۲+cx+d=x^۲-۶x+۹\Rightarrow c=-۶\,,\,d=۹$$

پس $a=۷$ و $b=-۲۱$. در نتیجه

$$ad-bc=۶۳-۱۲۶=-۶۳\Rightarrow |ad-bc|=۶۳$$

تست ۲۰ تابع $f(x)=[x+۴]+|x+۳|$ با دامنهٔ $[-۵,-۴)$ با کدام تابع مساوی است؟

۱) $y=-x-۵$ ۲) $y=-x-۴$ ۳) $y=x-۴$ ۴) $y=x-۵$

راه‌حل **راه‌حل اول** اگر $x\in[-۵,-۴)$، آن‌گاه $x+۳\in[-۲,-۱)\Rightarrow x+۳<۰$

بنابراین $|x+۳|=-x-۳$. همچنین $x+۴\in[-۱,۰)\Rightarrow[x+۴]=-۱$

در نتیجه $f(x)=-۱+(-x-۳)=-x-۴$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(-۵)=۱$: فقط در تابع گزینهٔ (۲) مقدار تابع به‌ازای $x=-۵$ برابر ۱ است.

دست‌گرمی

۱۹- مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x^۲-۳x+۱}$ قرار ندارند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x^۲+kx+۱}$ به ازای کدام مقدار k برابر $\mathbb{R}$ است؟

۱) $k=۱۰$ ۲) $k=۵$ ۳) $k=-۳$ ۴) $k=\frac{۱}{۲}$

۲۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{\sqrt{x^۲-۱}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۲- برد تابع $f(x)=۳-۲x$ با دامنهٔ $[-۴,۴]$ کدام است؟

۱) $[۰,۴]$ ۲) $[-۴,۴]$ ۳) $[-۵,۱۱]$ ۴) $[-۱۱,۵]$

۲۳- اگر $D_f=[-۴,۵]$ و $f(x)=x^۲+۲x-۲$، بزرگ‌ترین عضو برد تابع f کدام عدد است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۵ ۳) ۳۳ ۴) ۳۶

۲۴- کدام دو تابع برابرند؟

۱) $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=۱$ ۲) $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=x$

۳) $f(x)=\sqrt{x^۲-x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۱}$ ۴) $f(x)=\sqrt{x-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{۱-x}$

آزمون ۸ دامنه و برد تابع و تساوی توابع (۱)

۷۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{1-\frac{1}{x+1}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{-1\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0,-1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}$

۷۲- چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^4-3x^2+2}$ قرار ندارند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۷۳- مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{|x|+1}{2|x|-|x-1|}$ قرار ندارند، چقدر است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) -2 ۴) -1

۷۴- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x-|x|}{x^2+mx+4}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-4<m<4$ ۲) $-2<m<2$ ۳) $m>4$ ۴) $m<-4$

۷۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{9-x}{x+2}}$ بازهٔ $(a,b]$ است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) -11 ۳) ۷ ۴) -7

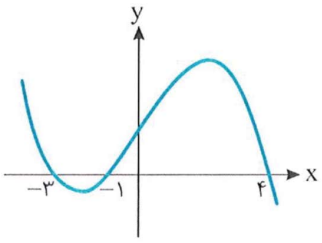
۷۶- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}$ قرار دارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۷- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2-m^2}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار ممکن m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-2)$ است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

۷۹- اگر تابع‌های $f=\{(1,2a),(2,2a+b),(a+c,3)\}$ و $g=\{(1,8),(2,5),(5,3)\}$ مساوی باشند، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰- کدام دو تابع برابرند؟

۱) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-3}$

۲) $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{6-x}$

۳) $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+3}$

۴) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$ و $g(x)=x-3$

سؤال
۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰

آزمون ۹ دامنه و برد تابع و تساوی توابع (۲)

سؤال	گام
۸۱	۲۲ ۳۰۶
۸۲	۲۲ ۳۰۲
۸۳	۲۲ ۳۰۶
۸۴	۲۲ ۲۹۴
۸۵	۲۲ ۳۲۶
۸۶	۲۲ ۳۱۹
۸۷	۲۲ ۲۹۴
۸۸	۲۲ ۳۱۴
۸۹	۱۰ ۲۴ ۲۸۳
۹۰	۲۲ ۲۴

۸۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1+\frac{1}{x-2}}{1-\frac{4}{x+1}}$ به‌صورت $\mathbb{R}-A$ است. حاصل‌ضرب عضوهای مجموعهٔ A کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۶ ۴) -6

۸۲- چند عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^3-2x^2-x+2}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۳- اگر $x=4$ در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+a}{x-\frac{a+1}{x-a}}$ نباشد، حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{m^2x^2+x+1}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است. حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $-\frac{1}{2}$

۸۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{|x|}{a|x|-bx+1}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{3}{16}$

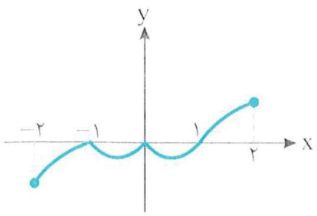
۸۶- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}-2}$ قرار دارند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۷- تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+2a^2}$ در تمام نقاط بازهٔ $[-3,2]$ تعریف می‌شود و در تمام نقاط مجموعهٔ $\mathbb{R}-[-3,2]$ تعریف نمی‌شود. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -4 ۳) -6 ۴) صفر

۸۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{x^2-x}}$ کدام است؟



۱) $(0,2]-\{1\}$

۲) $(-1,2]-\{1\}$

۳) $(0,2]\cup\{-1\}$

۴) $(0,1)\cup(1,2]\cup\{-1\}$

۸۹- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-mx+3}{3-x} & x\neq 3\\ n & x=3\end{cases}$ با یک تابع خطی برابر باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۰- تابع $f(x)=\frac{bx+2}{8x+b}$ با تابع $g(x)=c$ که $D_g=\mathbb{R}-\{a\}$ مساوی است. حاصل $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 4 ۴) ± 8

۹۱- اگر $x=2$ در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{x^3-(a+1)x+a}$ نباشد، دامنهٔ این تابع کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{1,2,-3\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1,2,-2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{1,2,3\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-1,2,-3\}$

۹۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{2x-1}}$ بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

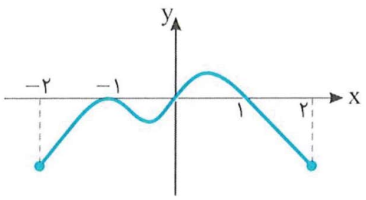
۹۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{16-x^2}{x}}+\sqrt{\frac{-x}{x+5}}$ بازهٔ $(a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -7 ۳) -9 ۴) -11

۹۴- تابع $f(x)=\sqrt{(a+2)x^2+ax+b}$ در بازهٔ $(-\infty,3]$ تعریف می‌شود و در بقیهٔ اعداد تعریف نمی‌شود. مقدار b کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) ۶ ۴) ۴

۹۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-x^3f(x)}$ چند عدد صحیح وجود دارد؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۹۶- برد تابع $f(x)=\begin{cases}2x-3 & x>2\\ x+2 & x<-2\end{cases}$ به‌صورت $\mathbb{R}-[a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۹۷- در تابع خطی f، دامنه و برد تابع به‌ترتیب بازه‌های $[1,2]$ و $[-2,1]$ هستند. مقدار $f(\frac{4}{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ یا صفر ۲) $-\frac{1}{2}$ یا -1 ۳) -1 یا صفر ۴) $\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$

۹۸- برد تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & 0\le x\le 2\\ x^2+2x & -2\le x\le 0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $[-1,0]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[-\frac{1}{2},0]$

۹۹- در تابع f، ضابطه $f(x)=-x^2-4ax+1$، دامنه $\mathbb{R}-\{4\}$ و برد $(-\infty,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۹

۱۰۰- اگر دو تابع $f(x)=x^3+x^2+x+a$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x-1} & x\neq 1\\ b & x=1\end{cases}$ با هم برابر باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

درس پنجم: مدل‌سازی با توابع

فرض کنید محیط مستطیل‌هایی برابر ۱۰ واحد است. معلوم است که مستطیل‌هایی با ابعاد مختلف می‌توانند محیط برابر ۱۰ داشته باشند. مثلاً مستطیل‌هایی با ابعاد روبه‌رو دارای محیط برابر ۱۰ هستند.

طول	۳	۴	۳/۵	
عرض	۲	۱	۱/۵	

واضح است که مساحت هر یک از مستطیل‌های بالا با مساحت دیگری فرق دارد. اگر بخواهیم مساحت این مستطیل‌ها را به عنوان تابعی از اندازهٔ طول آن‌ها بنویسیم. می‌توانیم اندازهٔ طول آن‌ها را برابر x و اندازهٔ عرض آن‌ها را برابر y فرض کنیم. اگر مساحت مستطیل‌ها برابر S باشد. می‌خواهیم S را برحسب x بیان کنیم. واضح است که $S=xy$. چون S به دو متغیر x و y وابسته است. به کمک رابطه‌ای که از اندازهٔ محیط مستطیل‌ها بین x و y وجود دارد. می‌توانیم y را برحسب x بنویسیم:

$$\text{محیط}=2(x+y)=10\Rightarrow x+y=5\Rightarrow y=5-x$$

اکنون می‌توانیم مساحت مستطیل را به‌صورت تابعی از طول آن (یعنی x) بیان کنیم:

$$S=xy=x(5-x)\Rightarrow S(x)=5x-x^2$$

معلوم است که در اینجا $0<x<5$. زیرا طول نمی‌تواند مقدار صفر یا منفی داشته باشد و مقدار آن باید کمتر از ۵ باشد. چون اگر طول برابر ۵ باشد. آن‌گاه عرض مستطیل باید برابر صفر باشد و اگر طول مستطیل بیشتر از ۵ باشد. باید عرض مستطیل منفی باشد که ممکن نیست. بنابراین تابع S با ضابطهٔ $S(x)=5x-x^2$ و دامنهٔ $(0,5)$ تابعی است که مساحت مستطیل‌هایی با محیط ۱۰ را برحسب اندازهٔ طول آن‌ها معین می‌کند.

نکته ۲۵

در برخی مسئله‌های کاربردی می‌توان برای مدل‌سازی از توابع استفاده کرد. در حل این‌گونه مسئله‌ها موارد زیر را در نظر می‌گیریم.

۱) کمیت‌های موجود در مسئله را با متغیرهای مناسب نشان می‌دهیم.

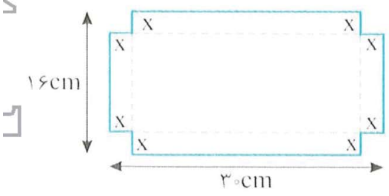
۲) با استفاده از دانسته‌هایمان از تعریف‌ها و قضیه‌های ریاضی رابطه‌ای بین متغیرها پیدا می‌کنیم. سپس با استفاده از شرط‌های داده شده در مسئله، سایر متغیرهای مسئله را برحسب متغیر مورد نظرمان می‌نویسیم.

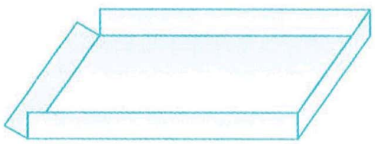
۳) کمیتی را که می‌خواهیم به‌صورت یک تابع بیان کنیم، برحسب متغیرهای مسئله می‌نویسیم و به کمک روابط به‌دست آمده در مرحلهٔ قبل آن را برحسب متغیر مورد نظرمان می‌نویسیم.

۴) دامنهٔ تابع به‌دست آمده در مرحلهٔ قبل را با توجه به محدودیت‌های داده شده در مسئله پیدا می‌کنیم.

مثال: مطابق شکل از یک صفحهٔ مقوایی 30×16 یک جعبهٔ بدون در ساخته‌ایم. حجم این جعبه را به‌صورت تابعی از اندازهٔ برش (x) به‌دست می‌آوریم و دامنهٔ آن را مشخص می‌کنیم.

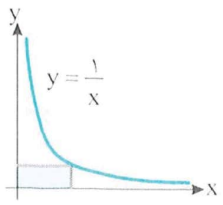
توجه کنید ابعاد جعبه برابر $30-2x$، $16-2x$ و x است. بنابراین حجم جعبه برابر است با $V(x)=x(16-2x)(30-2x)$.





چون x طول است. پس باید مثبت باشد. همچنین. باید کمتر از $8cm$ از دو طرف برش بزنیم. بنابراین $0<x<8$. در نتیجه دامنهٔ تابع $(0,8)$ است.

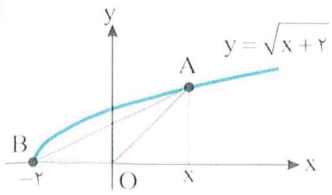
مثال: مطابق شکل مقابل. دو ضلع مستطیلی منطبق بر قسمت مثبت محورهای مختصات است و یک رأس آن روی نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ قرار دارد. ضابطهٔ توابعی را می‌نویسیم که محیط و مساحت این مستطیل را برحسب طول آن مشخص کند. برای این کار اگر طول مستطیل را x فرض کنیم. عرض آن $\frac{1}{x}$ خواهد بود. بنابراین محیط و مساحت مستطیل را می‌توانیم برحسب x بیان کنیم:



$$S(x)=x\times\frac{1}{x}=1 \quad , \quad P(x)=2(x+\frac{1}{x})$$

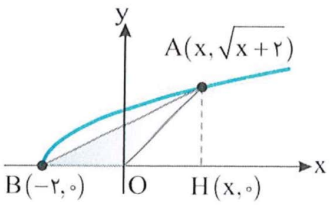
تست ۱

مطابق شکل زیر. از نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=\sqrt{x+2}$ به مبدأ مختصات و نقطهٔ $B(-2,0)$ پاره‌خط‌هایی رسم می‌کنیم. محیط مثلث OAB تابعی از x، طول نقطهٔ A، است. ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $P(x)=\sqrt{x^2+x+2}+2$ ۲) $P(x)=\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+5x+6}+2$

۳) $P(x)=\sqrt{x^2+5x+6}+4$ ۴) $P(x)=\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+5x+6}+4$



راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$A(x,\sqrt{x+2}),\quad B(-2,0),\quad O(0,0)$$

$$OA=\sqrt{x^2+(\sqrt{x+2})^2}=\sqrt{x^2+x+2},\quad OB=2$$

$$AB=\sqrt{(x+2)^2+(\sqrt{x+2})^2}=\sqrt{x^2+5x+6}$$

بنابراین

$$P(x)=OB+OA+AB=2+\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+5x+6}$$

تست ۲ طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۴ است. مساحت مثلث تابعی از x، طول یک ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن، است. ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$

۲) $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{4+x^2}$

۳) $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}$

۴) $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{16+x^2}$

راه‌حل طول ضلع دیگر مثلث با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برابر $\sqrt{16-x^2}$ است. پس $S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}$.

تست ۳ خطی راست که از نقطهٔ $(2,1)$ در صفحه گذشته است با محورهای مختصات مثلثی قائم‌الزاویه در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات تشکیل داده است. مساحت این مثلث S، به‌صورت تابعی از a، طول نقطهٔ برخورد این خط با محور x، کدام است؟

۱) $S(a)=\frac{a^2}{2(a-2)},\quad a\neq 2$

۲) $S(a)=\frac{a^2}{a-2},\quad a\neq 2$

۳) $S(a)=\frac{a^2}{2(a-2)},\quad a>2$

۴) $S(a)=\frac{a^2}{4(a-2)},\quad a>2$

راه‌حل فرض کنید خط مورد نظر محور x را در نقطهٔ $(a,0)$ و محور y را در نقطهٔ $(0,b)$ قطع کند. در این صورت این خط از نقطه‌های $(2,1)$، $(a,0)$ و $(0,b)$ می‌گذرد. بنابراین شیب آن از یک طرف برابر است با $\frac{1-0}{2-a}$، یعنی $\frac{1}{2-a}$. از طرف دیگر برابر است با $\frac{1-b}{2-0}$، یعنی $\frac{1-b}{2}$. چون این دو مقدار برابرند، پس $\frac{1}{2-a}=\frac{1-b}{2}$. اگر از این تساوی b را پیدا کنیم، به‌دست می‌آید $b=\frac{a}{a-2}$. به این ترتیب

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{1}{2}b\times a=\frac{a^2}{2(a-2)}\Rightarrow S(a)=\frac{a^2}{2(a-2)}$$

چون مساحت مثبت است، پس دامنهٔ این تابع $(2,+\infty)$ است.

دست‌گرمی

۲۵- اگر محیط یک دایره را با P و مساحت آن را با S نمایش دهیم، ضابطهٔ تابعی که محیط را برحسب مساحت نشان می‌دهد، کدام است؟

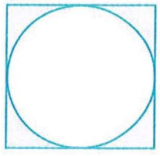
۱) $P(S)=2\sqrt{\pi S}$

۲) $P(S)=\sqrt{\pi S}$

۳) $P(S)=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

۴) $P(S)=\sqrt{\frac{2S}{\pi}}$

۲۶- در شکل روبه‌رو مساحت قسمت‌های رنگ شده به عنوان تابعی از محیط مربع (P) کدام است؟



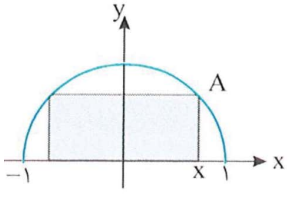
۱) $S(P)=(\frac{4-\pi}{64})P^2$

۲) $S(P)=(\frac{4-\pi}{16})P^2$

۳) $S(P)=(\frac{16-\pi}{64})P^2$

۴) $S(P)=(\frac{16-\pi}{16})P^2$

۲۷- در شکل مقابل مستطیلی در یک نیم‌دایره به شعاع ۱ واحد محاط شده است. محیط مستطیل تابعی از طول نقطهٔ A است. ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $S(x)=x+\sqrt{1-x^2}$

۲) $S(x)=2x\sqrt{1-x^2}$

۳) $S(x)=4x+2\sqrt{1-x^2}$

۴) $S(x)=4x+4\sqrt{1-x^2}$

آزمون ۱۱ مدل‌سازی با توابع

سؤال	گام
۱۰۱	۲۵
۱۰۲	۲۵
۱۰۳	۲۵
۱۰۴	۲۵
۱۰۵	۲۲ ۲۵
۱۰۶	۲۲ ۲۵
۱۰۷	۲۵
۱۰۸	۲۵
۱۰۹	۲۵ ۲۵۵
۱۱۰	۲۵

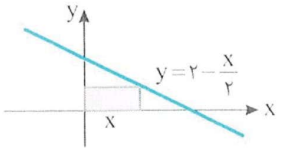
۱۰۱- طول مستطیلی ۲ واحد بیشتر از عرض آن است. کدام رابطه، محیط مستطیل را به‌صورت تابعی از طول آن (x) نشان می‌دهد؟

۱) $P(x)=۸x+۶$ ۲) $P(x)=۸x-۸$ ۳) $P(x)=۴x+۲$ ۴) $P(x)=۴x-۴$

۱۰۲- اگر P محیط و S مساحت یک دایره باشد، کدام تابع، مساحت دایره را به‌صورت تابعی از محیط آن نشان می‌دهد؟

۱) $S(P)=۴\pi P^۲$ ۲) $S(P)=\frac{۱}{۴}P^۲$ ۳) $S(P)=\frac{۱}{۱۲}P^۲$ ۴) $S(P)=\frac{۱}{۴\pi}P^۲$

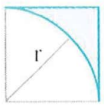
۱۰۳- کدام رابطه محیط مستطیل مقابل را به‌صورت تابعی از x بیان می‌کند؟



۱) $P(x)=x+۲$ ۲) $P(x)=x+۴$

۳) $P(x)=x-۲$ ۴) $P(x)=x-۴$

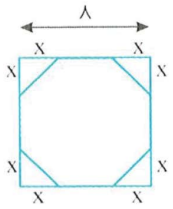
۱۰۴- مساحت قسمت رنگی در شکل مقابل (S) تابعی از شعاع ربع دایره است. ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $S(r)=(\frac{۱-\pi}{۴})r^۲$ ۲) $S(r)=(\frac{۴-\pi}{۴})r^۲$

۳) $S(r)=(\frac{۲-\pi}{۲})r^۲$ ۴) $S(r)=(\frac{۱-\pi}{۲})r^۲$

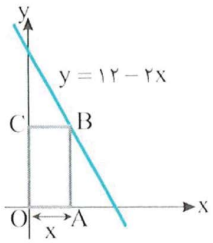
۱۰۵- در شکل روبه‌رو، چهار گوشهٔ قطعهٔ مربعی به طول $۸cm$ بریده شده است. دامنهٔ تابعی که مساحت هشت‌ضلعی به وجود آمده را برحسب x نشان می‌دهد، کدام است؟



۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[۰,۴]$

۳) $(۰,۴)$ ۴) $(۰,+\infty)$

۱۰۶- در شکل روبه‌رو اگر S، مساحت مستطیل $OABC$، به‌صورت تابعی از $OA=x$ باشد، دامنهٔ تابع S کدام است؟



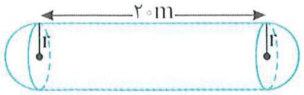
۱) $(۰,+\infty)$

۲) $(۰,۱۲)$

۳) $(۰,۸)$

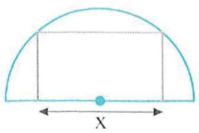
۴) $(۰,۶)$

۱۰۷- مطابق شکل یک مخزن از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع‌های r تشکیل شده است. حجم مخزن (V) یک تابع از r بوده و ضابطهٔ آن به‌صورت ..... است.



۱) $V(r)=۲۴\pi r^۲$ ۲) $V(r)=\frac{۲\pi}{۳}r^۳+۲۰\pi r^۲$ ۳) $V(r)=۲۲\pi r^۲$ ۴) $V(r)=\frac{۴\pi}{۳}r^۳+۲۰\pi r^۲$

۱۰۸- در شکل مقابل، شعاع نیم‌دایره برابر ۲ است. یک ضلع مستطیل روی قطر نیم‌دایره است و دو رأس مستطیل روی نیم‌دایره هستند. طول قطر مستطیل (d) را به‌صورت تابعی از x می‌نویسیم. ضابطهٔ این تابع کدام است؟



۱) $d(x)=\sqrt{۳x^۲-x+۴}$ ۲) $d(x)=\sqrt{\frac{۳}{۴}x^۲+۴}$ ۳) $d(x)=\sqrt{۳x^۲+۱۶}$ ۴) $d(x)=\sqrt{۳x^۲+۴}$

۱۰۹- خط راستی با شیب منفی که از نقطهٔ $(۲,۳)$ می‌گذرد، محور طول‌ها را در نقطهٔ $(x,۰)$ و محور عرض‌ها را در نقطهٔ $(۰,y)$ قطع می‌کند. ضابطهٔ تابعی که رابطهٔ x و y را نشان می‌دهد، کدام است؟

۱) $y=\frac{x}{x+۲}$ ۲) $y=\frac{-x}{x-۲}$ ۳) $y=\frac{۳x}{x-۲}$ ۴) $y=\frac{-۳x}{x+۲}$

۱۱۰- از نقطهٔ M روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ بر محور y عمود می‌کنیم. اگر A پای عمود باشد، P، محیط مثلث OAM، تابعی از x (طول نقطهٔ M) است. ضابطهٔ این تابع کدام است؟ (O مبدأ مختصات است)

۱) $P(x)=x+\sqrt{x^۲+۲x}$ ۲) $P(x)=x+\sqrt{x}$

۳) $P(x)=x\sqrt{x}$ ۴) $P(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt{x^۲+x}$

درس ششم: جبر توابع

تعریف

فرض کنید f و g دو تابع باشند. در این صورت

۱) **حاصل‌جمع** f و g را با $f+g$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنهٔ آن $D_f \cap D_g$ است و به ازای هر x از دامنهٔ این تابع،

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

۲) **تفاضل** f و g را با $f-g$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنهٔ آن $D_f \cap D_g$ است و به ازای هر x از دامنهٔ این تابع،

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

۳) **حاصل‌ضرب** f و g را با $f\times g$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنهٔ آن $D_f \cap D_g$ است و به ازای هر x از دامنهٔ این تابع،

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

۴) **تقسیم** f بر g را با $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنهٔ آن $D_f \cap D_g - \{x|g(x)=0\}$ است و به ازای هر x از دامنهٔ این تابع،

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال: فرض کنید $f=\{(2,4),(-1,6),(0,2),(3,1)\}$ و $g=\{(3,-2),(1,-1),(4,-7),(-1,2)\}$. در این صورت

۱) $(f+g)(3)=f(3)+g(3)=1+(-2)=-1$ ، ۲) $(f-g)(-1)=f(-1)-g(-1)=6-2=4$

۳) $(f\times g)(3)=f(3)\times g(3)=1\times(-2)=-2$ ، ۴) $(\frac{f}{g})(-1)=\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{6}{2}=3$

مثال: فرض کنید $f(x)=x-1$ و $g(x)=x^2$. در این صورت $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$، پس $D_f \cap D_g=\mathbb{R}$. به این ترتیب،

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x-1+x^2=x^2+x-1\,,\quad (f-g)(x)=f(x)-g(x)=x-1-x^2=-x^2+x-1$$
$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(x-1)x^2=x^3-x^2$$

همچنین، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $g(x)=0$، یعنی $x^2=0$، مجموعهٔ $\{0\}$ است، پس $D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x|g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{0\}$

و به ازای هر عضو از دامنهٔ $\frac{f}{g}$، $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-1}{x^2}$.

تست ۱ اگر $f=\{(1,4),(-3,7),(2,13)\}$ و $g=\{(-1,5),(2,-6),(-3,-11)\}$، تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $\{(-3,19),(2,18)\}$ ۲) $\{(2,19),(-3,18)\}$ ۳) $\{(-2,19),(3,18)\}$ ۴) $\{(2,-19),(-3,-18)\}$

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\{1,-3,2\}$ و $D_g=\{-1,2,-3\}$، پس $D_f \cap D_g=\{2,-3\}$. از طرف دیگر،

$$(f-g)(-3)=f(-3)-g(-3)=7-(-11)=18\,,\quad (f-g)(2)=f(2)-g(2)=13-(-6)=19$$

بنابراین $f-g=\{(2,19),(-3,18)\}$.

تست ۲ اگر $f=\{(1,2),(0,a^2),(a,0)\}$ و $g=\{(-1,2),(-2,1),(0,4)\}$ به طوری‌که $D_{f+g}=\{0,-2\}$، برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\{1,0\}$ ۴) $\{\}$

راه‌حل عدد -2 در دامنهٔ تابع $f+g$ است، پس -2 باید در دامنهٔ تابع f باشد. چون $D_f=\{1,0,a\}$، پس $a=-2$ و

$$f=\{(1,2),(0,4),(-2,0)\}\,,\quad g=\{(-1,2),(-2,1),(0,4)\}\,,\quad \frac{f}{g}=\{(0,1),(-2,0)\}\Rightarrow R_{\frac{f}{g}}=\{1,0\}$$

تست ۳ اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۰),(-۲,۴),(-۱,۱),(۰,\frac{۲\sqrt{۳}}{۳})\}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$، برد تابع $\frac{g}{f}$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل توجه کنید که

$$D_f=\{\pm۱,\pm۲,۰\},\quad D_g=[-۲,۲],\quad D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\}=\{\pm۱,-۲,۰\}$$

$$\frac{g}{f}=\{(۱,\frac{\sqrt{۳}}{۱}),(-۱,\frac{\sqrt{۳}}{۱}),(-۲,\frac{۰}{۴}),(۰,\frac{۲}{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}})\}=\{(۱,\sqrt{۳}),(-۱,\sqrt{۳}),(-۲,۰),(۰,\sqrt{۳})\}\Rightarrow R_{\frac{g}{f}}=\{\sqrt{۳},۰\}$$

تذکر اگر k عددی حقیقی باشد، منظور از $f+k$، $f-k$، $k-f$، kf و $\frac{f}{k}$ جمع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم تابع f با تابع ثابت $y=k$ است. واضح است که در تابع $\frac{f}{k}$ باید k مخالف صفر باشد.

تست ۴ اگر $(f+۲g)(x)=x^۲+x$ و $g(x)=x-۱$، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

راه‌حل توجه کنید که

$$(f+۲g)(۱)=۱^۲+۱\Rightarrow f(۱)+۲g(۱)=۲\xrightarrow{g(۱)=۱-۱=۰}f(۱)+۲\times۰=۲\Rightarrow f(۱)=۲$$

تست ۵ اگر $f(x)=۳x^۲-۴x+۲$ و $g(x)=۲x^۲-۵x+۴$، ضابطهٔ تابع $۲f-۳g$ کدام است؟

۱) $۸x-۷$ ۲) $۷x-۷$ ۳) $۷x+۸$ ۴) $۷x-۸$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$(۲f-۳g)(x)=۲f(x)-۳g(x)=۲(۳x^۲-۴x+۲)-۳(۲x^۲-۵x+۴)=۷x-۸$$

تست ۶ اگر $f(x)=x$، $D_f=[-۲,۲]$، $g(x)=x-۲$ و $D_g=[-۱,۳]$، برد تابع $f\times g$ کدام است؟

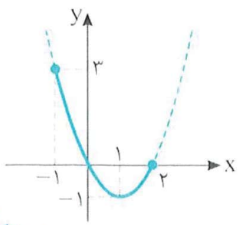
۱) $[۰,۲]$ ۲) $[-۱,۰]$ ۳) $[-۱,۳]$ ۴) $[۰,۳]$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[-۲,۲]\cap[-۱,۳]=[-۱,۲]$$

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=x(x-۲)=x^۲-۲x$$

بنابراین نمودار تابع $f\times g$ به‌صورت روبه‌رو است و برد آن بازهٔ $[-۱,۳]$ است.



تست ۷ اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{۳-x}$، دامنهٔ تابع $g-f$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[-۱,۰]$

راه‌حل توجه کنید که $D_f=[-۱,۲]$ و $D_g=[۰,۳]$. بنابراین

$$D_{g-f}=D_f\cap D_g=[-۱,۲]\cap[۰,۳]=[۰,۲]$$

تست ۸ اگر f و g توابعی چندجمله‌ای باشند و $(f+g)(x)=x^۲-۱۲$ و $(f-g)(x)=x^۲-۲x$، دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۲,-۳\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۶\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۲,۳\}$

راه‌حل ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را حساب می‌کنیم. طبق فرض $f(x)+g(x)=x^۲-۱۲$ و $f(x)-g(x)=x^۲-۲x$. با جمع طرفین این دو تساوی نتیجه می‌شود

$$۲f(x)=۲x^۲-۲x-۱۲\Rightarrow f(x)=x^۲-x-۶$$

بنابراین $g(x)=x^۲-۱۲-(x^۲-x-۶)=x-۶$. درنتیجه

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{x|x^۲-x-۶=۰\}=\mathbb{R}-\{-۲,۳\}$$

تست ۹ اگر $f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x<1 \\ 2x+1 & 1\le x\le 3 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} 2-x & -2\le x<0 \\ x-1 & 0\le x\le 2 \end{cases}$، تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $(f+g)(x)=\begin{cases} 3 & -1\le x<0 \\ 2x & 0\le x\le 2 \end{cases}$

۲) $(f+g)(x)=\begin{cases} 3 & -1\le x<1 \\ 2x & 1\le x\le 2 \end{cases}$

۳) $(f+g)(x)=\begin{cases} 3 & -1\le x<0 \\ 2x & 0\le x<1 \\ 3x & 1\le x\le 2 \end{cases}$

۴) $(f+g)(x)=\begin{cases} 2x & -1\le x<0 \\ 3x & 0\le x<1 \\ 3 & 1\le x\le 2 \end{cases}$

راه‌حل **راه‌حل اول** توجه کنید که $D_{f+g}=[-1,2]$.

اگر $-1\le x<0$، آن‌گاه $f(x)=x+1$ و $g(x)=2-x$، بنابراین $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+1+2-x=3$.

اگر $0\le x<1$، آن‌گاه $f(x)=x+1$ و $g(x)=x-1$، بنابراین $(f+g)(x)=x+1+x-1=2x$.

اگر $1\le x\le 2$، آن‌گاه $f(x)=2x+1$ و $g(x)=x-1$، بنابراین $(f+g)(x)=2x+1+x-1=3x$. پس

$$(f+g)(x)=\begin{cases} 3 & -1\le x<0 \\ 2x & 0\le x<1 \\ 3x & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(f+g)(2)=f(2)+g(2)=5+1=6$. در گزینه‌های داده شده، تنها در گزینهٔ (۳)، $(f+g)(2)=6$.

دست‌گرمی

۲۸- اگر $f=\{(1,2),(2,-1),(3,-2),(-2,4)\}$ و $g=\{(1,-1),(2,-2),(-3,1),(-4,2)\}$، حاصل $\frac{(f+g)(2)}{(f-g)(1)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۲۹- اگر $f=\{(-1,1),(1,6),(2,3),(3,0)\}$، $g=\{(1,-1),(2,1),(3,9),(5,12)\}$، مجموع اعضای برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -6 ۳) ۳ ۴) ۶

۳۰- اگر $f(x)=x^2+3x+2$ و $g(x)=x^2+2x+1$، حاصل $(f-g)(x-1)$ کدام است؟

۱) x ۲) x^2 ۳) $x+1$ ۴) x^2+1

۳۱- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{8-x}}{\sqrt{x-3}}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{x-3}{5-x}}$، دامنهٔ تابع $f\times g$ کدام است؟

۱) $(5,8]$ ۲) $(3,5)$ ۳) $(3,8]-\{5\}$ ۴) $(3,8)$

۳۲- اگر $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\ge 1 \\ 3x+1 & x<1 \end{cases}$ و $g(x)=|x-1|$، تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $y=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ ۲) $y=\begin{cases} 3x & x\ge 1 \\ 4x & x<1 \end{cases}$ ۳) $y=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ 4x & x<1 \end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases} 2x & x\ge 1 \\ 4x & x<1 \end{cases}$

آزمون ۱۲ جبر توابع (۱)

۱۱۱- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,-۱),(۳,۶),(۴,-۷),(۵,-۲)\}$، مجموع اعضای برد تابع $f+g$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۱۲- اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۶),(-۱,۵)\}$، $g=\{(۱,۴),(۲,-۱),(۵,۲),(۴,۶)\}$ و $(f+g)(a)=۲(f-g)(a)$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۳- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۳x}$، $g=\{(-۱,۲),(۱,۴),(۰,۱),(۲,۵),(۴,۳)\}$ و $(۲g-f)(a)=۴$، مقدار $f(-a)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲۸}$ ۲) $\sqrt{۲۴}$ ۳) $\sqrt{۱۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۱۱۴- اگر $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$ و $g(x)=\frac{x^۴-x^۲}{x^۲+۱}$، ضابطهٔ تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $x^۲+۱$ ۲) $x^۲-x$ ۳) $x^۲-۱$ ۴) $x^۲+x$

۱۱۵- اگر $(f+g)(x)=x^۲-۱$ و $(f-g)(x)=x-۳$، حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۲$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) -۸ ۳) -۶ ۴) ۶

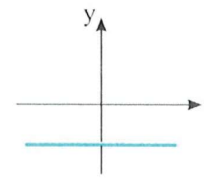
۱۱۶- اگر $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{x+۴}{x-۳}$، مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ قرار ندارند، کدام است؟

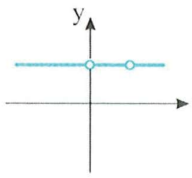
۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) -۱

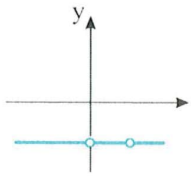
۱۱۷- اگر f و g توابعی چندجمله‌ای باشند، $(f+g)(x)=x^۲-۴x$ و $(f-g)(x)=x^۲-۶x-۱۲$، دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

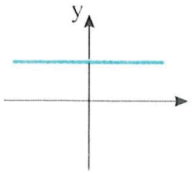
۱) $\mathbb{R}-\{-۱,۶\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۲,-۳\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۱,-۶\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۲,۳\}$

۱۱۸- اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲-x}$ و $g(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲-x}$، نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۱۹- اگر $f(x)=۳x-\sqrt{x}$ و $g(x)=۲-\sqrt{x}$، برد تابع $g-f$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۲]$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $[-۲,۲]$

۱۲۰- اگر $f(x)=\begin{cases}۲x & x\geq ۱\\ x-۱ & x\leq -۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x+۱ & x\geq ۱\\ ۳x & x\leq -۱\end{cases}$، برد تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-(-۲,۰)$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $[-۲,۰]$

سؤال	گام
۱۱۱	۲ ۲۶
۱۱۲	۴ ۲۶
۱۱۳	۴ ۲۶
۱۱۴	۲۶ ۲۸۴
۱۱۵	۲۶ ۲۹۶
۱۱۶	۲۲ ۲۶
۱۱۷	۲۶
۱۱۸	۲۶ ۲۸۴
۱۱۹	۲۳ ۲۶
۱۲۰	۲۳ ۲۶

آزمون ۱۳ — جبر توابع (۲)

۱۲۱- اگر $f=\{(0,1),(1,4),(2,-6)\}$ و $g=\{(0,-1),(1,-2),(2,3),(3,17)\}$، مجموع مقدارهای تابع $f-2g$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -5 ۳) -3 ۴) -1

۱۲۲- اگر $(f+g)(x)=2x+1$ و $(f-g)(x)=1-x$، مقدار $(f\times g)(2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۳- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{x}$ و $g=\{(-2,1),(-1,0),(0,2),(3,1),(4,2),(5,6)\}$، تابع $\frac{f}{g}$ چند زوج مرتب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۴- اگر $f(x)=|x-1|$ و $g(x)=|x|$، روی بازه‌ای که تابع $f+g$ ثابت است، ضابطهٔ تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $y=2x-1$ ۲) $y=2x+1$ ۳) $y=-2x+1$ ۴) $y=-2x-1$

۱۲۵- اگر $(f+2g)(x)=1-x$ و $(2f-g)(x)=x^2$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $g(x)=\frac{1}{5}(-x^2-2x+2)$ ۲) $g(x)=\frac{1}{5}(x^2-2x-2)$

۳) $g(x)=\frac{1}{3}(-x^2-2x+2)$ ۴) $g(x)=\frac{1}{3}(x^2-2x-2)$

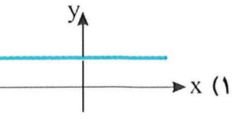
۱۲۶- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{4-x}}$، دامنهٔ تابع $f\times g$ کدام است؟

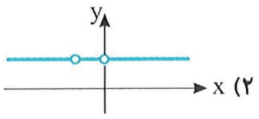
۱) $(1,4)$ ۲) $\mathbb{R}-[4,5)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $\mathbb{R}-\{1,4\}$

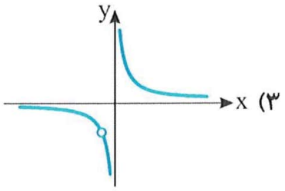
۱۲۷- اگر f و g تابع‌هایی گویا باشند، $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0,-1\}$، $(f\times g)(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ و $(\frac{g}{f})(x)=x$، ضابطهٔ تابع f^2-g^2 کدام است؟

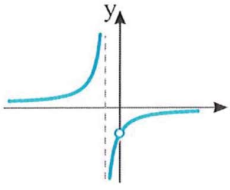
۱) $y=\frac{1+x}{1-x}$ ۲) $y=\frac{1-x}{1+x}$ ۳) $y=\frac{x-1}{x+1}$ ۴) $y=\frac{x}{x+1}$

۱۲۸- اگر $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x}$، نمودار تابع $f+g$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۲۹- اگر $f(x)=x^2+\sqrt{x-4}$ و $g(x)=2x+\sqrt{x-4}$، برد تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $[-1,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $[4,+\infty)$ ۴) $[8,+\infty)$

۱۳۰- اگر $f(x)=\begin{cases}-1 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}2 & |x|\le 1\\ -2 & |x|>1\end{cases}$، برد تابع $f-g$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال	گا
۱۲۱	۴ ۶
۱۲۲	۴ ۶
۱۲۳	۲ ۶
۱۲۴	۸ ۶ ۳۲
۱۲۵	۶
۱۲۶	۲ ۶ ۱۸
۱۲۷	۶ ۱۴
۱۲۸	۲ ۶ ۱۴
۱۲۹	۲ ۳ ۶
۱۳۰	۳ ۶ ۴

آزمون ۱۴ جبر توابع (۳)

۱۳۱- اگر $f=\{(۱,-۱),(۴,۲),(۳,۲),(۵,۱)\}$، تابع $g=\frac{f}{۲-f}$ کدام است؟

۱) $\{(۱,-\frac{۱}{۳}),(۵,۱)\}$
۲) $\{(-۱,-\frac{۱}{۳}),(-\frac{۵}{۳},۱)\}$
۳) $\{(۱,-\frac{۱}{۳}),(۵,۱),(۳,۰),(۴,۰)\}$
۴) $\{(۱,-۱),(۵,-\frac{۵}{۳})\}$

۱۳۲- اگر $(f-g)(a)=۲$ و $(f\times g)(a)=۸$، مقدار $(\frac{f}{g})(a)$ کدام است؟

۱) ۲ یا $\frac{۱}{۲}$
۲) -۲ یا $-\frac{۱}{۲}$
۳) -۲ یا $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲ یا $-\frac{۱}{۲}$

۱۳۳- اگر $f(x)=\sqrt{۹-x^۲}$ و $g=\{(-۴,۲),(۱,۲),(۳,۱),(-۳,۲),(-۱,۲)\}$، برد تابع $\frac{g}{f}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۳۴- اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-x}$، کدام گزینه ضابطه و دامنهٔ تابع $f-g$ را درست نشان می‌دهد؟

۱) $(f-g)(x)=\frac{۱}{x}, D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۰\}$
۲) $(f-g)(x)=\frac{۱}{x}, D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$
۳) $(f-g)(x)=\frac{۲}{x-۱}, D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۱\}$
۴) $(f-g)(x)=\frac{۲}{x}, D_{f-g}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$

۱۳۵- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}+\sqrt{x+۴}$، $g(x)=\sqrt{۱-x}-\sqrt{۴-x^۲}$ و دامنهٔ تابع $f+g$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) -۳
۴) ۲

۱۳۶- اگر $f(x)=\frac{۱}{a^۲x^۲+۴ax+۴}$، $g(x)=\frac{۱}{x^۲+(b+۱)x+b}$ و $D_{f+g}=\mathbb{R}-\{-۱\}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ یا ۳
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۱ یا ۳

۱۳۷- اگر $f(x)=\sqrt{ax-a+۱}$، $D_g=[۲,+\infty)$ و $D_{f\times g}=[۲,۵]$، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۳۸- اگر $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$، $g(x)=\sqrt{x-\sqrt{x}}$ و $(f+g)(x)=\sqrt{ax+۲\sqrt{x^۲-bx}}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۳۹- اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}$، $g(x)=\sqrt{a-x}+b$، $D_{f-g}=[۲,۴]$ و $(f+g)(۳)=۵$، مقدار $a+b$ کدام است؟

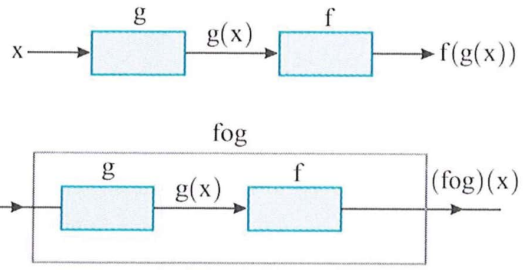
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۱۴۰- اگر $f(x)=\begin{cases}۲-x & x\le ۰\\ x+۲ & x>۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۲x+۳ & x<۱\\ ۳x+۲ & x\ge ۱\end{cases}$، ضابطهٔ تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $\begin{cases}-۳x-۱ & x\le ۰\\ -x & ۰<x<۱\\ -۲x & x\ge ۱\end{cases}$
۲) $\begin{cases}-۳x-۱ & x\le ۰\\ -x-۱ & ۰<x<۱\\ -۲x & x\ge ۱\end{cases}$
۳) $\begin{cases}-۳x & x\le ۰\\ -x-۱ & ۰<x<۱\\ -x & x\ge ۱\end{cases}$
۴) $\begin{cases}-۳x & x\le ۰\\ -x & ۰<x<۱\\ -۲x & x\ge ۱\end{cases}$

سؤال	گام
۱۳۱	۲۶
۱۳۲	۴ ۲۶
۱۳۳	۲ ۲۲ ۲۶
۱۳۴	۲۲ ۲۶ ۲۸۴
۱۳۵	۲۲ ۲۶
۱۳۶	۲۲ ۲۶ ۲۸۳
۱۳۷	۲۲ ۲۶ ۳۱۸
۱۳۸	۲۶ ۲۷۵
۱۳۹	۲۲ ۲۶
۱۴۰	۲۶

درس هفتم: ترکیب توابع



فرض کنید f و g دو تابع باشند که $R_g \subseteq D_f$. ماشین روبه‌رو را در نظر بگیرید. اگر به این ترتیب ماشین‌های f و g را ترکیب کنیم، محصول به‌ازای x برابر $f(g(x))$ می‌شود، یعنی ماشین جدیدی به‌دست می‌آوریم که محصول آن به‌ازای x برابر $f(g(x))$ می‌شود. اگر این ماشین را h بنامیم، $h(x)=f(g(x))$. ماشین h در حقیقت تابعی است که آن را با fog نشان می‌دهند. در حالت کلی‌تر وقتی که $R_g \cap D_f \neq \varnothing$ می‌توانیم تابع fog را تعریف کنیم.

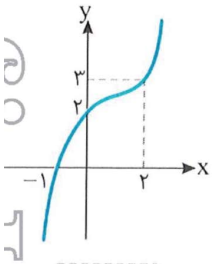
تعریف

ترکیب تابع f با تابع g را با fog نشان می‌دهیم و تابعی است که دامنهٔ آن $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ است و به‌ازای هر x در دامنهٔ این تابع، $(fog)(x)=f(g(x))$.

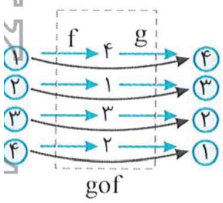
مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 1-x & x>0 \end{cases}$، مقدار $(fof)(2)$ را به‌دست می‌آوریم. چون $2>0$، پس $f(2)=1-2=-1$. چون $-1<0$، پس

$$(fof)(2)=f(f(2))=f(-1)=(-1)^2=1$$

مثال: نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. برای به‌دست آوردن مقدار $(fof)(0)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. با توجه به نمودار تابع f، $f(0)=2$ و $f(2)=3$. بنابراین $(fof)(0)=f(f(0))=f(2)=3$.



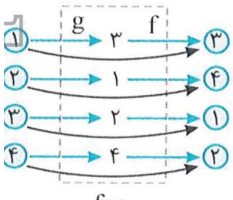
مثال: اگر $f=\{(1,4),(2,1),(3,3),(4,2)\}$ و $g=\{(1,3),(2,1),(3,2),(4,4)\}$، تابع‌های gof و fog را پیدا می‌کنیم. چون هر x که در دامنهٔ تابع gof باشد، قطعاً در دامنهٔ تابع f است، می‌توانیم کار نوشتن تابع gof را با اعضای دامنهٔ تابع f شروع کنیم. مقادیر $f(x)$ را می‌نویسیم و سپس اثر تابع g بر این مقادیر $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم.



با توجه به شکل مقابل تابع gof به‌صورت $gof=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ است.

به همین ترتیب تابع fog را تشکیل می‌دهیم. این بار کار را با اعضای دامنهٔ تابع g آغاز می‌کنیم:

$$fog=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$$



تست ۱ **اگر $f=\{(1,2),(2,-1),(-1,1),(0,2)\}$ و $g=\{(1,1),(2,0),(3,-1)\}$، تابع‌های fog و gof چند زوج مرتب یکسان دارند؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل دو تابع fog و gof را با اعضایشان می‌نویسیم: $fog=\{(1,2),(2,2),(3,1)\}$ و $gof=\{(1,0),(-1,1),(0,0)\}$. این دو تابع هیچ دو زوج مرتب یکسانی ندارند. توجه کنید که $2 \in D_f$ ولی $2 \notin D_{gof}$. زیرا $f(2)=-1 \notin D_g$.

تست ۲ **اگر $f=\{(2,1),(3,5),(7,2),(5,9),(4,3)\}$، برد تابع fof کدام است؟**

۱) $\{1,5,9\}$ ۲) $\{1,3,5\}$ ۳) $\{1,3,5,9\}$ ۴) $\{1,2,5\}$

راه‌حل تابع fof را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} ۲ \xrightarrow{f} ۱ \xrightarrow{f} \times \\ ۳ \longrightarrow ۵ \longrightarrow ۹ \\ ۷ \longrightarrow ۲ \longrightarrow ۱ \\ ۵ \longrightarrow ۹ \longrightarrow \times \\ ۴ \longrightarrow ۳ \longrightarrow ۵ \end{array}$$

$$\text{fof} = \{(۳,۹),(۷,۱),(۴,۵)\}$$

بنابراین $R_{\text{fof}} = \{۱,۵,۹\}$

تست ۳ اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=x^۲+۳$، حاصل $(\text{fog})(x)-(\text{gof})(x)$ کدام است؟

۱) $-۲x^۲-۴x+۳$ ۲) $-۲x^۲+۴x+۳$ ۳) $-۲x^۲-۴x-۳$ ۴) $-۲x^۲+۴x-۳$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$(\text{gof})(x)=g(f(x))=f^۲(x)+۳=(۲x+۱)^۲+۳=۴x^۲+۴x+۴ \quad , \quad (\text{fog})(x)=f(g(x))=۲g(x)+۱=۲(x^۲+۳)+۱=۲x^۲+۷$$

پس $(\text{fog})(x)-(\text{gof})(x)=۲x^۲+۷-(۴x^۲+۴x+۴)=-۲x^۲-۴x+۳$.

تست ۴ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x^۲+۳x$، معادلهٔ $(\text{gof})(x)=۴$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $(\text{gof})(x)=g(f(x))=f^۲(x)+۳f(x)=(x^۲)^۲+۳x^۲=x^۴+۳x^۲$. بنابراین باید معادلهٔ $x^۴+۳x^۲=۴$ را حل کنیم:

$$x^۴+۳x^۲-۴=۰ \Rightarrow (x^۲-۱)(x^۲+۴)=۰$$

معادلهٔ $x^۲+۴=۰$ جواب ندارد و معادلهٔ $x^۲-۱=۰$ دو جواب دارد.

تست ۵ اگر $f(x)=۲-|x-۲|$، ضابطهٔ تابع fof برابر کدام است؟

۱) x ۲) $۴-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $۲-f(x)$

راه‌حل ضابطهٔ تابع fof را در دو حالت زیر پیدا می‌کنیم:

$$x \le ۲ \Rightarrow f(x)=۲+x-۲=x \Rightarrow f(x) \le ۲ \quad , \quad x \ge ۲ \Rightarrow f(x)=۲-(x-۲)=۴-x \Rightarrow f(x) \le ۲$$

در هر دو حالت $f(x) \le ۲$. بنابراین $(\text{fof})(x)=f(f(x))=۲-|f(x)-۲|=۲+f(x)-۲=f(x)$.

تست ۶ اگر $(\text{fog})(x)=\sqrt{x^۲+۱}$، تابع‌های f و g کدام نمی‌توانند باشند؟

۱) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} \\ g(x)=x^۲+۱ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+۱} \\ g(x)=x^۲ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲+۱} \\ g(x)=|x| \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲+۱} \\ g(x)=x^۲ \end{cases}$

راه‌حل توجه کنید در گزینهٔ (۴)، $(\text{fog})(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)^۲+۱}=\sqrt{x^۴+۱}$ اما در سایر گزینه‌ها $(\text{fog})(x)=\sqrt{x^۲+۱}$.

تست ۷ اگر $f(x)=ax+۳$، $g(x)=۲x-۵$ و $(\text{fog})(x)=۶x+b$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۹ ۳) -۱۰ ۴) -۱۲

راه‌حل ابتدا $(\text{fog})(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(\text{fog})(x)=f(g(x))=ag(x)+۳=a(۲x-۵)+۳=۲ax-۵a+۳$$

بنابراین تساوی $۲ax-۵a+۳=۶x+b$ به‌ازای هر x برقرار است. پس

$$۲a=۶ \Rightarrow a=۳ \quad , \quad b=-۵a+۳ \xrightarrow{a=۳} b=-۱۲$$

در نتیجه $a+b=-۹$.

۲۸ **نکته**

در برخی مسئله‌ها ضابطهٔ تابع fog و یکی از تابع‌های f یا g را داریم، و می‌توانیم ضابطهٔ تابع دیگر را به‌دست آوریم.

مثال: اگر $g(x)=3x-1$ و $(gof)(x)=4x+1$، ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

ابتدا توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=4x+1$. از طرف دیگر، $g(x)=3x-1\Rightarrow g(f(x))=3f(x)-1$

بنابراین $3f(x)-1=4x+1\Rightarrow f(x)=\frac{4x+2}{3}$

مثال: اگر $(fog)(x)=4x-1$ و $g(x)=x+2$، ضابطهٔ تابع f را پیدا می‌کنیم.

ابتدا توجه کنید که $(fog)(x)=4x-1\Rightarrow f(g(x))=4x-1\Rightarrow f(x+2)=4x-1$

اگر فرض کنیم $t=x+2$، آن‌گاه $x=t-2$ و در نتیجه $f(t)=4(t-2)-1=4t-9$. بنابراین $f(x)=4x-9$.

تست ۸ **اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $(fog)(x)=\frac{x+1}{x-1}$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟**

۱) $g(x)=\frac{1-x}{2}$ ۲) $g(x)=\frac{x-1}{x}$ ۳) $g(x)=\frac{-x-1}{2}$ ۴) $g(x)=\frac{x}{x-1}$

راه‌حل ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)+1} \\ (fog)(x)=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f(g(x))=\frac{x+1}{x-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)+1}=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow xg(x)-g(x)=xg(x)+x+g(x)+1\Rightarrow 2g(x)=-x-1\Rightarrow g(x)=\frac{-x-1}{2}$$

تست ۹ **اگر $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$ و $(fog)(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f برای $|x|\geq 2$ کدام است؟**

۱) x^2+2 ۲) x^2-2 ۳) x^2-1 ۴) x^2

راه‌حل با توجه به تعریف تابع fog، $(fog)(x)=f(g(x))=\frac{x^4+1}{x^2}$. با جای‌گذاری $g(x)$ در این رابطه به‌دست می‌آید

$$f(\frac{x^2+1}{x})=\frac{x^4+1}{x^2}\Rightarrow f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2\Rightarrow f(x)=x^2-2$$

تست ۱۰ **اگر f تابعی خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و $(fof)(x)=4x-15$، مقدار $f(1)$ کدام است؟**

۱) -3 یا 13 ۲) -3 یا 11 ۳) -7 یا 17 ۴) 3 یا -13

راه‌حل فرض کنید $f(x)=ax+b$. در این صورت $(fof)(x)=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$.

بنابراین تساوی $a^2x+ab+b=4x-15$ به‌ازای هر x حقیقی برقرار است. در نتیجه

$$\begin{cases} a^2=4 \\ ab+b=-15 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=2\ ,\ b=-5 \\ a=-2\ ,\ b=15 \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=2x-5$ یا $f(x)=-2x+15$ دو تابع خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ هستند که در تساوی داده شده صدق می‌کنند، در نتیجه $f(1)=13$ یا $f(1)=-3$

۲۹ **نکته** دامنهٔ تابع مرکب

توجه کنید که $\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$.

بنابراین، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع fog، کافی است xهایی را پیدا کنیم که $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$.

تست ۱۱ **اگر $f=\{(-2,1),(-1,0),(0,2),(-3,3),(1,4)\}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$، حاصل‌ضرب مقادیر دامنهٔ تابع fog کدام است؟**

۱) 12 ۲) -4 ۳) -3 ۴) -12

راه‌حل توجه کنید که $D_g=[-۲,۲]$ و $D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$. بنابراین $D_{fog}=\{x|-۲\le x\le ۲, \sqrt{۴-x^۲}\in D_f\}$. پس مقادیر $g(x)$ را برابر اعضای دامنهٔ تابع f قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{۴-x^۲}=۰\Rightarrow x=\pm ۲ \quad ,\quad \sqrt{۴-x^۲}=-۱ \text{ (غ.ق.ق.)} \quad ,\quad \sqrt{۴-x^۲}=-۲ \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$\sqrt{۴-x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \quad ,\quad \sqrt{۴-x^۲}=-۳ \text{ (غ.ق.ق.)}$$

پس دامنهٔ تابع fog به‌صورت $\{\pm ۲,\pm\sqrt{۳}\}$ است. بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر دامنهٔ تابع fog برابر ۱۲ است.

تست ۱۲ اگر $f(x)=۳x-۱$ و $D_f=[-۱,۲]$، دامنهٔ تابع fof کدام است؟

۱) $[-۱,۰]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[۰,۱]$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $D_{fof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_f\}$. از طرف دیگر،

$$x\in D_f\Rightarrow -۱\le x\le ۲ \quad (۱) \quad , \quad f(x)\in D_f\Rightarrow -۱\le ۳x-۱\le ۲\Rightarrow ۰\le x\le ۱ \quad (۲)$$

اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $۰\le x\le ۱$، یعنی $D_{fof}=[۰,۱]$.

تست ۱۳ اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۲x}{x+۲}$، دامنهٔ تابع fog شامل چند عدد حقیقی نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$. پس $D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\ne -۲, \frac{۲x}{x+۲}\ne ۱\}$.

از $\frac{۲x}{x+۲}\ne ۱$ نتیجه می‌شود $۲x\ne x+۲$، پس $x\ne ۲$. بنابراین $D_{fog}=\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$، یعنی دامنهٔ تابع fog شامل دو عدد حقیقی نیست.

تست ۱۴ اگر $f(x)=۱-\sqrt{x-۱}$، $g(x)=\sqrt{۴+x}-۲$ و دامنهٔ تابع gof بازهٔ $[a,b]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

راه‌حل ابتدا دقت کنید که $D_f=[۱,+\infty)$ و $D_g=[-۴,+\infty)$. طبق تعریف دامنهٔ تابع gof،

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\{x|x\ge ۱, ۱-\sqrt{x-۱}\ge -۴\}$$

نامعادلهٔ $۱-\sqrt{x-۱}\ge -۴$ را حل می‌کنیم:

$$۱-\sqrt{x-۱}\ge -۴\Rightarrow \sqrt{x-۱}\le ۵\Rightarrow x-۱\le ۲۵\Rightarrow x\le ۲۶$$

بنابراین $D_{gof}=[۱,۲۶]$ و در نتیجه $a+b=۲۷$.

تست ۱۵ اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۰,۱]$ باشد، دامنهٔ تابع h با ضابطهٔ $h(x)=f(۲x+۳)$ کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $[-\frac{۳}{۲},-۱]$ ۴) $[۱,\frac{۳}{۲}]$

راه‌حل اگر فرض کنیم $g(x)=۲x+۳$، آن‌گاه $D_g=\mathbb{R}$ و $h(x)=f(g(x))=(fog)(x)$. بنابراین

$$D_h=D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۰\le ۲x+۳\le ۱\}=\{x|x\in\mathbb{R}, -\frac{۳}{۲}\le x\le -۱\}=[-\frac{۳}{۲},-۱]$$

تست ۱۶ اگر $f(x)=x^۲$، $D_f=[-۱,۲]$، $g(x)=۳-x$ و $D_g=(۳,+\infty)$، دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $[۳,۴]$ ۳) $(۳,۴]$ ۴) $[۳,۴)$

راه‌حل توجه کنید که

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x>۳, -۱\le ۳-x\le ۲\}=\{x|x>۳, ۱\le x\le ۴\}=(۳,۴]$$

تست ۱۷ اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=x^2+4$، برد تابع gof کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $[4,+\infty)$ ۳) $[2,4]$ ۴) $\mathbb{R}$

راه‌حل

ابتدا دامنهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\geq 2, \sqrt{x-2}\in\mathbb{R}\}=[2,+\infty)$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم: $(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-2})=(\sqrt{x-2})^2+4=x-2+4=x+2$

با توجه به دامنهٔ تابع gof، یعنی $x\geq 2$، برد آن را پیدا می‌کنیم: $x\geq 2\Rightarrow x+2\geq 4\Rightarrow (gof)(x)\geq 4\Rightarrow R_{gof}=[4,+\infty)$

تست ۱۸ اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x & x>0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x^2 & x>0\end{cases}$، تابع gof کدام است؟

۱) $\begin{cases}x^4 & x<0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}1-x^2 & x<0\\ x^2+1 & x>0\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}-x & x<0\\ 1-x & x>0\end{cases}$

راه‌حل

راه‌حل اول اگر $x<0$، آن‌گاه $f(x)=x^2>0$، بنابراین $(gof)(x)=g(x^2)=(x^2)^2=x^4$. اگر $x>0$، آن‌گاه $f(x)=x>0$، بنابراین $(gof)(x)=g(x)=x^2$. پس می‌توان نتیجه گرفت $(gof)(x)=\begin{cases}x^4 & x<0\\ x^2 & x>0\end{cases}$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $(gof)(-2)=g(f(-2))=g(4)=16$. اکنون توجه کنید که در میان گزینه‌ها فقط در گزینهٔ (۱) تساوی $(gof)(-2)=16$ برقرار است. در گزینهٔ (۲)، $(gof)(-2)=4$، در گزینهٔ (۳)، $(gof)(-2)=-3$، در گزینهٔ (۴)، $(gof)(-2)=2$.

دست‌گرمی

۳۳- اگر $f=\{(1,-1),(2,-1),(-1,3),(3,-2)\}$ و $g=\{(-1,2),(3,2),(-2,4),(1,-1)\}$، تابع gof کدام است؟

۱) $\{(1,2),(2,2),(-1,3),(3,1)\}$ ۲) $\{(-1,1),(3,1),(1,3)\}$

۳) $\{(1,2),(2,2),(-1,2),(3,4)\}$ ۴) $\{(-1,-1),(3,-1),(1,3)\}$

۳۴- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+4 & x\leq 5\\ \frac{x-1}{2} & x>5\end{cases}$، مقدار $(fof)(3)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۵- اگر $f(x)=2x+3$ و $g(x)=3x-2$، به‌ازای کدام مقدار a تساوی $(fog)(a)+(gof)(a)=2a$ برقرار است؟

۱) $-\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۳۶- اگر $f(x)=ax+1$، $g(x)=x^2+2x$ و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x)=2$ دو عضو داشته باشد، حدود a کدام است؟

۱) $0<a<1$ ۲) $-1<a<0$ ۳) $a<0$ یا $a>1$ ۴) $a<-1$ یا $a>0$

۳۷- اگر $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ و $g=\{(-3,1),(-2,0),(-1,1),(1,3)\}$، تابع fog کدام است؟

۱) $\{(-3,\sqrt{3}),(-2,2),(-1,\sqrt{3})\}$ ۲) $\{(-3,1),(-2,2),(-1,\sqrt{3})\}$

۳) $\{(-1,\sqrt{3}),(-3,2),(1,0)\}$ ۴) $\{(-3,\sqrt{3}),(-2,1),(1,\sqrt{3})\}$

۳۸- اگر $-1\leq x\leq 3$، $f(x)=2x-1$ و $0\leq x\leq 2$، $g(x)=5-2x$، دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[1,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[-1,0]$

۳۹- اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{3-x^2}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $(-\infty,4]$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $[1,4]$ ۴) $[1,\sqrt{3}]$

آزمون ۱۵ ترکیب توابع (۱)

سؤال	گام
۱۴۱	۲۷
۱۴۲	۲۷
۱۴۳	۲۷
۱۴۴	۲۷ ۲۸۴
۱۴۵	۲۸ ۲۷۵
۱۴۶	۲۳ ۲۹
۱۴۷	۲۹
۱۴۸	۲۲ ۲۳ ۲۹
۱۴۹	۲۹ ۳۲۷
۱۵۰	۲۹

۱۴۱- فرض کنید $f=\{(۱,۲),(-۱,-۳),(۲,۳),(-۲,۴)\}$ و $g=\{(۳,۱),(-۲,۲),(-۳,-۲),(۱,۰)\}$. حاصل $(fog)(-۲)-(gof)(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۲- اگر $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\le ۰ \\ x^۲+۲ & x>۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x+۶ & x\le ۱ \\ x^۲ & x>۱ \end{cases}$، مقدار $(fog)(-۲)$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

۱۴۳- اگر $f(x)=۳x-۲$ و $g(x)=۴x+۳$، حاصل $(fog)(x-۱)$ کدام است؟

۱) $۱۲x+۱۹$ ۲) $۱۲x-۵$ ۳) $۳x+۷$ ۴) $۳x-۱۸$

۱۴۴- اگر $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۲x-۲}{x+۲}$، ضابطهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $\frac{۶x}{۴x-۱}$ ۲) $\frac{۲x+۴}{۳}$ ۳) $\frac{۲x}{۴x+۱}$ ۴) $\frac{۲x+۴}{۴x-۱}$

۱۴۵- اگر $g(x)=x^۲-۶x+۱۵$ و $(fog)(x)=۵x^۲-۳x+۲$، حاصل $f(۶)$ کدام است؟

۱) ۳۸ ۲) -۳۵ ۳) ۳۵ ۴) ۱۶

۱۴۶- اگر $D_f=[۱,۲]$ و $f(x)=۴-۲x$، دامنهٔ تابع fof کدام است؟

۱) $[۱,۲]$ ۲) $[\frac{۳}{۲},۲]$ ۳) $[۱,\frac{۳}{۲}]$ ۴) $[۱,\frac{۴}{۳}]$

۱۴۷- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۱,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=f(x^۲)$ کدام است؟

۱) $[۱,۲]$ ۲) $[۱,۱۶]$ ۳) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$ ۴) $[۱,۲]\cup[۴,۱۶]$

۱۴۸- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x)=x^۲+۱$، برد تابع gof کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۱,۴]$ ۳) $[۱,۵]$ ۴) $[۵,+\infty)$

۱۴۹- اگر $D_f=[۰,۳]$، $D_g=[a,+\infty)$، $g(x)=|x-۱|$ و $D_{fog}=[-۲,۴]$، حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۰- اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۰ \\ x+۴ & x\ge ۰ \end{cases}$ و $g(x)=۳x-۶$، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $(fog)(x)=\begin{cases} ۶x+۱۳ & x<۲ \\ ۳x-۲ & x\ge ۲ \end{cases}$

۲) $(fog)(x)=\begin{cases} ۶x+۱۳ & x<۲ \\ ۲x+۳ & x\ge ۲ \end{cases}$

۳) $(fog)(x)=\begin{cases} ۶x-۱۳ & x<۲ \\ ۳x-۲ & x\ge ۲ \end{cases}$

۴) $(fog)(x)=\begin{cases} ۱۳x-۶ & x<۲ \\ ۲x+۳ & x\ge ۲ \end{cases}$

آزمون ۱۶ — ترکیب توابع (۲)

۱۵۱- اگر $f=\{(۰,-۱),(۱,۰),(۳,۷),(۲,۵)\}$ و $g=\{(-۱,۳),(۱,۲),(۳,۰),(۵,۱)\}$، تابع fog کدام است؟

۱) $\{(-۱,۵),(۱,۷),(۳,-۱),(۵,۰)\}$
۲) $\{(-۱,۷),(۱,۵),(۳,۰),(۵,-۱)\}$
۳) $\{(-۱,۷),(۱,۰),(۳,۵),(۵,-۱)\}$
۴) $\{(-۱,۷),(۱,۵),(۳,-۱),(۵,۰)\}$

۱۵۲- اگر $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۱ \\ ۳x-۶ & x<۱ \end{cases}$، $g(x)=\begin{cases} mx+۲ & x>۲ \\ ۴x-۳ & x\leq ۲ \end{cases}$ و $(gof)(۲)=۸$، مقدار m کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) صفر
۴) ۳

۱۵۳- اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=۲x+۱$، ساده شدهٔ عبارت $(fog)(x)+(gof)(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^۲+۳x-۱}{۲x^۲-۲x}$
۲) $\frac{۲x^۲+x-۱}{۲x^۲-۲x}$
۳) $\frac{۲x^۲-۱}{۲x^۲-۲x}$
۴) $\frac{۲x^۲+۳x-۱}{۲x^۲-۲x}$

۱۵۴- اگر $f(x)=x^۲+۳x+۲$، حاصل‌جمع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $(fof)(x)=۶$ کدام است؟

۱) -۱
۲) -۳
۳) ۳
۴) -۶

۱۵۵- اگر $g(x-۱)=\frac{x+۲}{۳}$ و $(fog)(x)=۶x+۵$، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

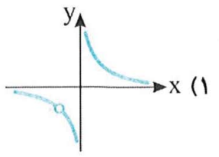
۱۵۶- اگر $f(x)=\sqrt{۳-x^۲}$ و $g=\{(-۳,۲),(۰,-۱),(۱,۰),(۲,۳)\}$، حاصل ضرب اعضای دامنهٔ تابع gof کدام است؟

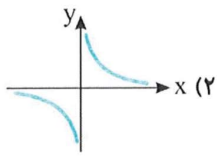
۱) ۴
۲) ۶
۳) -۶
۴) صفر

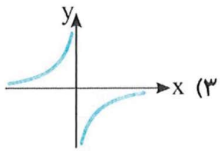
۱۵۷- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۱,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=f(۲^x)$ کدام است؟

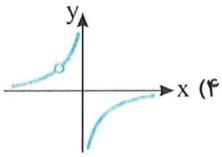
۱) $[۲,۱۶]$
۲) $[۱,۲]$
۳) $[۰,۲]$
۴) $[۱,۱۶]$

۱۵۸- اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$، نمودار تابع $g(x)=(fof)(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۵۹- اگر $D_f=[-۲,۳]$، $f(x)=x^۲-۳$ و $D_g=[۱,۱۳]$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $[۲,۳]$
۲) $[۱,۳]$
۳) $[۲,۳]\cup\{-۲\}$
۴) $[-۲,-۱]\cup[۲,۳]$

۱۶۰- اگر $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۰ \\ x-۱ & x<۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۳-x & x>۰ \\ ۲-x & x<۰ \end{cases}$ آن‌گاه $(gof)(x)$ کدام است؟

۱) $(gof)(x)=\begin{cases} ۴-x & x\geq ۰ \\ ۳-x & x<۰ \end{cases}$
۲) $(gof)(x)=\begin{cases} ۴-x & x\geq ۰ \\ ۲-x & x<۰ \end{cases}$
۳) $(gof)(x)=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ ۳-x & x<۰ \end{cases}$
۴) $(gof)(x)=\begin{cases} ۲-x & x\geq ۰ \\ ۳-x & x<۰ \end{cases}$

آزمون ۱۷ ترکیب توابع (۳)

سؤال	گام
۱۶۱	۲۷
۱۶۲	۲۷
۱۶۳	۲۷ ۲۸۴
۱۶۴	۲۸ ۳۰۶
۱۶۵	۲۶ ۲۸
۱۶۶	۲۲ ۲۹
۱۶۷	۲۹ ۳۱۸
۱۶۸	۲۲ ۲۳ ۲۷ ۲۹
۱۶۹	۱۲ ۲۷ ۲۹ ۳۴
۱۷۰	۲۹

۱۶۱- اگر توابع f، g و fog به‌صورت زیر باشند، مقدار $a-b+c-d$ کدام است؟

$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۱)\}$ ، $g=\{(۱,۴),(۲,۱),(۳,۳),(۴,۲)\}$

$fog=\{(۱,a),(۲,b),(۳,c),(۴,d)\}$

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) صفر ۴) ۴

۱۶۲- اگر $f(x)=۲x+a$ ، $g(x)=۶-۲x$ و $(fog)(۲)-(gof)(a)=۳$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

۱۶۳- اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x-۲}$، ضابطهٔ تابع fof کدام است؟

۱) $\frac{۳x-۲}{x+۶}$ ۲) $\frac{۳x-۲}{x-۶}$ ۳) $\frac{۳x+۲}{-x+۶}$ ۴) $\frac{۳x-۲}{-x+۶}$

۱۶۴- اگر $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ و $(fog)(x)=\frac{x}{۲x+۱}$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $\frac{x}{x+۱}$ ۲) $\frac{x}{۱-x}$ ۳) $\frac{x}{x-۱}$ ۴) $\frac{-x}{x+۱}$

۱۶۵- اگر $g(x)=\sqrt{۴x-۱۹}$ و $(gof)(x)=\sqrt{۴g(x)+x}$، مقدار $(f-g)(۵)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶۶- اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۳x-x^۲}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $[۰,۳]$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $[۱,۱۰]$ ۴) $[۱,۳]$

۱۶۷- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[۲,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $h(x)=f(\frac{۱}{x}+۳)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(۰,۱]$ ۲) $\mathbb{R}-(-۱,۰]$ ۳) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ۴) $(-۱,۱)$

۱۶۸- اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=x^۲+۶$، برد تابع gof کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۶,+\infty)$ ۳) $[۱,۶]$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۶۹- اگر $f(x)=\frac{۲x-۴}{x+۲}$، برد تابع $g(x)=(fof)(x)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰,-۲\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۰,۲\}$

۱۷۰- اگر $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ x-۲ & x\geq ۰\end{cases}$ و $g(x)=۳x+۲$، تابع gof کدام است؟

۱) $(gof)(x)=\begin{cases}۶x+۵ & x<۰\\ ۳x-۷ & x\geq ۰\end{cases}$ ۲) $(gof)(x)=\begin{cases}۶x-۲ & x<۰\\ ۳x & x\geq ۰\end{cases}$

۳) $(gof)(x)=\begin{cases}۶x-۱ & x<۰\\ ۳x-۴ & x\geq ۰\end{cases}$ ۴) $(gof)(x)=\begin{cases}۶x-۱ & x>۰\\ ۳x+۴ & x\leq ۰\end{cases}$

آزمون ۱۸ ترکیب توابع (۴)

۱۷۱- اگر $f=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,5)\}$ و $fog=\{(1,2),(2,5),(3,1),(4,4),(5,3)\}$، تابع g کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\{(1,3),(2,5),(3,4),(4,2),(5,1)\}$
۲) $\{(1,3),(2,5),(3,2),(4,4),(5,1)\}$
۳) $\{(1,3),(2,5),(3,4),(4,1),(5,2)\}$
۴) $\{(1,3),(2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\}$

۱۷۲- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، $g=\{(4,1),(5,4),(6,5),(9,3)\}$ و $(gof)(a)=5$، مقدار $g(a)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۵

۱۷۳- اگر $f(x)=2x-a+1$، $g(x)=-5x+2a$ و همواره $(fog)(x)=(gof)(x)$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $-\frac{5}{2}$
۴) $-\frac{3}{2}$

۱۷۴- اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ و $(gof)(x)=\frac{1}{x+2}$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $\frac{x-1}{4x-1}$
۲) $\frac{x+1}{4x-2}$
۳) $\frac{x}{4x+1}$
۴) $\frac{x+1}{4x-1}$

۱۷۵- اگر f تابعی چندجمله‌ای باشد، $g(x)=x^2-3x+4$ و $(gof)(x)=x^2+f(x)$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $x-2$ یا $x+2$
۲) $x+2$ یا $-x+2$
۳) $-x-2$ یا $x+2$
۴) $-x-2$ یا $x-2$

۱۷۶- اگر f یک تابع خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و $(fof)(x)=4x-3$، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) ۱ یا -3
۲) -1 یا ۳
۳) -1 یا -3
۴) ۱ یا ۳

۱۷۷- اگر $f(x)=|x+2|-4$ و $g(x)=|x|$، حاصل $((fof)og)(x)$ کدام است؟

۱) $|x|+1$
۲) $|x-2|$
۳) $|x|-2$
۴) $|x|-4$

۱۷۸- اگر $f(x)=\sqrt{4x-x^2}-1$، دامنهٔ تابع fof کدام است؟

۱) $[0,4]$
۲) $[2+\sqrt{3},4]$
۳) $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$
۴) $[0,2-\sqrt{3}]$

۱۷۹- اگر $f(x)=\sqrt{x-k}$، $g(x)=\frac{1}{x}+3$ و $D_{fog}=\mathbb{R}-(-1,0]$، مقدار k کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۸۰- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x<0\\ 3x+4 & 0\le x<2\\ 5 & x\ge 2\end{cases}$ و $g(x)=x+1$، تابع fog کدام است؟

۱) $(fog)(x)=\begin{cases}x^2+2x & x<-1\\ 3x+7 & -1\le x<0\\ 5 & x\ge 0\end{cases}$
۲) $(fog)(x)=\begin{cases}x^2+2x & x<0\\ 3x+7 & 0\le x<1\\ 5 & x\ge 1\end{cases}$
۳) $(fog)(x)=\begin{cases}x^2+2x & x<-1\\ 3x+7 & -1\le x<1\\ 5 & x\ge 1\end{cases}$
۴) $(fog)(x)=\begin{cases}x^2+2x & x<0\\ 3x+7 & 0\le x<2\\ 5 & x\ge 2\end{cases}$

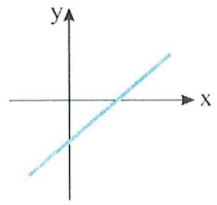
درس هشتم: تبدیل نمودار توابع

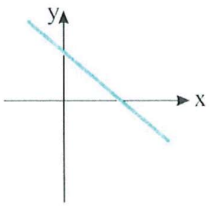
می‌توانیم نمودار برخی تابع‌ها را با انجام عملیاتی از روی نمودار تابع‌های دیگر رسم کنیم. این عملیات عبارت‌اند از

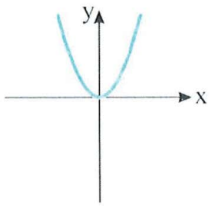
- انتقال (افقی یا عمودی)
- بازتاب (قرینه کردن نسبت به محورهای مختصات)
- انقباض و انبساط (افقی یا عمودی)

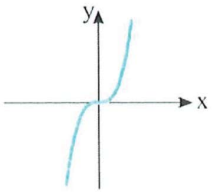
چون معمولاً با تابع‌های معروف سروکار داریم، در اینجا نمودار آن‌ها را می‌آوریم.

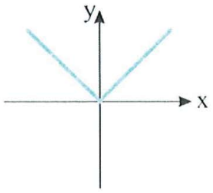
نکته — نمودار توابع معروف

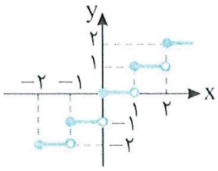

$y=ax+b,\quad a>0$

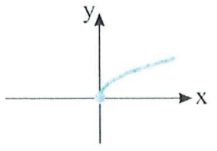

$y=ax+b,\quad a<0$

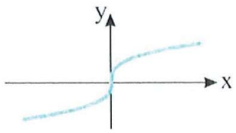

$y=x^2$

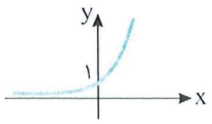

$y=x^3$

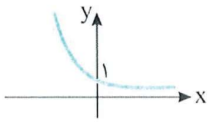

$y=|x|$

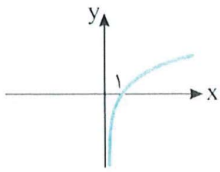

$y=[x]$

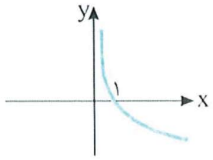

$y=\sqrt{x}$

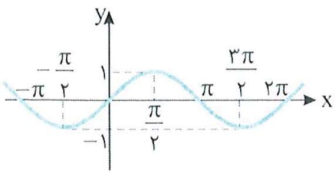

$y=\sqrt[3]{x}$

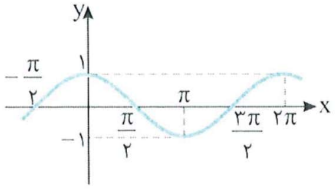

$y=a^x,\ a>1$

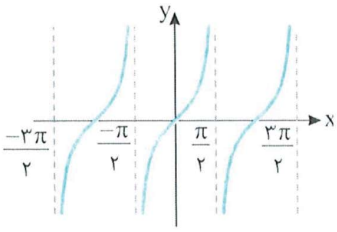

$y=a^x,\ 0<a<1$


$y=\log_a x,\ a>1$


$y=\log_a x,\ 0<a<1$


$y=\sin x$


$y=\cos x$

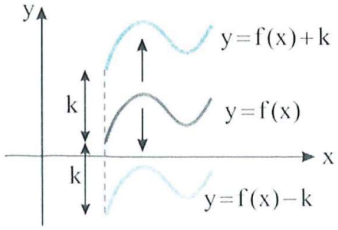

$y=\tan x$

انتقال عمودی

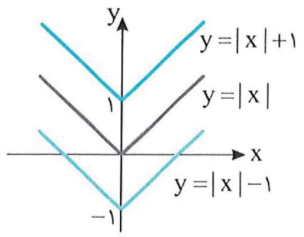
فرض کنید نمودار تابع f را داریم. k عددی حقیقی است و $k>0$. برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به بالا منتقل کنیم.

برای رسم نمودار تابع $y=f(x)-k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به پایین منتقل کنیم.

بنابراین نقطهٔ $(x_0, y_0\pm k)$ از نمودار تابع $y=f(x)\pm k$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع‌های $y=f(x)$ و $y=f(x)\pm k$ یکسان است.

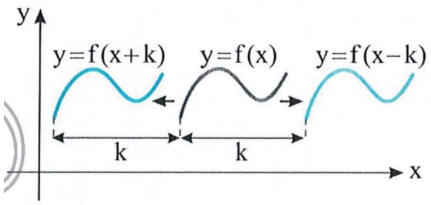


مثال: نمودار توابع $y=|x|+1$ و $y=|x|-1$ را از روی نمودار تابع $y=|x|$ رسم می‌کنیم.

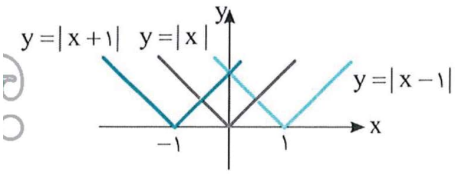


انتقال افقی

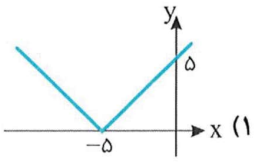
فرض کنید نمودار تابع f را داریم، k عددی حقیقی است و $k>0$. برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به سمت چپ منتقل کنیم. برای رسم نمودار تابع $y=f(x-k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را k واحد به سمت راست منتقل کنیم. بنابراین نقطهٔ $(x_0 \mp k, y_0)$ از نمودار تابع $y=f(x\pm k)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است. برد تابع‌های $y=f(x)$ و $y=f(x\pm k)$ یکسان است.

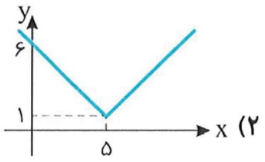


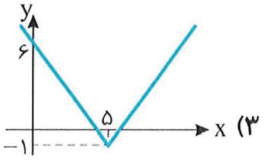
مثال: نمودار توابع $y=|x-1|$ و $y=|x+1|$ را از روی نمودار $y=|x|$ رسم می‌کنیم.

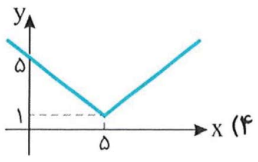


تست ۱ نمودار تابع $f(x)=|5-x|+1$ کدام است؟

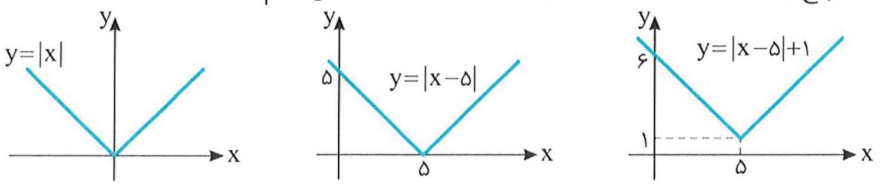
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که چون $|A|=|-A|$، پس $f(x)=|5-x|+1=|x-5|+1$. برای رسم کردن نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می‌کنیم. سپس آن را پنج واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



راه‌حل دوم توجه کنید که نمودار تابع f باید از نقاط $(5,1)$ و $(0,6)$ عبور کند. تنها نموداری که این شرایط را دارد نمودار گزینهٔ (۲) است.

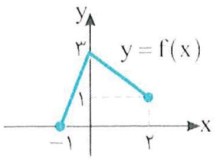
تست ۲ نمودار تابع $f(x)=|x+1|-2$ را دو واحد به سمت راست و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده است، کدام است؟

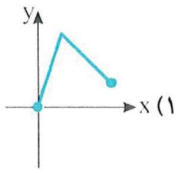
۱) $y=|x-2|+1$ ۲) $y=|x-1|-1$ ۳) $y=|x+3|-1$ ۴) $y=|x-1|+1$

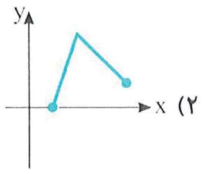
راه‌حل اگر نمودار تابع f را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-2)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-2)+1$ به‌دست می‌آید. بنابراین ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده است به‌صورت زیر است:

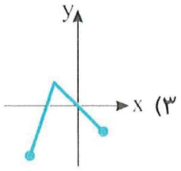
$$f(x-2)+1=|x-2+1|-2+1=|x-1|-1$$

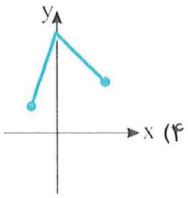
تست ۳ اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(x+1)-2$ کدام است؟



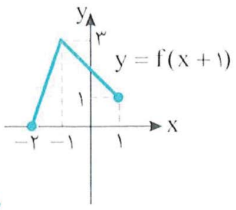
۱) 

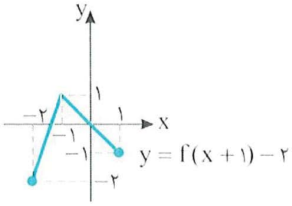
۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به چپ ببریم، نمودار تابع $y=f(x+1)$ حاصل می‌شود. اگر نمودار به‌دست آمده را دو واحد پایین بیاوریم، نمودار تابع $y=f(x+1)-2$ به‌دست می‌آید.

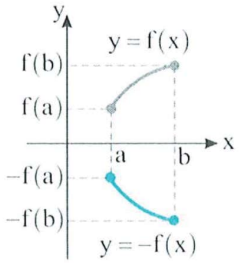




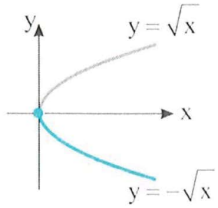
رسم نمودار تابع $y=-f(x)$

فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ را داریم. برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور x رسم می‌کنیم.

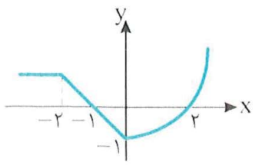
بنابراین نقطهٔ $(x_0,-y_0)$ از نمودار تابع $y=-f(x)$ متناظر با نقطهٔ (x_0,y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع‌های $y=f(x)$ و $y=-f(x)$ یکسان است.

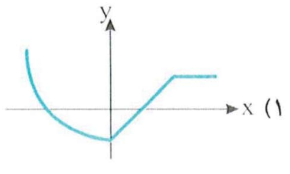


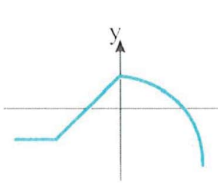
مثال: نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم می‌کنیم.

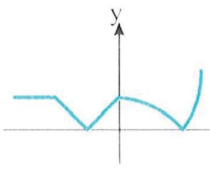


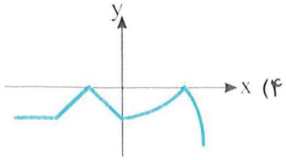
تست ۴ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(x)$ کدام است؟



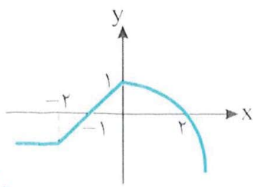
۱) 

۲) 

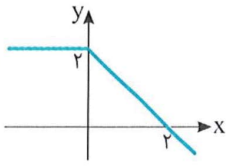
۳) 

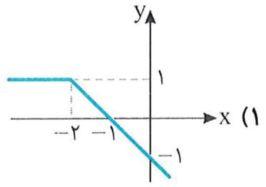
۴) 

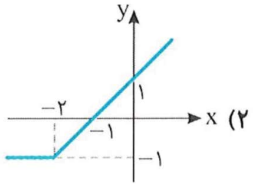
راه‌حل برای رسم کردن نمودار تابع $y=-f(x)$ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.

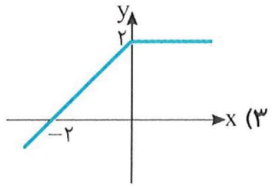


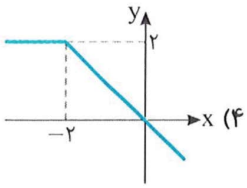
تست ۵ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ کدام است؟



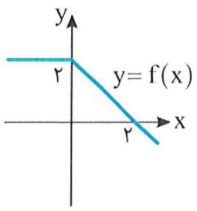
۱) 

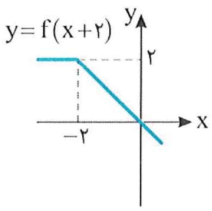
۲) 

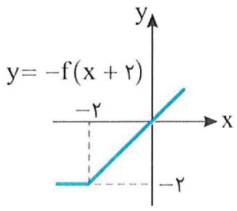
۳) 

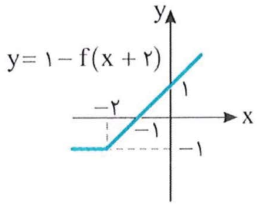
۴) 

راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+2)$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x+2)$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ به‌دست بیاید.

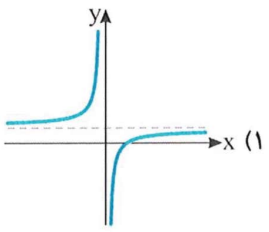


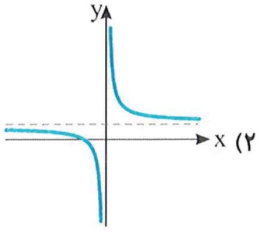


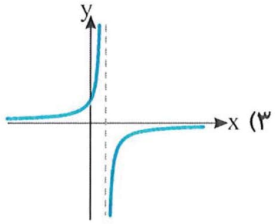


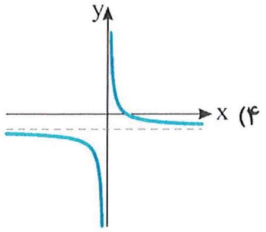


تست ۶ نمودار تابع $f(x)=1-\frac{1}{x}$ کدام است؟

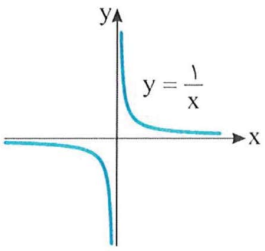
۱) 

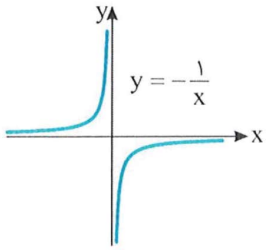
۲) 

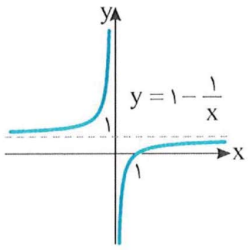
۳) 

۴) 

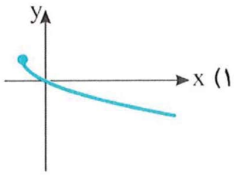
راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\frac{1}{x}$ به‌دست آید. نمودار تابع $y=-\frac{1}{x}$ را یک واحد بالا می‌بریم تا نمودار تابع $y=1-\frac{1}{x}$ به‌دست آید.

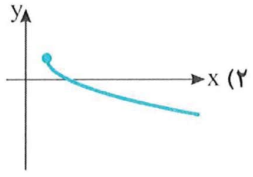


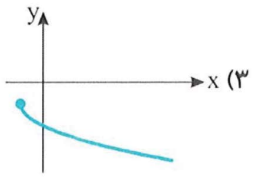


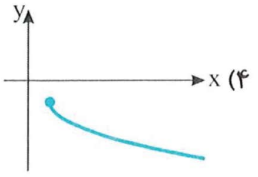


تست ۷ نمودار تابع $f(x)=1-\sqrt{x+1}$ کدام است؟

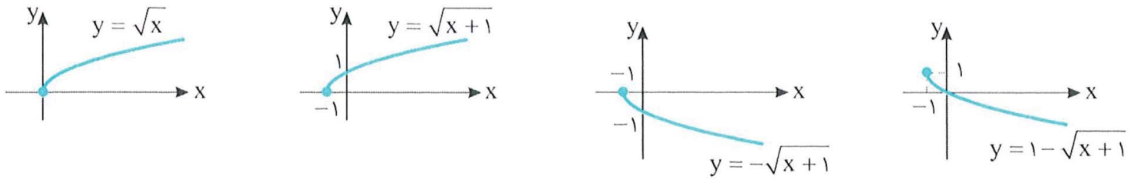
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل **راه‌حل اول** نمودار تابع $f(x)=1-\sqrt{x+1}$ را به‌ترتیب زیر از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم می‌کنیم.



راه‌حل دوم با توجه به ضابطهٔ تابع f به‌دست می‌آید $f(0)=0$. تنها در گزینهٔ (۱)، $f(0)=0$.

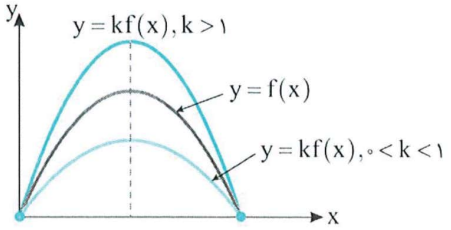
رسم نمودار تابع $y=kf(x)$

۳۴

فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ را داریم. می توانیم نمودار تابع $y=kf(x)$ را به روش زیر رسم کنیم.

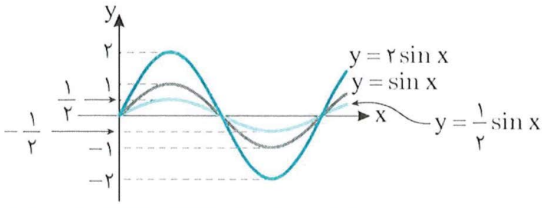
اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

- اگر $k>1$، نمودار تابع $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$، نمودار تابع $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.
- اگر k عددی منفی باشد، برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y=|k|f(x)$ را رسم کنیم و سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم کنیم.

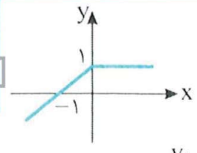


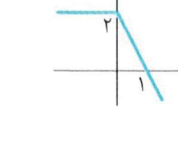
نقطهٔ (x_0, ky_0) از نمودار تابع $y=kf(x)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع‌های $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ یکسان است.

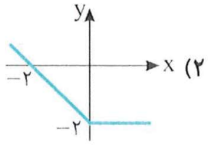
مثال: نمودار تابع‌های $y=2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ را از روی نمودار $y=\sin x$ رسم می‌کنیم $(x\geq 0)$.

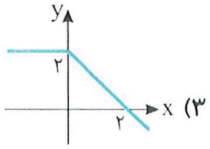


تست ۸ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=-2f(x)$ کدام است؟



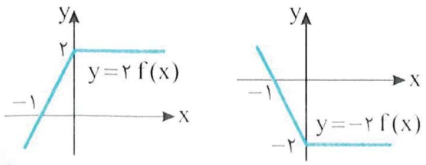
۱) 

۲) 

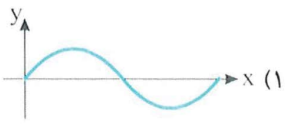
۳) 

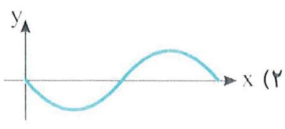
۴)

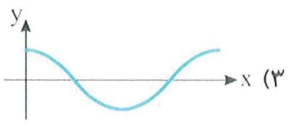
راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=2f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را دو برابر می‌کنیم. سپس قرینهٔ نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-2f(x)$ به‌دست بیاید.

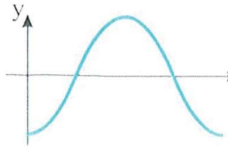


تست ۹ بخشی از نمودار تابع $y=-2\cos x$ کدام است؟

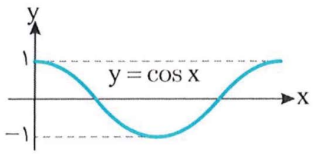
۱) 

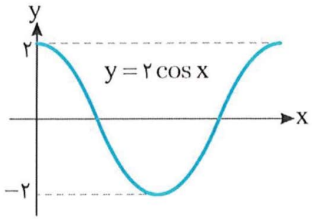
۲) 

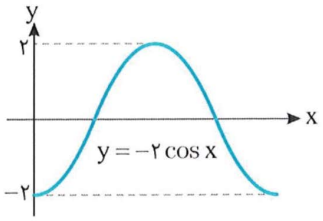
۳) 

۴) 

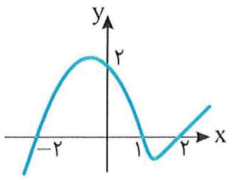
راه‌حل نمودار تابع $y=-2\cos x$ از دو برابر کردن عرض نقاط در نمودار تابع $y=\cos x$ و سپس قرینه کردن آن‌ها نسبت به محور x به‌دست می‌آید.

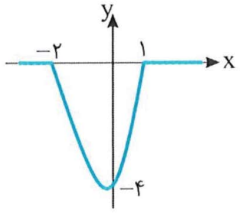


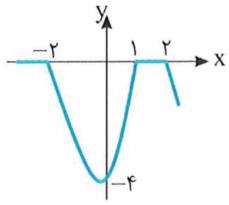


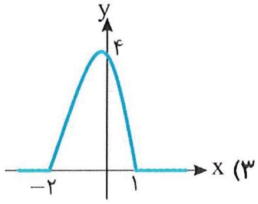


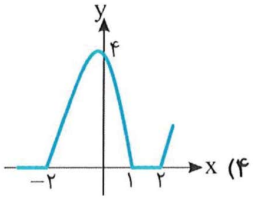
تست ۱۰ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(x)+|f(x)|$ کدام گزینه است؟



۱)


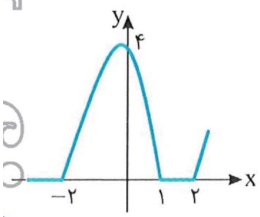
۲)


۳)


۴)


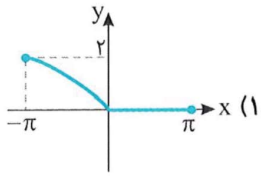
راه‌حل توجه کنید که

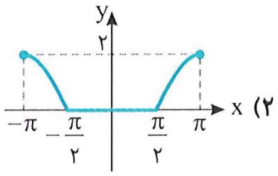
$$g(x)=f(x)+|f(x)|=\begin{cases} f(x)+f(x) & f(x)\geq 0 \\ f(x)-f(x) & f(x)<0 \end{cases}=\begin{cases} 2f(x) & f(x)\geq 0 \\ 0 & f(x)<0 \end{cases}$$

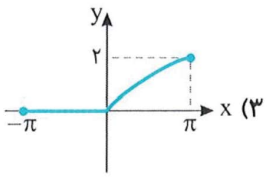


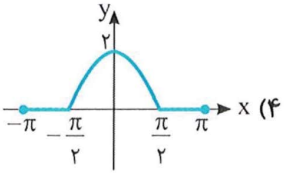
بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار تابع f نامنفی است عرض نقاط روی نمودار تابع f را دو برابر کنیم، در بقیهٔ جاها تابع g تابع ثابت صفر است.

تست ۱۱ نمودار تابع f با دامنهٔ $[-\pi,\pi]$ و ضابطهٔ $f(x)=|\cos x|-\cos x$ کدام گزینه است؟

۱)


۲)


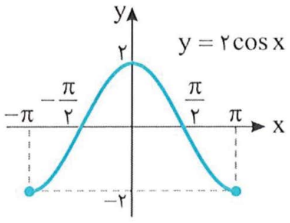
۳)


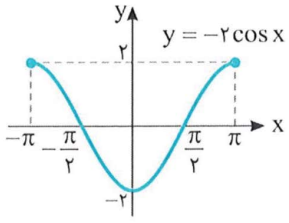
۴)


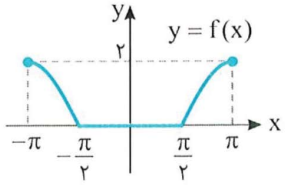
راه‌حل توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} -\cos x-\cos x & -\pi\leq x<-\frac{\pi}{2} \\ \cos x-\cos x & -\frac{\pi}{2}\leq x<\frac{\pi}{2} \\ -\cos x-\cos x & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi \end{cases}=\begin{cases} -2\cos x & -\pi\leq x<-\frac{\pi}{2} \\ 0 & -\frac{\pi}{2}\leq x<\frac{\pi}{2} \\ -2\cos x & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi \end{cases}$$

بنابراین، برای رسم کردن نمودار تابع f کافی است روی بازه‌های $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ و $[\frac{\pi}{2},\pi]$ عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=\cos x$ را دو برابر کنیم، سپس قرینهٔ نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور x رسم کنیم. همچنین نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ خط $y=0$ است.



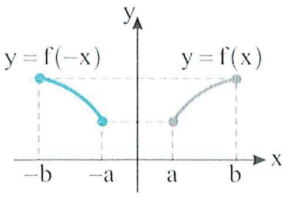




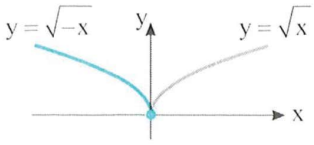
۳۵

رسم نمودار تابع $y=f(-x)$

فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ را داریم. برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. بنابراین نقطهٔ $(-x_0, y_0)$ از نمودار تابع $y=f(-x)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است. برد تابع‌های $y=f(x)$ و $y=f(-x)$ یکسان است.

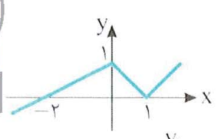


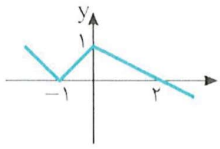
مثال: نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ را از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم می‌کنیم.

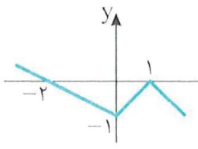


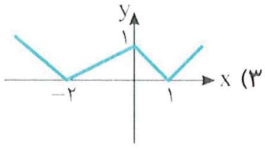
تست ۱۲

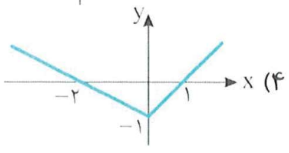
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام گزینه است؟



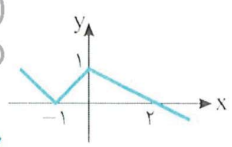
۱)


۲)


۳)


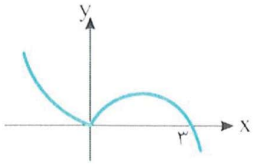
۴)


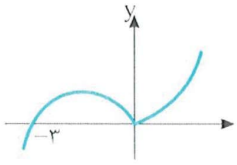
راه‌حل باید نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم.

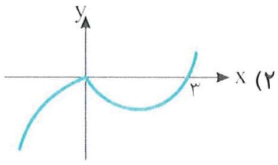


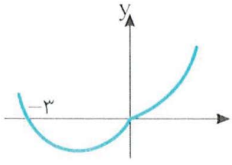
تست ۱۳

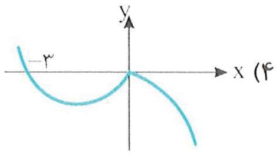
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(-x)$ کدام است؟



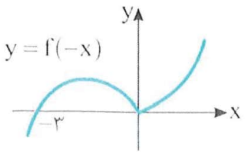
۱)


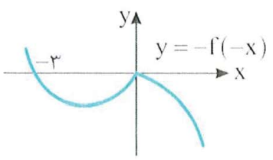
۲)


۳)


۴)


راه‌حل ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ نمودار این تابع را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست بیاید.





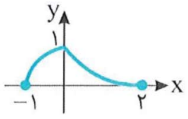
تست ۱۴

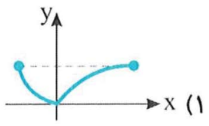
نمودار تابع $f(x)=\sqrt{-x}$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و مجدداً یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

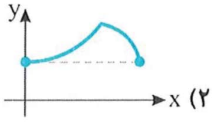
۱) $y=\sqrt{x+2}$ ۲) $y=\sqrt{x}$ ۳) $y=\sqrt{-x+2}$ ۴) $y=\sqrt{x-2}$

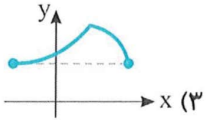
راه‌حل اگر نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x+1)}=\sqrt{-x-1}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-1}$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{(x+1)-1}=\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید.

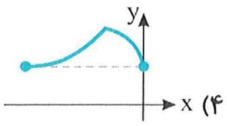
تست ۱۵ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=1+f(1-x)$ کدام گزینه است؟



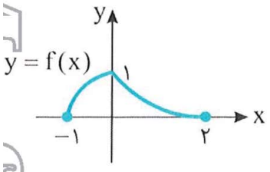
۱) 

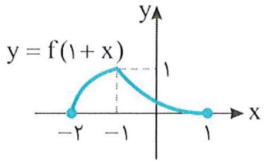
۲) 

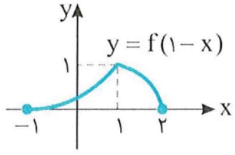
۳) 

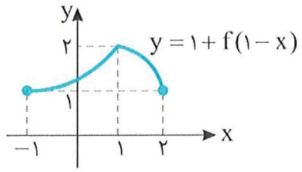
۴) 

راه‌حل ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1+x)$ رسم شود. سپس نمودار تابع به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1-x)$ رسم شود. در آخر نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=1+f(1-x)$ رسم شود.









رسم نمودار تابع $y=f(kx)$

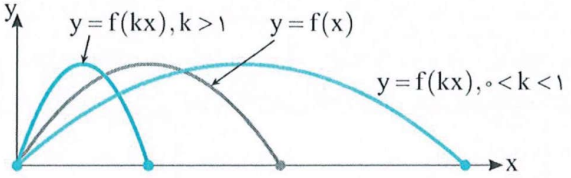
۳۶

فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ را داریم. می‌توانیم نمودار تابع $y=f(kx)$ را به روش زیر رسم کنیم.

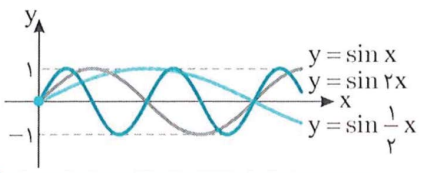
برای رسم کردن نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط روی نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

- اگر $0<k<1$، نمودار تابع $y=f(kx)$ از منبسط شدن نمودار تابع $y=f(x)$ در امتداد محور x با ضریب $\frac{1}{k}$ به‌دست می‌آید.
- اگر $k>1$، نمودار تابع $y=f(kx)$ از منقبض شدن نمودار تابع $y=f(x)$ در امتداد محور x با ضریب $\frac{1}{k}$ به‌دست می‌آید.
- اگر $k<0$، ابتدا نمودار تابع $y=f(|k|x)$ را رسم می‌کنیم، سپس قرینهٔ نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور y رسم می‌کنیم، تا نمودار تابع $y=f(kx)$ به‌دست بیاید.

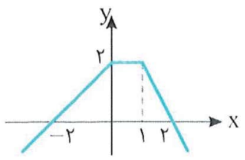
نقطهٔ $(\frac{x_0}{k}, y_0)$ از نمودار تابع $y=f(kx)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار تابع $y=f(x)$ است. برد تابع‌های $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ یکسان است.

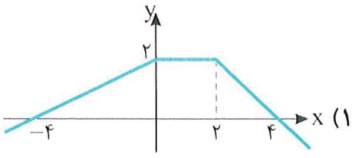


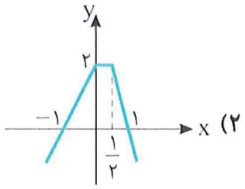
مثال: نمودار توابع $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{1}{2}x$ را از روی نمودار تابع $y=\sin x$ رسم می‌کنیم $(x\geq 0)$.

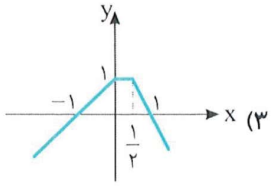


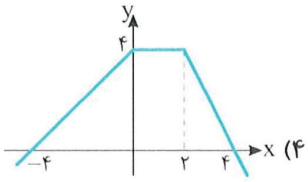
تست ۱۶ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ کدام است؟



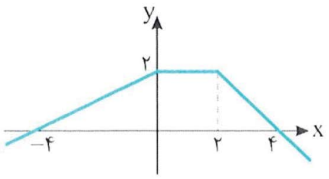
۱) 

۲) 

۳) 

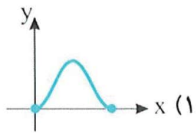
۴) 

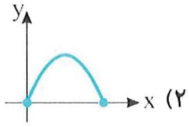
راه‌حل باید طول هر نقطه از نمودار تابع f را در $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$، ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ به‌دست بیاید.

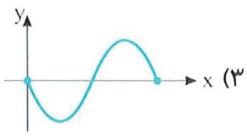


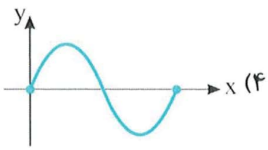
توجه کنید که با این کار، نمودار در امتداد محور طول‌ها منبسط می‌شود.

تست ۱۷ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=1-\cos 2x$ و دامنهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

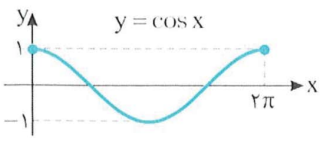
۱) 

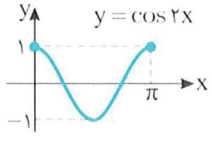
۲) 

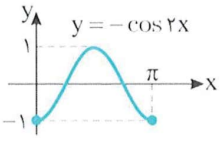
۳) 

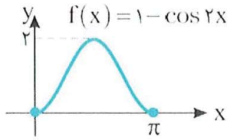
۴) 

راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=\cos 2x$ را روی بازهٔ $[0,\pi]$ رسم می‌کنیم. برای این کار باید طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\cos x$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم. توجه کنید که باید $0\le\frac{1}{2}x\le\pi$، یعنی $0\le x\le 2\pi$. در نتیجه باید نمودار تابع $y=\cos x$ را روی بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنیم. سپس طول هر نقطه روی این نمودار را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم تا نمودار $y=\cos 2x$ به‌دست بیاید. توجه کنید که با این کار نمودار تابع $y=\cos x$ در امتداد محور طول‌ها منقبض می‌شود. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\cos 2x$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.









پس با توجه به گزینه‌های داده شده، گزینهٔ (۱) درست است.

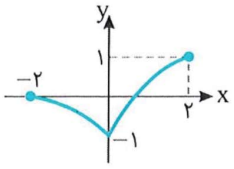
تست ۱۸ طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم و عرض آن‌ها را دو برابر می‌کنیم. سپس نمودار را یک واحد به چپ می‌بریم و در آخر نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

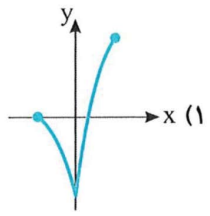
۱) $y=2f(2-2x)$ ۲) $y=2f(1-\frac{x}{2})$ ۳) $y=\frac{1}{2}f(2x+2)$ ۴) $y=\frac{1}{2}f(1-2x)$

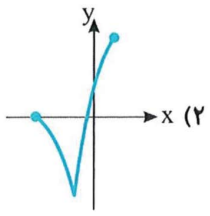
راه‌حل اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(2x)$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2f(2x)$ رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=2f(2(x+1))$ رسم می‌شود. پس اکنون نمودار تابع $y=2f(2x+2)$ به‌دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=2f(-2x+2)$ به‌دست می‌آید.

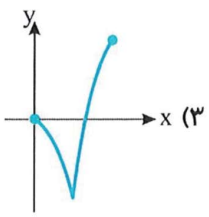
تست ۱۹

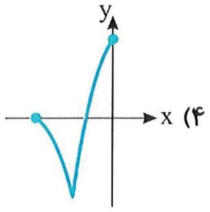
نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=f(x-1)$ کدام است؟



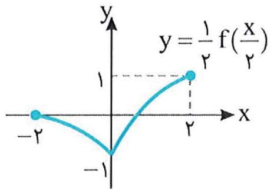
۱) 

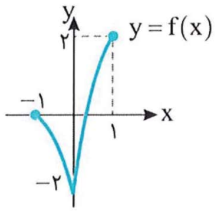
۲) 

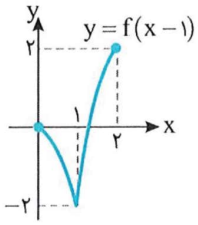
۳) 

۴) 

راه‌حل اگر طول نقاط نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$ را نصف و عرض آن‌ها را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=2(\frac{1}{2}f(\frac{2x}{2}))=f(x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست می‌آید.







تذکر

برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ به روش زیر عمل می‌کنیم.

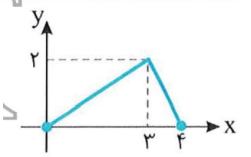
۱) نمودار تابع $y=f(x)$ را b واحد به چپ یا راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+b)$ به‌دست آید.

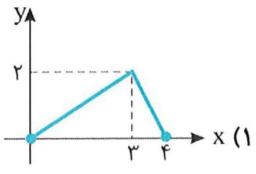
۲) نمودار تابع $y=f(x+b)$ را با ضریب $|a|$ در راستای افقی منقبض یا منبسط می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(|a|x+b)$ حاصل شود.

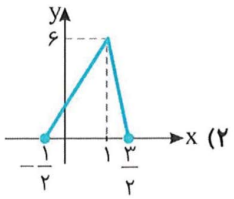
۳) اگر $a<0$، نمودار به‌دست آمده در قسمت (۲) را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم.

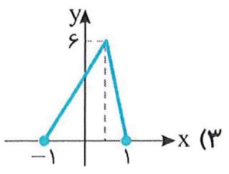
تست ۲۰

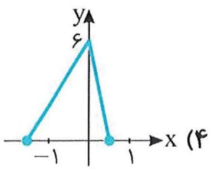
نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=3f(2x+1)$ کدام است؟



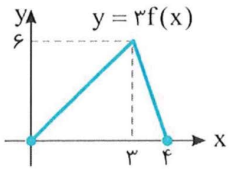
۱) 

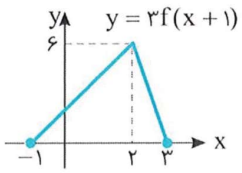
۲) 

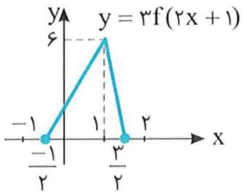
۳) 

۴) 

راه‌حل **راه‌حل اول** ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را سه برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=3f(x)$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=3f(x+1)$ به‌دست بیاید. در آخر، طول هر نقطه روی این نمودار را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=3f(2x+1)$ به‌دست بیاید.







راه‌حل دوم نقطهٔ نظیر $A(3,2)$ روی نمودار تابع f را در تابع $y=3f(2x+1)$ می‌یابیم: $2x+1=3\Rightarrow x=1\ ,\ y=3f(2x+1)=3f(3)=3\times2=6$

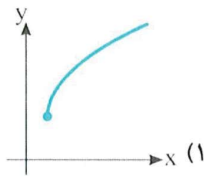
بنابراین نقطهٔ $A'(1,6)$ روی نمودار تابع $y=3f(2x+1)$ است که فقط در گزینهٔ (۲) صدق می‌کند.

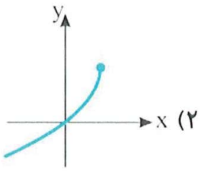
تست ۲۱ نمودار تابع $g(x)=2f(3x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم. سپس طول و عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

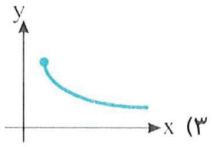
۱) $y=f(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2})+1$ ۲) $y=f(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2})+1$ ۳) $y=f(6x-3)+1$ ۴) $y=f(6x-1)+1$

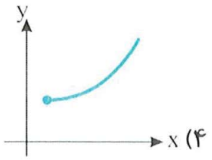
راه‌حل اگر نمودار تابع $y=2f(3x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=2f(3(x-1))=2f(3x-3)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=2f(3x-3)+2$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=2f(3(2x)-3)+2$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=\frac{1}{2}(2f(6x-3)+2)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده به‌صورت $y=f(6x-3)+1$ است.

تست ۲۲ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{2x-1}+1$ کدام است؟

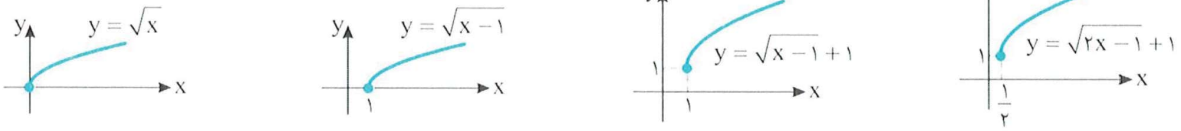
۱) 

۲) 

۳) 

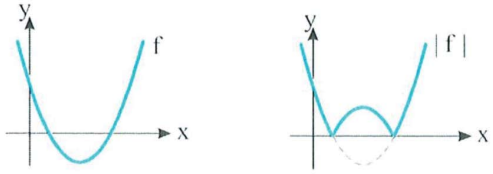
۴) 

راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم. سپس این نمودار را یک واحد به سمت راست و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x-1}+1$ به‌دست آید. اکنون طول نقاط روی نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{2x-1}+1$ به‌دست آید.

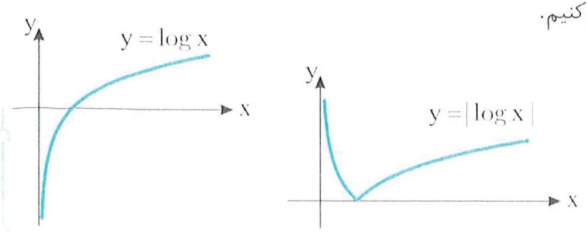


رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$

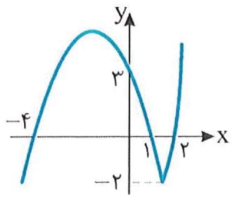
توجه کنید که $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$. بنابراین نمودار تابع $|f|$ به‌ازای x هایی که $f(x)\geq 0$ همان نمودار تابع f است و به‌ازای x هایی که $f(x)<0$، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به محور x است. برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، قرینهٔ قسمت‌هایی را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

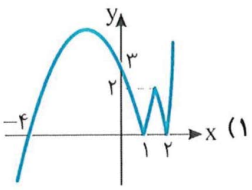


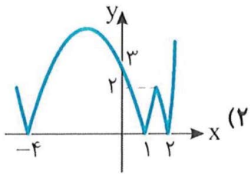
مثال: نمودار تابع $y=|\log x|$ را از روی نمودار تابع $y=\log x$ رسم می‌کنیم.

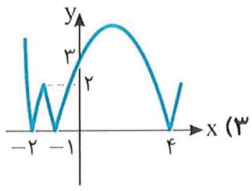


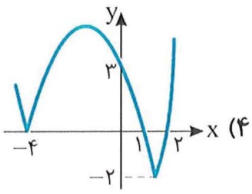
تست ۲۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(x)|$ کدام است؟



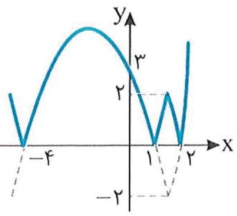
۱)


۲)


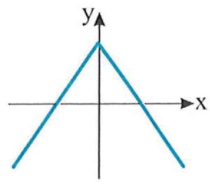
۳)


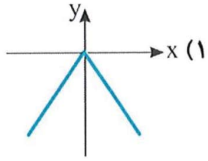
۴)


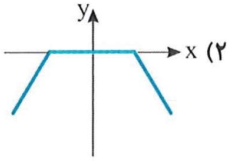
راه‌حل باید قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار f را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم کنیم، سپس قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف کنیم. به این ترتیب نمودار گزینهٔ (۲) به‌دست می‌آید.

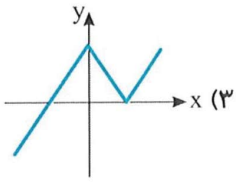


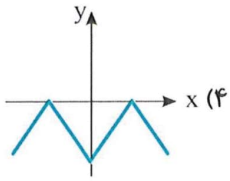
تست ۲۴ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=-|f(x)|$ کدام است؟



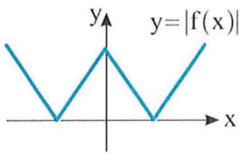
۱)


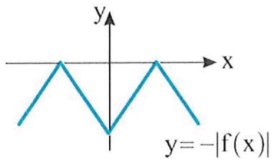
۲)


۳)


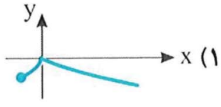
۴)


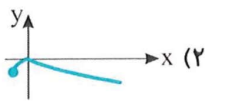
راه‌حل ابتدا قسمت‌هایی از نمودار f را که زیر محور x است نسبت به محور x قرینه می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌دست بیاید. در آخر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-|f(x)|$ به‌دست بیاید.





تست ۲۵ نمودار تابع $y=-|\sqrt{x+1}-1|$ کدام است؟

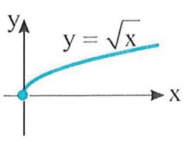
۱)


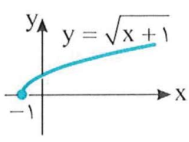
۲)


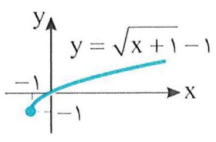
۳)

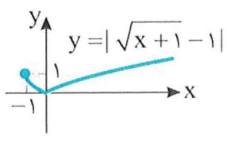

۴)

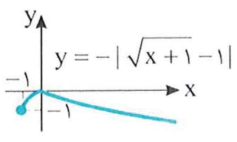

راه‌حل مراحل رسم نمودار در شکل‌های زیر آمده است:



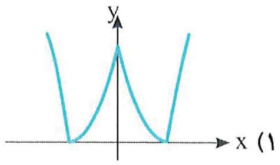


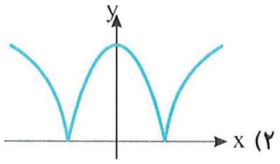


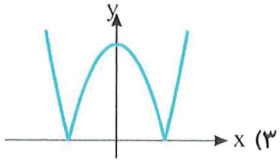


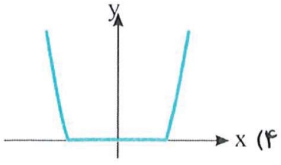


تست ۲۶ نمودار تابع $y=|x-۲||x+۲|$ کدام گزینه است؟

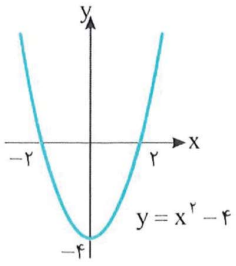
۱) 

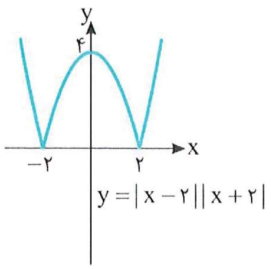
۲) 

۳) 

۴) 

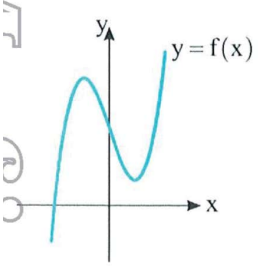
راه‌حل توجه کنید که $y=|x-۲||x+۲|=|(x-۲)(x+۲)|=|x^۲-۴|$. بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=x^۲-۴$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

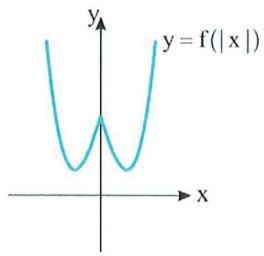




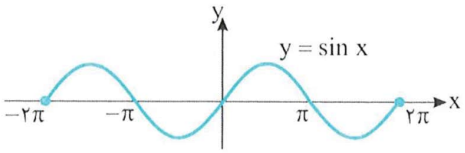
رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$

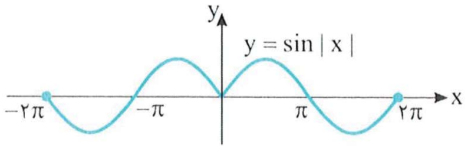
توجه کنید که $f(|x|)=\begin{cases} f(x) & x\geq ۰ \\ f(-x) & x<۰ \end{cases}$. بنابراین نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(|x|)$، به‌ازای $x\geq ۰$ همان نمودار تابع f است و به‌ازای $x<۰$ قرینهٔ قسمت‌های سمت راست محور y نسبت به محور y است. برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(|x|)$ از روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$، قسمت‌هایی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمت‌هایی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.



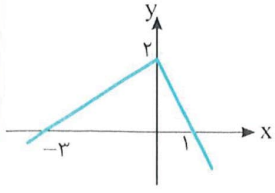


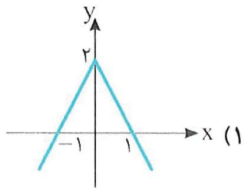
مثال: در شکل زیر نمودار تابع $y=\sin|x|$ را روی بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ رسم کرده‌ایم.

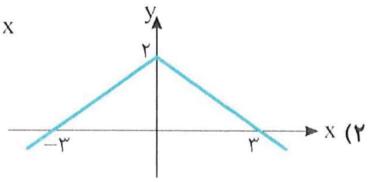


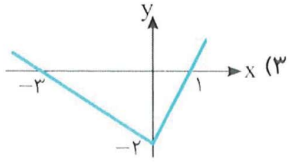


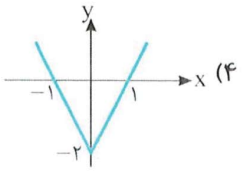
تست ۲۷ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ کدام گزینه است؟



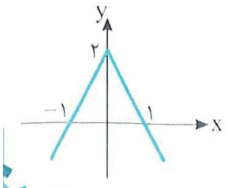
۱) 

۲) 

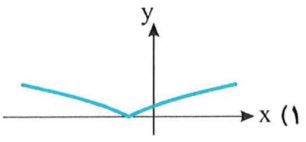
۳) 

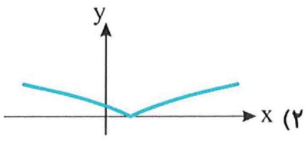
۴) 

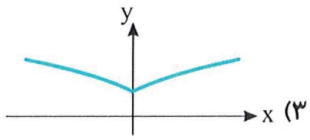
راه‌حل برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$، قسمت‌هایی از نمودار تابع f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمت‌هایی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

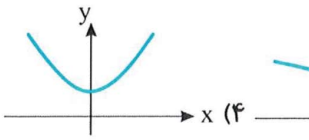


تست ۲۸ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{|x|+1}$ کدام است؟

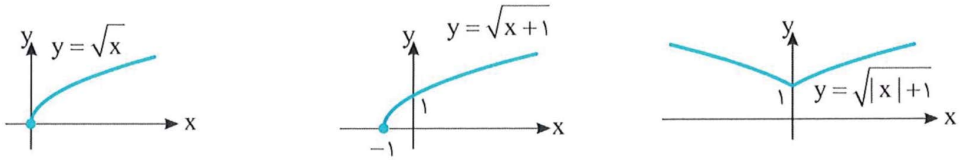
۱) 

۲) 

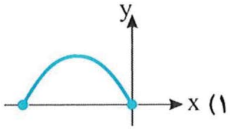
۳) 

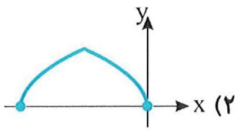
۴) 

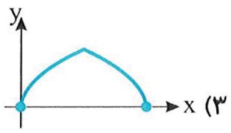
راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+1}$ به‌دست آید. اکنون قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف می‌کنیم و به جای آن قرینهٔ قسمتی از نمودار را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد نسبت به محور عرض‌ها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{|x|+1}$ به‌دست آید.

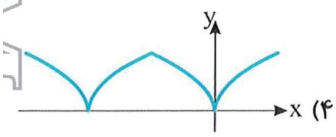


تست ۲۹ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{1-|x+1|}$ کدام است؟

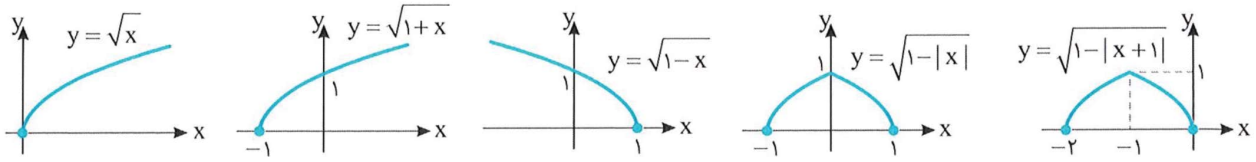
۱) 

۲) 

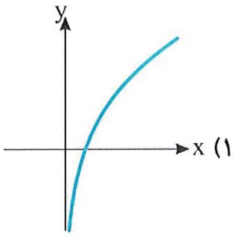
۳) 

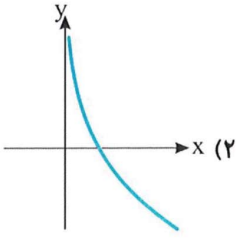
۴) 

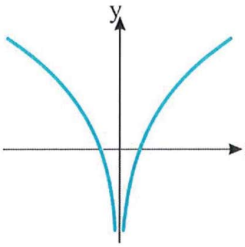
راه‌حل مراحل رسم نمودار به شکل زیر است:

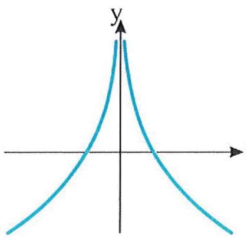


تست ۳۰ نمودار تابع $f(x)=\log(\frac{1}{x^2})$ کدام است؟

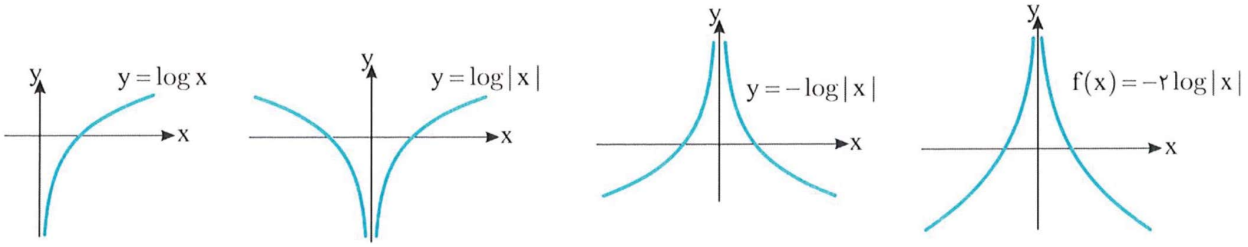
۱) 

۲) 

۳) 

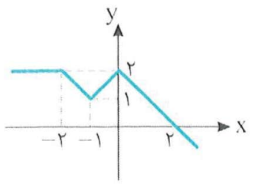
۴) 

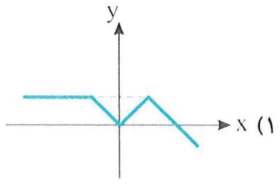
راه‌حل توجه کنید که $f(x)=\log(\frac{1}{x^2})=\log(\frac{1}{|x|^2})=\log|x|^{-2}=-2\log|x|$. بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ این نمودار را که سمت راست محور y است نسبت به محور y به این نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log|x|$ به‌دست بیاید (توجه کنید که هیچ قسمتی از نمودار تابع $y=\log x$ سمت چپ محور y نیست). اکنون این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\log|x|$ به‌دست بیاید. در آخر عرض هر نقطه روی این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.

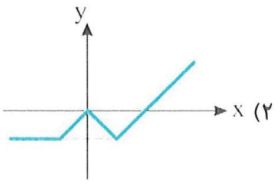


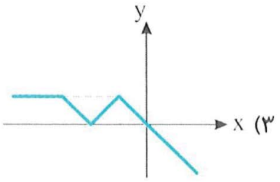
دست‌گرمی

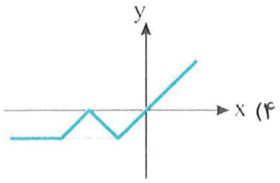
۴۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x-1)$ کدام است؟



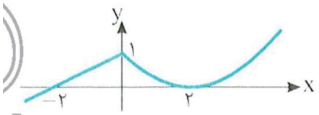
۱) 

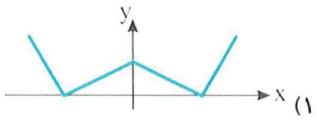
۲) 

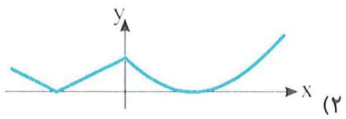
۳) 

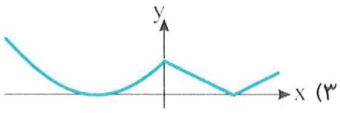
۴) 

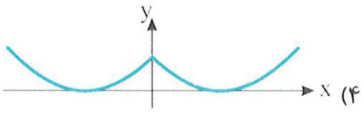
۴۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(-x)|$ کدام است؟



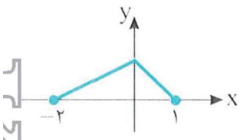
۱) 

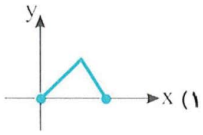
۲) 

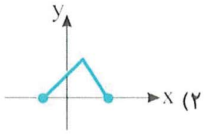
۳) 

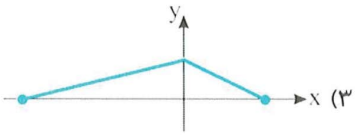
۴) 

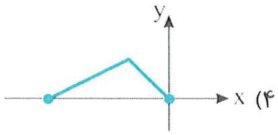
۴۲- نمودار تابع f به شکل زیر است. نمودار تابع $y=f(2x-1)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

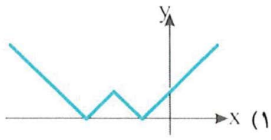
۳) 

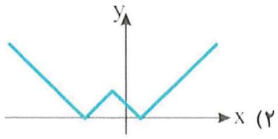
۴) 

۴۳- نمودار تابع $g(x)=f(2x)-1$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

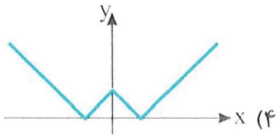
۱) $y=2f(4x-2)-1$ ۲) $y=2f(4x-2)-2$ ۳) $y=2f(4x-1)-1$ ۴) $y=2f(4x-1)-2$

۴۴- نمودار تابع $f(x)=||x+2|-1|$ کدام است؟

۱) 

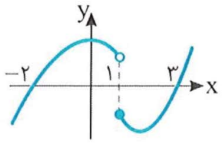
۲) 

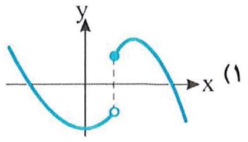
۳) 

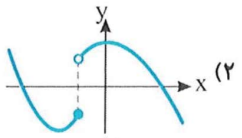
۴) 

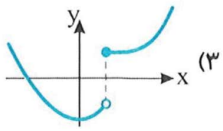
آزمون ۱۹ تبدیل نمودار توابع (۱)

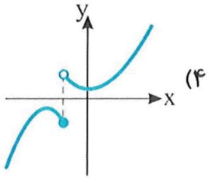
۱۸۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(x)$ کدام است؟



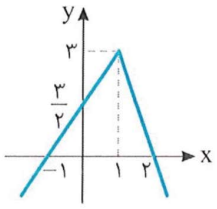
۱) 

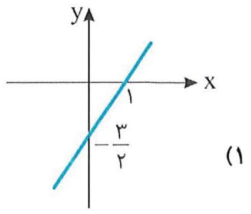
۲) 

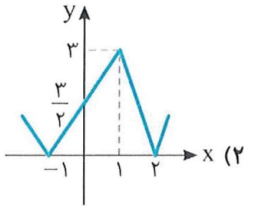
۳) 

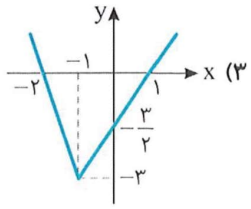
۴) 

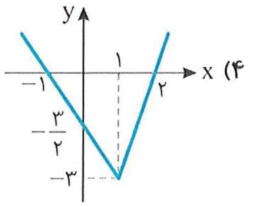
۱۸۲- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(-x)$ کدام است؟



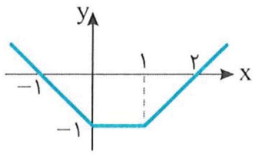
۱) 

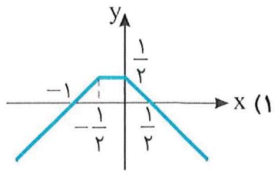
۲) 

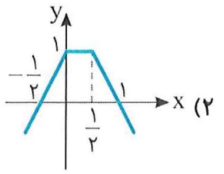
۳) 

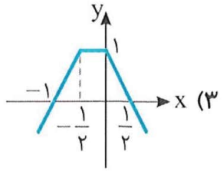
۴) 

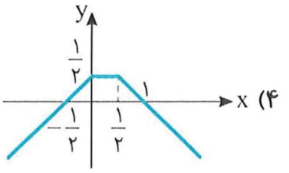
۱۸۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-f(2x)$ کدام است؟



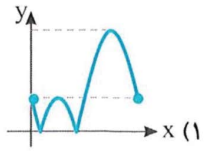
۱) 

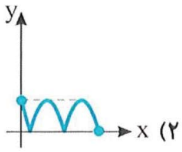
۲) 

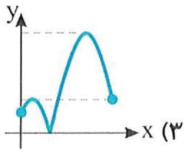
۳) 

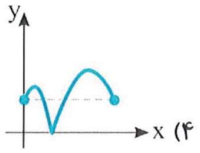
۴) 

۱۸۴- نمودار تابع $y=|2\sin 2x-1|$ در بازهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۸۵- نمودار تابع $f(x)=x^2+7x+9$ را a واحد به سمت راست و سپس a واحد به بالا انتقال می‌دهیم. اگر نمودار اخیر از مبدأ مختصات عبور کند، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۶- طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر می‌کنیم، سپس نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و در آخر نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

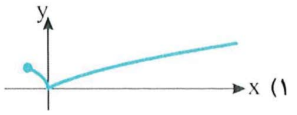
۱) $y=-f(2x-1)$

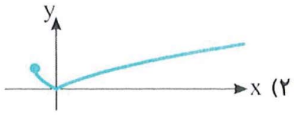
۲) $y=-f(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$

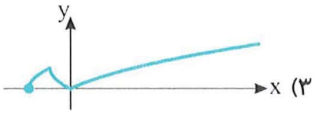
۳) $y=-f(\frac{x}{2}+1)$

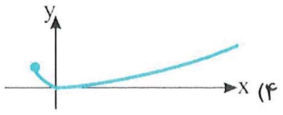
۴) $y=-f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$

۱۸۷- نمودار تابع $f(x)=|\sqrt{x+1}-1|$ کدام است؟

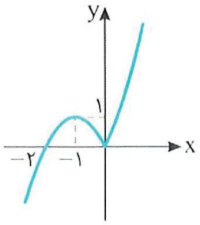
۱) 

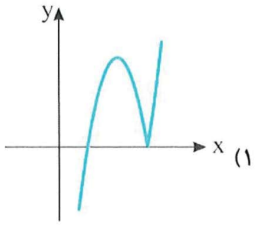
۲) 

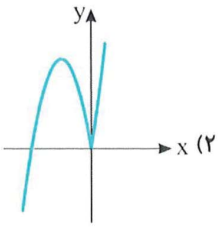
۳) 

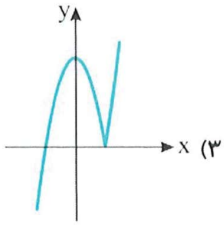
۴) 

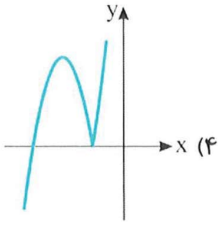
۱۸۸- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=3f(x-1)$ کدام است؟



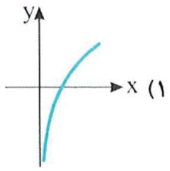
۱) 

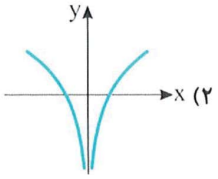
۲) 

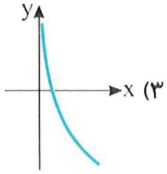
۳) 

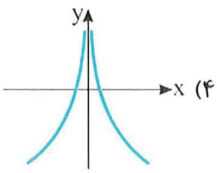
۴) 

۱۸۹- نمودار تابع $f(x)=\log x^2$ کدام است؟

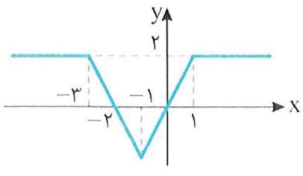
۱) 

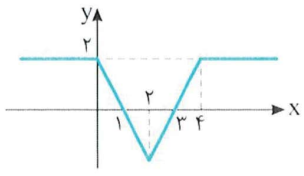
۲) 

۳) 

۴) 

۱۹۰- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟


شکل (۱)


شکل (۲)

۱) $y=f(-x)$

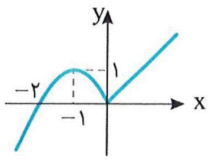
۲) $y=-f(-x)$

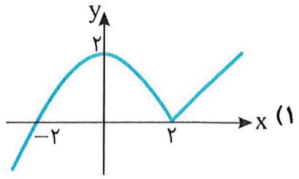
۳) $y=f(-x-1)$

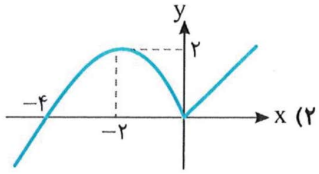
۴) $y=f(-x+1)$

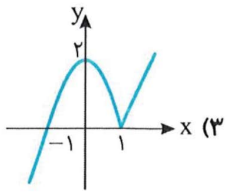
آزمون ۲۰ تبدیل نمودار توابع (۲)

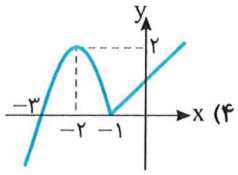
۱۹۱- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=2f(x-1)$ کدام است؟



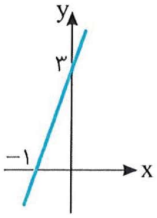
۱)


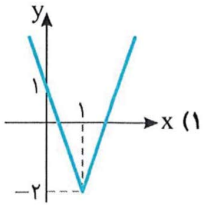
۲)


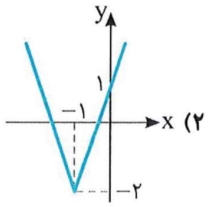
۳)


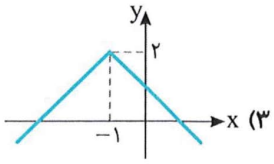
۴)


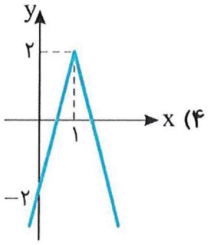
۱۹۲- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(-x)|-2$ کدام است؟



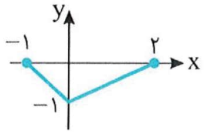
۱)


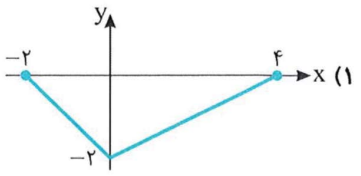
۲)


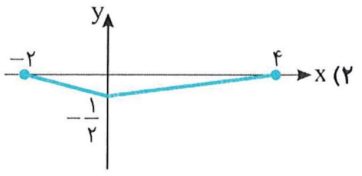
۳)


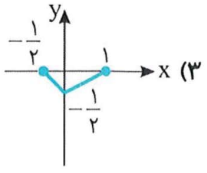
۴)


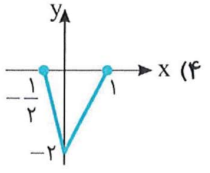
۱۹۳- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{2})$ کدام است؟



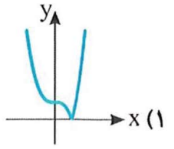
۱)


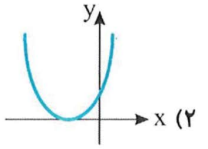
۲)


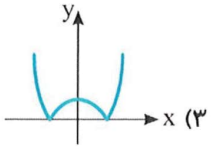
۳)


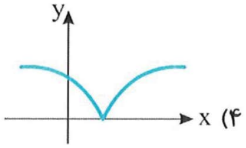
۴)


۱۹۴- نمودار تابع $f(x)=|x^3-1|$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۹۵- نمودار تابع $f(x)=-x^2+x-2$ را یک واحد به سمت راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار جدید محور x را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟

۱) ۱ و ۲ ۲) ۱ و ۳ ۳) ۲ و ۳ ۴) ۳ و ۴

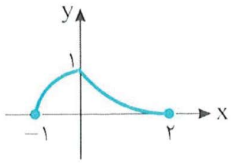
۱۹۶- طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم و عرض آن‌ها را سه برابر می‌کنیم. سپس نمودار را دو واحد به سمت چپ می‌بریم و در آخر نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

۱) $y=۳f(۴-۲x)$ ۲) $y=۳f(۲-۲x)$ ۳) $y=-۳f(۲x+۲)$ ۴) $y=-۳f(۲x+۴)$

۱۹۷- نمودار تابع $f(x)=|x||x-۲|$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ را قطع می‌کند؟

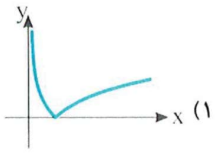
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

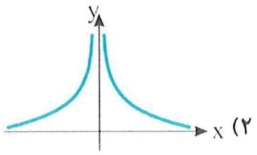
۱۹۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=۱+f(۱-x)$ چند نقطهٔ مشترک با نمودار تابع f دارد؟

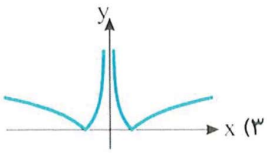


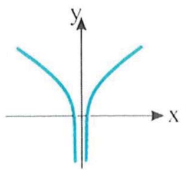
۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) صفر

۱۹۹- نمودار تابع $y=|\log|x||$ کدام است؟

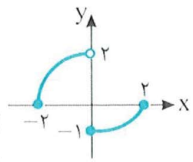
۱)


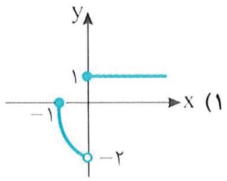
۲)


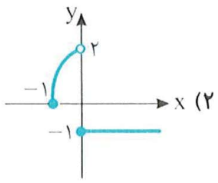
۳)


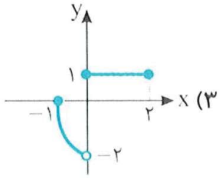
۴)


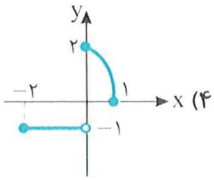
۲۰۰- نمودار تابع f به شکل زیر است. نمودار تابع $g(x)=-f(x-|x|)$ کدام است؟



۱)


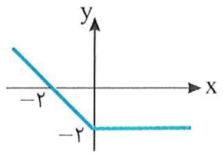
۲)


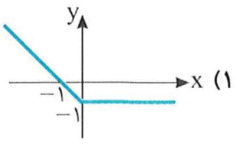
۳)


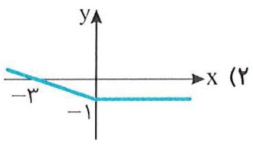
۴)


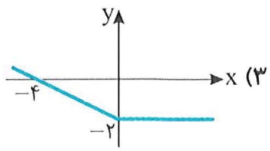
آزمون ۲۱ تبدیل نمودار توابع (۳)

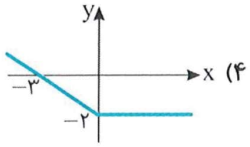
۲۰۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ کدام است؟



۱)


۲)


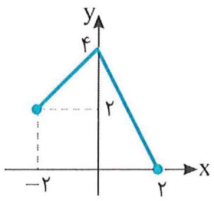
۳)


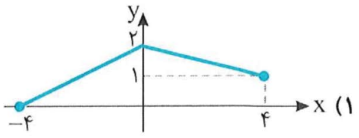
۴)


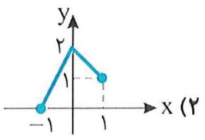
۲۰۲- نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

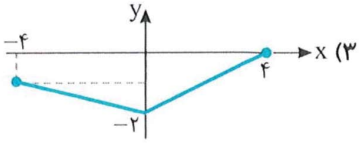
۱) $y=-f(x)-۱$ ۲) $y=-f(x-۱)$ ۳) $y=f(-x-۱)$ ۴) $y=f(-x+۱)$

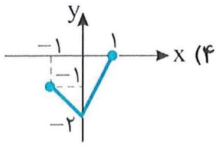
۲۰۳- نمودار تابع f به شکل زیر است. نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}f(۲x)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۲۰۴- نمودار تابع f را a واحد به سمت راست و سپس a واحد به بالا انتقال می‌دهیم. نمودار انتقال یافته از مبدأ مختصات می‌گذرد. ضابطهٔ تابع f کدام می‌تواند باشد؟ $(a>۰)$

۱) $f(x)=-x^۲+۳x-۲$ ۲) $f(x)=x^۲+۱$

۳) $f(x)=-x^۲-۱$ ۴) $f(x)=x^۲+۵x+۴$

۲۰۵- اگر مساحت ناحیهٔ محصور به نمودار تابع $f(x)=|x-۲a^۲|-a^۲$ و محور طول‌ها برابر ۴ باشد، مقدار a کدام است؟

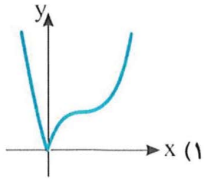
۱) $\pm\sqrt[۴]{۲}$ ۲) $\pm\sqrt{۲}$ ۳) ±۲ ۴) $\pm۲\sqrt{۲}$

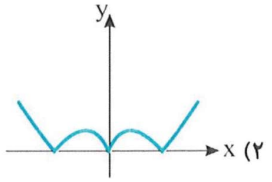
۲۰۶- نمودار تابع $g(x)=f(x-۲)$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور طول‌ها و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در آخر طول نقاط را نصف می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

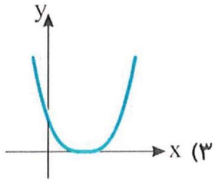
۱) $y=۱-f(-۲x-۳)$ ۲) $y=-۱+f(۲x+۱)$

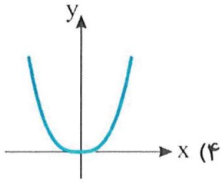
۳) $y=۱-f(۲x-۳)$ ۴) $y=-۱+f(۲x-۳)$

۲۰۷- نمودار تابع $f(x)=|x^۲(x-۳)+۳x|$ کدام است؟

۱)


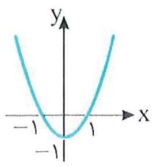
۲)


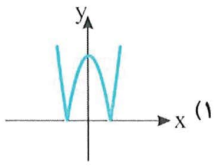
۳)


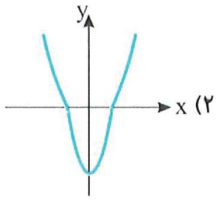
۴)


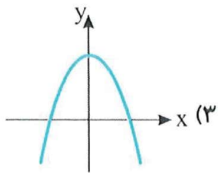
سؤال
۲۰۱
۲۰۲
۲۰۳
۲۰۴
۲۰۵
۲۰۶
۲۰۷
۲۰۸
۲۰۹
۲۱۰

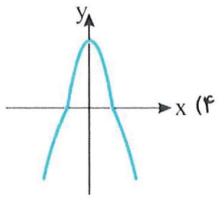
۲۰۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-2f(x)+|f(x)|$ کدام است؟



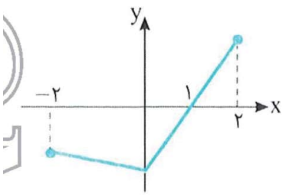
۱)


۲)


۳)


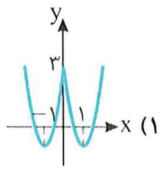
۴)


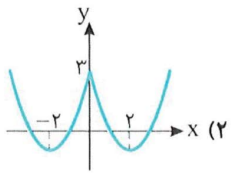
۲۰۹- نمودار تابع $y=f(1-x)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $g(x)=f(2x-1)$ را رسم می‌کنیم. دو نمودار چند نقطهٔ برخورد دارند؟

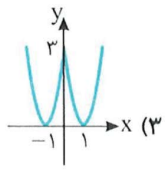


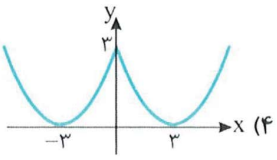
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۲۱۰- نمودار تابع $f(x)=x^2-4|x|+3$ کدام است؟

۱)


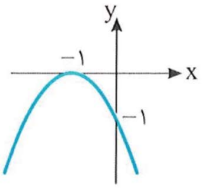
۲)


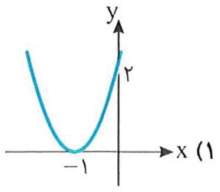
۳)


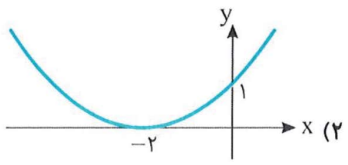
۴)


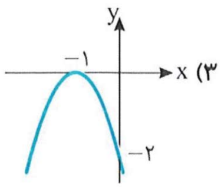
آزمون ۲۲ تبدیل نمودار توابع (۴)

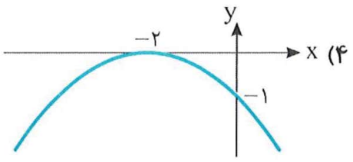
۲۱۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(x)|-f(x)$ کدام است؟



۱)


۲)


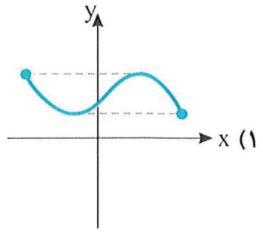
۳)


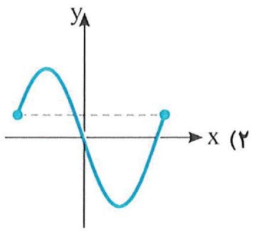
۴)


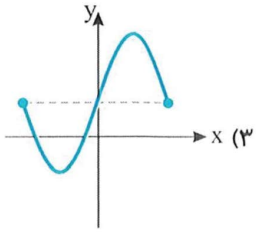
۲۱۲- طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر می‌کنیم، سپس نمودار به‌دست آمده را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده کدام است؟

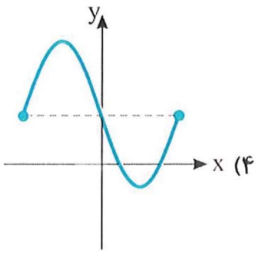
۱) $y=f(2x+1)$ ۲) $y=f(2x+2)$ ۳) $y=f(\frac{x}{2}+1)$ ۴) $y=f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$

۲۱۳- نمودار تابع f با دامنهٔ $[-\pi,\pi]$ و ضابطهٔ $f(x)=2-3\sin x$ کدام است؟

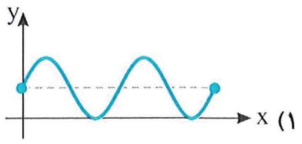
۱)


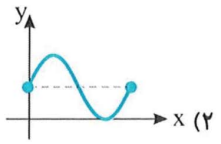
۲)


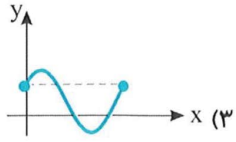
۳)


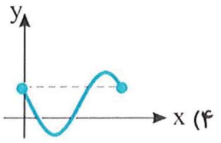
۴)


۲۱۴- نمودار تابع f با دامنهٔ $[0,2\pi]$ و ضابطهٔ $f(x)=\sin 2x+1$ کدام است؟

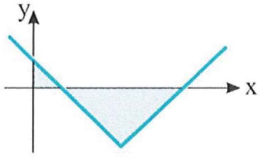
۱)


۲)


۳)


۴)


۲۱۵- در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=|x-a|-2$ رسم شده است. اگر مساحت قسمت رنگی برابر $\frac{9}{2}$ باشد، مقدار $f(\frac{1}{a})$ کدام است؟

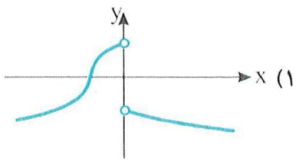


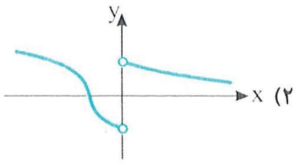
۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

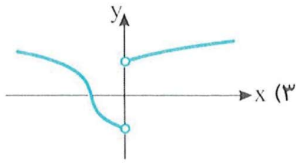
۲۱۶- نمودار تابع $y=\sqrt{1-x}+1$ را دو واحد در کدام جهت انتقال دهیم تا هر دو محور مختصات را قطع کند؟

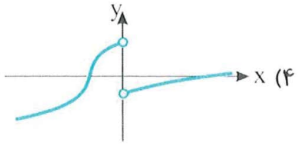
۱) چپ ۲) راست ۳) بالا ۴) پایین

۲۱۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt[۳]{x+۱}$ کدام است؟

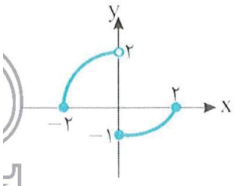
۱) 

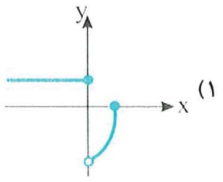
۲) 

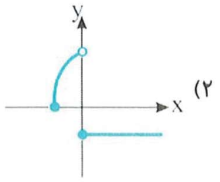
۳) 

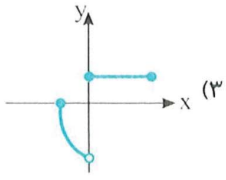
۴) 

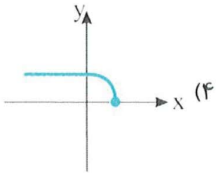
۲۱۸- نمودار تابع f به شکل زیر است. نمودار تابع $g(x)=-f(x+|x|)$ کدام است؟



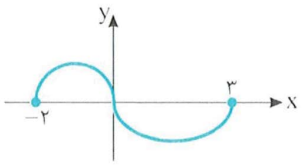
۱) 

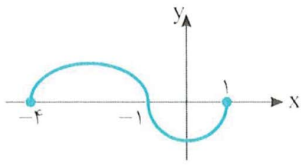
۲) 

۳) 

۴) 

۲۱۹- شکل (۱) نمودار تابع f است. شکل (۲) نمودار کدام تابع است؟


شکل (۱)

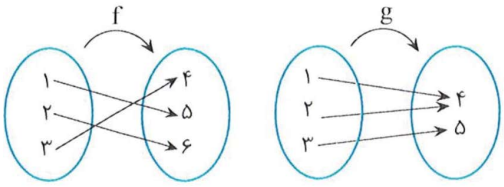

شکل (۲)

۱) $y=f(x-۱)$ ۲) $y=-f(x-۱)$ ۳) $y=-f(۱-x)$ ۴) $y=-f(-۱-x)$

۲۲۰- نمودار تابع $y=\sin(kx)$ روی بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ پنج‌بار محور طول‌ها را قطع می‌کند. حداقل مقدار k کدام است؟ $(k>۰)$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

درس نهم: توابع یک‌به‌یک



تابع‌های f و g با نمودارهای پیکانی روبه‌رو را در نظر بگیرید:
از روی نمودارها معلوم است که به هر عضو دامنهٔ f عضوی متمایز از بقیه در برد f نظیر شده است، اما در مورد تابع g چنین نیست، زیرا عضوهای ۱ و ۲ هر دو به عضو ۴ نظیر شده‌اند. تابع‌هایی مانند تابع f را یک‌به‌یک می‌گوییم.

تعریف

تابع f را یک‌به‌یک می‌نامند، به شرطی که به هر دو عضو متمایز از دامنهٔ آن، دو عضو متمایز از برد f نظیر شوند.

تست ۱ کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $\{(2,3),(4,2),(1,3)\}$
۲) $\{(1,4),(2,5),(3,1),(5,4)\}$
۳) $\{(1,-1),(2,1),(3,-1),(4,2)\}$
۴) $\{(1,-2),(-2,1),(-1,3),(3,2)\}$

راه‌حل تابع گزینهٔ (۱) به دلیل وجود دو زوج مرتب $(2,3)$ و $(1,3)$، تابع گزینهٔ (۲) به دلیل وجود دو زوج مرتب $(1,4)$ و $(5,4)$ و تابع گزینهٔ (۳) به دلیل وجود دو زوج مرتب $(1,-1)$ و $(3,-1)$ یک‌به‌یک نیستند. تابع گزینهٔ (۴) یک‌به‌یک است.

معیار جبری یک‌به‌یک بودن تابع

تابع f یک‌به‌یک است، به شرطی که به ازای هر دو عضو دلخواه از دامنهٔ f مانند x_1 و x_2،
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
به طور معادل، تابع f یک‌به‌یک است، به شرطی که به ازای هر دو عضو دلخواه از دامنهٔ f مانند x_1 و x_2،
$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

تذکر معمولاً استفاده از معیار دوم برای اثبات یک‌به‌یک بودن تابع ساده‌تر است.

مثال: تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ $f(x)=2x-1$ یک‌به‌یک است، زیرا اگر x_1 و x_2 دو عدد حقیقی باشند،
$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1 \Rightarrow 2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

مثال: تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ $f(x)=x^2$ یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(1)=f(-1)$، اما $1 \neq -1$.

مثال: تابع f با دامنهٔ $[0,+\infty)$ و ضابطهٔ $f(x)=x^2$ یک‌به‌یک است، زیرا
$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=x_2 \quad (\text{چون } x_1, x_2 > 0)$$

تست ۲ **اگر f تابعی یک‌به‌یک با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(x^2-2x)=f(3x-4)$ کدام است؟**

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

راه‌حل با توجه به اینکه تابع f یک‌به‌یک است، از تساوی $f(x^2-2x)=f(3x-4)$ نتیجه می‌شود $x^2-2x=3x-4$. مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^2-5x+4=0$ را می‌خواهیم که برابر ۵ است.

تست ۳ **تابع $f=\{(a+b,1),(2,3),(4,1),(a-b,3),(5,6)\}$ یک‌به‌یک است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟**

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

راه‌حل چون زوج مرتب‌های $(4,1)$ و $(a+b,1)$ در تابع وجود دارند، پس $a+b=4$ و چون زوج مرتب‌های $(2,3)$ و $(a-b,3)$ در تابع وجود دارند، پس $a-b=2$. بنابراین
$$\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow a=3, b=1 \Rightarrow \frac{a}{b}=3$$

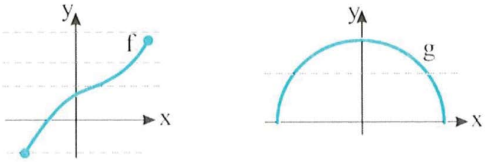
معیار هندسی یک‌به‌یک بودن تابع

تابع f یک‌به‌یک است، به شرطی که هر خط موازی محور x ، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

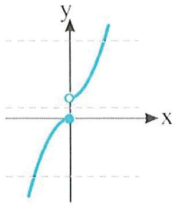
مثال: تابع‌های f و g را که نمودار آن‌ها در شکل زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



هر خط موازی محور x نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع f یک‌به‌یک است. اما چون خطی موازی محور x وجود دارد که نمودار تابع g را در دو نقطه قطع کرده است. پس تابع g یک‌به‌یک نیست.



مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ -x^2 & x\le 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع در شکل مقابل رسم شده است.

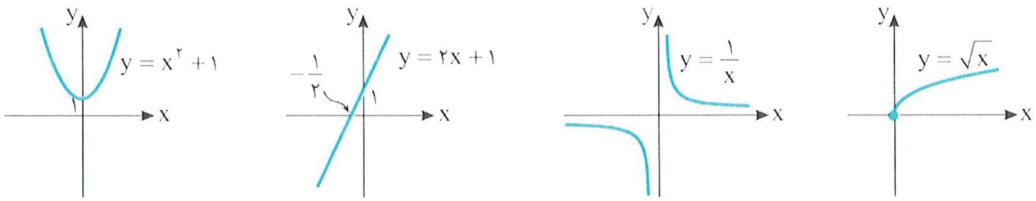


از روی این نمودار معلوم است که f تابعی یک‌به‌یک است.

تست ۴ کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

۱) $y=\sqrt{x}$ ۲) $y=\frac{1}{x}$ ۳) $y=2x+1$ ۴) $y=x^2+1$

راه‌حل نمودار تابع‌های داده شده به‌صورت زیر است:

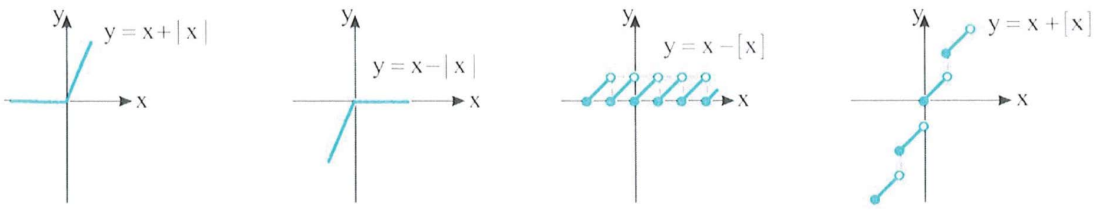


واضح است که خطوطی مانند $y=2$ ، $y=3$ و ... نمودار تابع $y=x^2+1$ را در دو نقطه قطع می‌کنند. پس این تابع یک‌به‌یک نیست.

تست ۵ کدام یک تابعی یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x+[x]$ ۲) $y=x-[x]$ ۳) $y=x-|x|$ ۴) $y=x+|x|$

راه‌حل نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:



واضح است که تابع $y=x+[x]$ یک‌به‌یک است.

نکته ۴۳

برای اینکه ثابت کنیم تابعی یک‌به‌یک نیست، کافی است دو عدد مانند x_1 و x_2 در دامنهٔ تابع پیدا کنیم که $x_1 \neq x_2$ اما $f(x_1)=f(x_2)$.

توجه کنید که برای پیدا کردن عددهای x_1 و x_2 می‌توانیم عددی مانند k پیدا کنیم که معادلهٔ $f(x)=k$ دست کم دو جواب داشته باشد.

مثال: تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ یک‌به‌یک نیست. در حقیقت معادلهٔ $f(x)=0$ دو جواب دارد:

$$f(x)=0 \Rightarrow x-\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0, x=1$$

تست ۶ **کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟**

۱) $y=x-\sqrt[3]{x}$ ۲) $y=x+\sqrt{x}$ ۳) $y=x\sqrt{x}$ ۴) $y=\frac{x}{\sqrt{x}}$

راه‌حل تابع $f(x)=x-\sqrt[3]{x}$ یک‌به‌یک نیست. زیرا $f(-1)=f(0)=f(1)=0$. بنابراین گزینه (۱) درست است.

نکته ۴۴ **شرط یک‌به‌یک بودن تابع هموگرافیک**

تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq 0$ یک‌به‌یک است. اگر $ad-bc=0$، آن‌گاه این تابع با یک تابع ثابت برابر است و یک‌به‌یک نیست.

تست ۷ **تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{kx+2}{x+k-1}$ یک‌به‌یک است. مقدار k کدام نمی‌تواند باشد؟**

۱) ± 2 ۲) $2, -1$ ۳) $-2, 1$ ۴) ± 1

راه‌حل تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc=0$، تابعی ثابت است و یک‌به‌یک نیست. پس

$$k(k-1)-2=0 \Rightarrow k^2-k-2=0 \Rightarrow k=-1 \ , \ k=2$$

تذکر اگر بخواهیم یک‌به‌یک بودن تابعی را روی یک بازه (یا مجموعه) بررسی کنیم، ابتدا دامنهٔ تابع را به آن بازه (یا مجموعه) محدود می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم دامنهٔ تابع آن بازه (یا مجموعه) است.

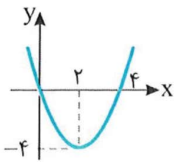
نکته ۴۵ **شرط یک‌به‌یک بودن تابع درجهٔ دوم**

تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ روی $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا روی $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یک‌به‌یک است.

تست ۸ **تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^2-4x$ و دامنهٔ $[m, +\infty)$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار m کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل نمودار تابع $y=x^2-4x$ به شکل مقابل است. واضح است که اگر دامنهٔ تابع را به $x \geq 2$ محدود کنیم تابع یک‌به‌یک خواهد بود. البته اگر دامنهٔ تابع را مثلاً $[4, +\infty)$ بگیریم، هم تابع یک‌به‌یک خواهد بود. پس حداقل مقدار m برای اینکه تابع با دامنهٔ $[m, +\infty)$ یک‌به‌یک باشد، برابر ۲ است.



نکته ۴۶ **شرط یک‌به‌یک بودن تابع‌های چندضابطه‌ای**

اگر تابع g با دامنهٔ D_1 و تابع h با دامنهٔ D_2 یک‌به‌یک باشند و اشتراک برد تابع g با برد تابع h تهی باشد، آن‌گاه تابع f که به‌صورت

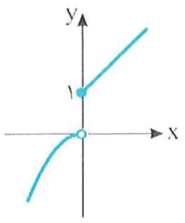
$$f(x)=\begin{cases} g(x) & x \in D_1 \\ h(x) & x \in D_2 \end{cases}$$

تعریف می‌شود، یک‌به‌یک است.

تست ۹ کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ x^2 & x<0 \end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq 0 \\ x^2 & x<0 \end{cases}$

راه‌حل نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$ به‌صورت روبه‌رو است که توسط هر خط موازی محور طول‌ها حداکثر در یک نقطه



قطع می‌شود. پس این تابع یک‌به‌یک است. توجه کنید که توابع $g(x)=x+1, x\geq 0$ و $h(x)=-x^2, x<0$ توابعی یک‌به‌یک هستند و برد تابع g با برد تابع h عضو مشترک ندارند: $R_g=[1,+\infty), \quad R_h=(-\infty,0)$

در گزینهٔ (۱)، $f(-1)=f(0)=1$. در گزینهٔ (۲)، $f(-1)=-1=f(0)$ و در گزینهٔ (۴)، $f(-1)=f(2)=1$. بنابراین توابع این گزینه‌ها یک‌به‌یک نیستند.

تست ۱۰ تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\geq 2 \\ x & x<2 \\ k-x & x<2 \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq 2$ ۲) $k\leq 3$ ۳) $k\geq \frac{5}{2}$ ۴) $k\geq 3$

راه‌حل توجه کنید که اگر $x\geq 2$، آن‌گاه تابع $g(x)=\frac{1}{x}$ یک‌به‌یک است، و اگر $x<2$، آن‌گاه تابع $h(x)=k-x$ یک‌به‌یک است. پس اگر اشتراک برد این تابع‌ها تهی باشد، تابع f یک‌به‌یک خواهد بود.

$$x\geq 2 \Rightarrow 0<\frac{1}{x}\leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0<g(x)\leq \frac{1}{2} \Rightarrow R_g=(0,\frac{1}{2}]$$

$$x<2 \Rightarrow -x>-2 \Rightarrow k-x>k-2 \Rightarrow h(x)>k-2 \Rightarrow R_h=(k-2,+\infty)$$

اگر بخواهیم $R_g\cap R_h=\varnothing$، باید $k-2\geq \frac{1}{2}$. بنابراین $k\geq \frac{5}{2}$.

دست‌گرمی

۴۵- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $\{(2,2),(3,4),(5,1),(7,2)\}$ ۲) $\{(1,2),(2,2),(3,4),(4,6)\}$

۳) $\{(1,3),(2,4),(5,7),(6,1)\}$ ۴) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,3)\}$

۴۶- اگر تابع $f=\{(a,1),(10,3),(4-a,1),(1+b,3),(4,4)\}$ یک‌به‌یک باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۴۷- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x^2, x\leq 1$ ۲) $f(x)=-x^2, x\geq -1$

۳) $f(x)=1-x^2, x\leq 0$ ۴) $f(x)=x-x^2, x\geq 0$

۴۸- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ 2x+k & x<1 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>1$ ۲) $k\leq 1$ ۳) $k>0$ ۴) $k\leq 0$

آزمون ۲۳ توابع یک‌به‌یک (۱)

۲۲۱- تابع $f=\{(a^۲,۱),(۹,۱),(۳a+b,۲),(۶,۲),(a,-۳b)\}$ یک‌به‌یک است. مقدار $a-b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۱۵ ۲) -۱۲ ۳) ۶ ۴) صفر

۲۲۲- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x^۲$ ۲) $y=|x|$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=[x]$

۲۲۳- کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

۱) $y=\sqrt{x+۱}$ ۲) $y=۲x+۳$ ۳) $y=\frac{۱}{x-۱}$ ۴) $y=x-[x]$

۲۲۴- کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

۱) $y=x^۳-\sqrt{x}$ ۲) $y=x^۳+\sqrt{x}$ ۳) $y=x^۳\sqrt{x}$ ۴) $y=\frac{x}{\sqrt{x}}$

۲۲۵- تابع $f(x)=|۲x-۴|+|x|$ روی کدام بازه یک‌به‌یک نیست؟

۱) $(-\infty,۲]$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

۲۲۶- اگر تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{x-۲}$ یک‌به‌یک نباشد، مقدار $f(۳)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۲۲۷- تابع $f(x)=-x^۲+۳x$ روی بازهٔ $(-\infty,a]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۲۲۸- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}x+۲ & x\geq ۰\\ x+۳ & x<۰\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x\geq ۰\\ ۲-x & x<۰\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}x-۲ & x\geq ۰\\ ۱-x & x<۰\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}۱-x & x\geq ۰\\ ۲-x & x<۰\end{cases}$

۲۲۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۴ & x\geq ۱\\ ۳x+k & x<۱\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حداکثر مقدار ممکن k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۰- تابع $f(x)=\begin{cases}۱-۲\sqrt{x} & x>۰\\ ۴k-x & x\leq ۰\end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq\frac{۱}{۴}$ ۲) $k\leq\frac{۱}{۴}$ ۳) $k\geq\frac{۱}{۲}$ ۴) $k\leq\frac{۱}{۲}$

سؤال
۲۲۱
۲۲۲
۲۲۳
۲۲۴
۲۲۵
۲۲۶
۲۲۷
۲۲۸
۲۲۹
۲۳۰

آزمون ۲۴ توابع یک‌به‌یک (۲)

سؤال	گام
۲۳۱	۳۰ ۴۲ ۴۳
۲۳۲	۳۰ ۴۲ ۳۳۱
۲۳۳	۴۱ ۴۳
۲۳۴	۴۲ ۳۳۲
۲۳۵	۴۴
۲۳۶	۴۲ ۴۶
۲۳۷	۴۵
۲۳۸	۴۱
۲۳۹	۴۱ ۳۰۲
۲۴۰	۴۱ ۴۳

۲۳۱- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ ۲) $f(x)=\frac{x^۲}{|x|}$ ۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=x^۲|x|$

۲۳۲- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x+|x|$ ۲) $f(x)=x-|x|$ ۳) $f(x)=۲x+|x|$ ۴) $f(x)=x+۲|x|$

۲۳۳- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x^۳+x+۱$ ۲) $f(x)=x^۳-x$

۳) $f(x)=x^۳+x^۲|x|$ ۴) $f(x)=x^۳-۲x^۲$

۲۳۴- تابع $f(x)=|x-۱|-|x-۳|$ روی بازهٔ $[a,b]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار ممکن $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۵- به ازای چند مقدار مختلف k تابع $f(x)=\frac{k^۳x+۴}{kx+۱}$ یک‌به‌یک نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۶- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲ & x<۰\\ x^۲+۲ & x\geq ۰\end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases}۲-x^۲ & x<۰\\ x^۲+۲ & x\geq ۰\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}۱-x^۲ & x<۰\\ x^۲ & x\geq ۰\end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases}-x^۲ & x<۰\\ x^۲-۲ & x\geq ۰\end{cases}$

۲۳۷- تابع $f(x)=-x^۲+kx$ با دامنهٔ $(-\infty,۳]$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار ممکن k کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) -۶

۲۳۸- تابع $f(x)=x-k\sqrt{x}$ یک‌به‌یک است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq ۰$ ۲) $k\geq ۱$ ۳) $۰\leq k\leq ۱$ ۴) $k\leq ۰$

۲۳۹- اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $f(x^۳+۳)-f(x^۲+۱)=۰$ چند عضو دارد؟

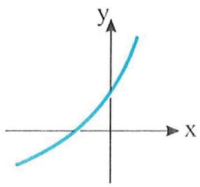
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۴۰- اگر f تابعی یک‌به‌یک با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه کدام تابع قطعاً یک‌به‌یک نیست؟

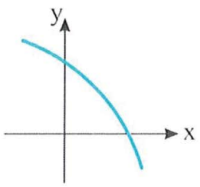
۱) $g(x)=|f(x)|$ ۲) $g(x)=f(|x|)$ ۳) $g(x)=\sqrt{f(x)}$ ۴) $g(x)=f(\sqrt{x})$

درس دهم: توابع یکنوا

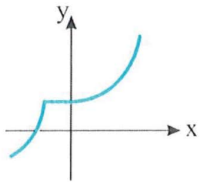
به نمودارهای زیر توجه کنید.



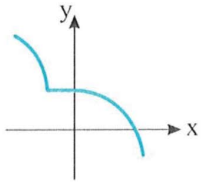
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

در نمودار (الف) با افزایش مقادیر x (از چپ به راست) مقادیر تابع افزایش می‌یابند. یعنی نمودار تابع بالا می‌رود. این نمودار متعلق به تابعی اکیداً صعودی است.

در نمودار (ب) با افزایش مقادیر x (از چپ به راست) مقادیر تابع کاهش می‌یابند. یعنی نمودار تابع پایین می‌رود. این نمودار متعلق به تابعی اکیداً نزولی است.

در نمودار (پ) با افزایش مقادیر x (از چپ به راست) مقادیر تابع کاهش نمی‌یابند (ثابت می‌مانند یا افزایش می‌یابند). این نمودار متعلق به تابعی صعودی است.

در نمودار (ت) با افزایش مقادیر x (از چپ به راست) مقادیر تابع افزایش نمی‌یابند (ثابت می‌مانند یا کاهش می‌یابند). این نمودار متعلق به تابعی نزولی است.

۴۷

تعریف

- تابع f را روی مجموعهٔ $A\ (A\subseteq D_f)$ اکیداً صعودی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

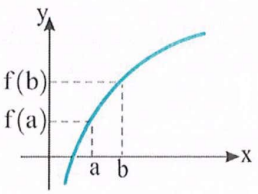
$$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$$

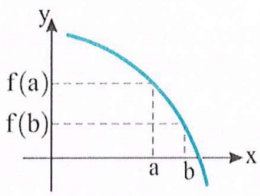
اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

- تابع f را روی مجموعهٔ $A\ (A\subseteq D_f)$ اکیداً نزولی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$$

اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است.





۴۸

تعریف

- تابع f را روی مجموعهٔ $A\ (A\subseteq D_f)$ صعودی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

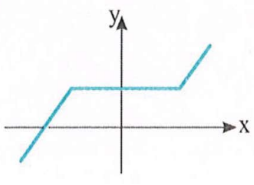
$$a<b\Rightarrow f(a)\le f(b)$$

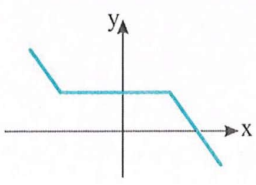
اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش صعودی است.

- تابع f را روی مجموعهٔ $A\ (A\subseteq D_f)$ نزولی می‌نامند، به شرطی که به‌ازای هر a و b در مجموعهٔ A،

$$a<b\Rightarrow f(a)\ge f(b)$$

اگر $A=D_f$، می‌گوییم تابع f روی دامنه‌اش نزولی است.





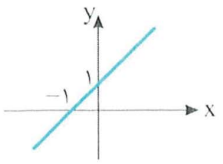
۴۹

تعریف

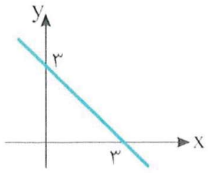
- اگر تابع f روی مجموعهٔ $A\ (A\subseteq D_f)$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A اکیداً یکنواست.
- اگر تابع f روی مجموعهٔ $A\ (A\subseteq D_f)$ صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ A یکنواست.

مثال:

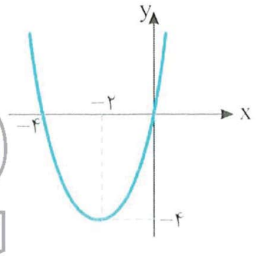
- تابع $y=x+1$ روی $\mathbb{R}$ یک تابع اکیداً صعودی است. زیرا با افزایش x، y افزایش می‌یابد. یعنی نمودار آن با افزایش x رو به بالا حرکت می‌کند.



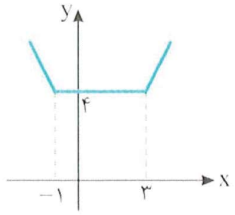
- تابع $y=-x+3$ روی $\mathbb{R}$ یک تابع اکیداً نزولی است. زیرا با افزایش x، y کاهش می‌یابد. یعنی نمودار آن با افزایش x رو به پایین حرکت می‌کند.



- تابع $y=x^2+4x$ در دامنهٔ خود یک تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست. اما این تابع روی بازهٔ $(-\infty,-2]$ اکیداً نزولی است. زیرا در این بازه نمودار آن با افزایش x رو به پایین حرکت می‌کند و روی بازهٔ $[-2,+\infty)$ اکیداً صعودی است زیرا در این بازه با افزایش x، y افزایش می‌یابد.



- نمودار تابع $y=|x+1|+|x-3|$ به شکل مقابل است. این تابع روی بازهٔ $[3,+\infty)$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $(-\infty,-1]$ اکیداً نزولی است. روی بازهٔ $[-1,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی نیست، ولی صعودی است. زیرا با افزایش x، y کاهش پیدا نمی‌کند. در واقع یا ثابت می‌ماند یا افزایش می‌یابد. به همین ترتیب روی بازهٔ $(-\infty,3]$ تابع اکیداً نزولی نیست، ولی نزولی است.



تذکر وقتی می‌گوییم «تابع f صعودی یا اکیداً صعودی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش صعودی یا اکیداً صعودی است و وقتی می‌گوییم «تابع f نزولی یا اکیداً نزولی است» یعنی این تابع روی دامنه‌اش نزولی یا اکیداً نزولی است.

تست ۱ کدام تابع صعودی است؟

۱) $f=\{(1,2),(2,1),(3,2)\}$ ۲) $g=\{(-1,1),(2,1),(3,2)\}$ ۳) $h=\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$ ۴) $k=\{(2,0),(0,1),(1,-2)\}$

راه‌حل فقط تابع g صعودی است.

تست ۲ تابع $f=\{(1,2),(2,m-1),(3,7-m)\}$ صعودی است. حدود m کدام است؟

۱) $3\le m\le 4$ ۲) $3<m<4$ ۳) $m\ge 4$ ۴) $m\le 3$

راه‌حل با توجه به تعریف تابع صعودی می‌توان نوشت:

$$1<2<3\Rightarrow f(1)\le f(2)\le f(3)\Rightarrow 2\le m-1\le 7-m$$

$$2\le m-1\Rightarrow m\ge 3,\quad m-1\le 7-m\Rightarrow 2m\le 8\Rightarrow m\le 4$$

بنابراین $3\le m\le 4$.

تذکر تابع ثابت روی هر زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش هم صعودی است و هم نزولی. همچنین، تابعی که روی مجموعه‌ای هم صعودی است و هم نزولی، روی این مجموعه تابعی ثابت است.

تست ۳ تابع $f=\{(1,a-2),(2,3a+4),(3,2a-b)\}$ هم صعودی است و هم نزولی. مقدار $a+b$ کدام است؟

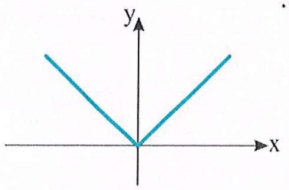
۱) صفر ۲) -2 ۳) -4 ۴) -5

راه‌حل تابعی که هم صعودی است و هم نزولی، تابعی ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین

$$f(1)=f(2)=f(3)\Rightarrow a-2=3a+4=2a-b\Rightarrow a=-3,\ b=-1\Rightarrow a+b=-4$$

۵۱

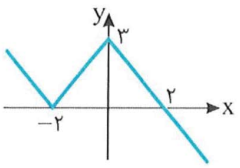
تعریف اگر تابع f روی مجموعهٔ $A\subseteq D_f$ نه صعودی باشد و نه نزولی، روی این مجموعه تابعی **غیریکنوا**است.



تابعی غیریکنوا روی $\mathbb{R}$

تذکر وقتی می‌گوییم «تابع f غیریکنواست» یعنی این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست. ممکن است تابعی روی دامنه‌اش غیریکنوا باشد، اما روی زیرمجموعه‌هایی از دامنه‌اش یکنوا باشد.

تست ۴ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. تابع f روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟



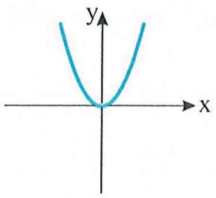
۱) $(-۲,۰)$ ۲) $(-۲,۲)$

۳) $(-\infty,-۲)$ ۴) $(۰,+\infty)$

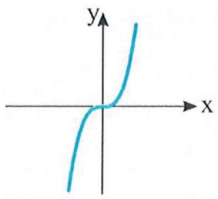
راه‌حل تابع f روی بازه‌های $[-۲,-\infty)$ و $(۰,+\infty]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[-۲,۰]$ اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(-۲,۰)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[-۲,۰]$ است.

۵۲

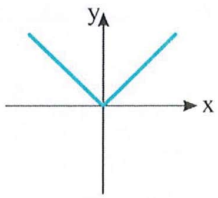
نکته یکنوایی برخی از توابع معروف را می‌توان از روی نمودار آن‌ها مشخص کرد.



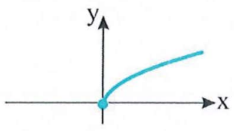
$y=x^۲$, غیریکنوا



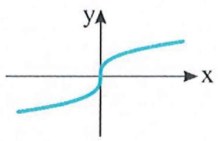
$y=x^۳$, اکیداً صعودی



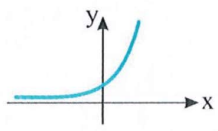
$y=|x|$, غیریکنوا



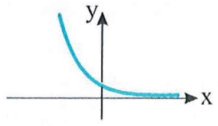
$y=\sqrt{x}$, اکیداً صعودی



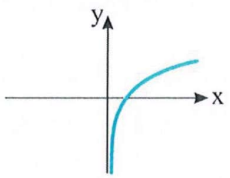
$y=\sqrt[۳]{x}$, اکیداً صعودی



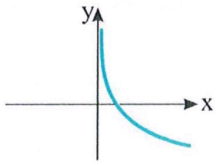
$y=a^x, a>۱$, اکیداً صعودی



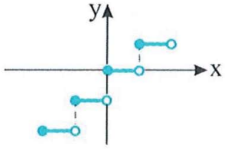
$y=a^x, ۰<a<۱$, اکیداً نزولی



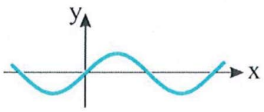
$y=\log_a x, a>۱$, اکیداً صعودی



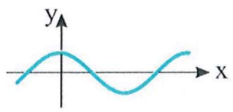
$y=\log_a x, ۰<a<۱$, اکیداً نزولی



$y=[x]$, صعودی



$y=\sin x$, غیریکنوا



$y=\cos x$, غیریکنوا

تست ۵ تابع نمایی $f(x)=(۳k+۱)^x$ اکیداً نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $۰<k<\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}<k<۰$

۳) $-\frac{۱}{۳}<k<\frac{۱}{۳}$ ۴) $k>۰$

راه‌حل اگر تابع نمایی $y=a^x$ اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه $۰<a<۱$. بنابراین $۰<۳k+۱<۱$، پس $-\frac{۱}{۳}<k<۰$.

تست ۶ تابع $f(x)=\log_{(k+1)}(x+2)$ اکیداً صعودی است. حدود k کدام است؟

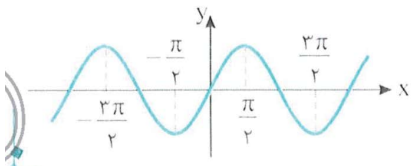
۱) $k>0$ ۲) $k>1$ ۳) $0<k<1$ ۴) $-1<k<0$

راه‌حل در تابع $y=\log_a x$ اگر $a>1$، آن‌گاه تابع اکیداً صعودی است. پس $k+1>1$ و در نتیجه $k>0$. توجه کنید که نمودار تابع $y=\log_{(k+1)}(x+2)$ از انتقال نمودار تابع $y=\log_{(k+1)} x$ به اندازهٔ دو واحد به چپ به‌دست می‌آید و دو تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن مانند هم هستند.

تست ۷ تابع $f(x)=\sin x$ روی بازهٔ $[a,\frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار ممکن a کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

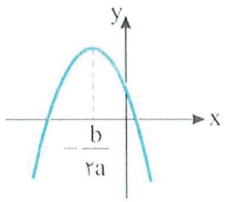
راه‌حل با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ معلوم می‌شود این تابع روی هر بازهٔ $[a,\frac{3\pi}{2}]$ که $\frac{\pi}{2}\le a<\frac{3\pi}{2}$، نیز اکیداً نزولی است. پس حداقل مقدار a برابر $\frac{\pi}{2}$ است.



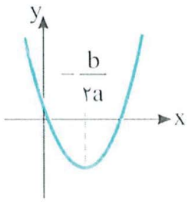
نکته — یکنوایی تابع درجهٔ دوم

تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست.

- اگر $a>0$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است.
- اگر $a<0$، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ اکیداً نزولی است.



$f(x)=ax^2+bx+c\,,\,a<0$

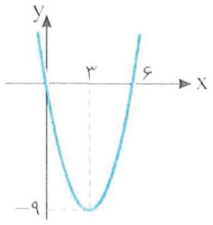


$f(x)=ax^2+bx+c\,,\,a>0$

تست ۸ تابع $f(x)=x^2-6x$ روی بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار ممکن a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۳ ۴) -3

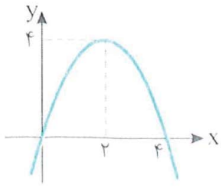
راه‌حل تابع $f(x)=x^2-6x$ روی بازهٔ $(-\infty,3]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[3,+\infty)$ اکیداً صعودی است. توجه کنید که این تابع روی هر بازهٔ $[a,+\infty)$ که $a\ge 3$ نیز اکیداً صعودی است. بنابراین حداقل مقدار ممکن a برابر ۳ است.



تست ۹ بزرگ‌ترین مقدار k که به‌ازای آن تابع f با دامنهٔ $(-\infty,k]$ و ضابطهٔ $f(x)=-x^2+4x$ اکیداً صعودی است کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل طول رأس سهمی به معادلهٔ $y=-x^2+4x$ برابر است با $x=-\frac{b}{2a}=2$. بنابراین از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که این تابع روی بازهٔ $(-\infty,2]$ اکیداً صعودی است. توجه کنید که این تابع روی هر بازهٔ $(-\infty,k]$ که $k\le 2$، نیز اکیداً صعودی است. بنابراین بزرگ‌ترین مقدار k برابر با ۲ است.



۵۴

نکته

یکنوایی برخی توابع را می‌توان به کمک رسم نمودار آن‌ها بررسی کرد.

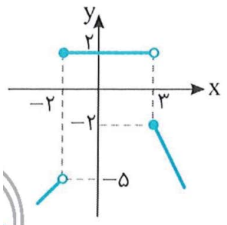
تست ۱۰

تابع $f(x)=\begin{cases} x-3 & x<-2 \\ 2 & -2\le x<3 \\ -2x+4 & x\ge 3 \end{cases}$ روی بازهٔ $(-\infty,a)$ صعودی است. بیشترین مقدار ممکن a کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

شکل تابع به‌صورت مقابل است. تابع $y=x-3$ روی بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً صعودی است. تابع $y=2$ روی بازهٔ $[-2,3)$ تابعی ثابت است، پس هم نزولی است هم صعودی. تابع $y=-2x+4$ روی بازهٔ $[3,+\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(-\infty,3)$ و هر بازهٔ دیگر به‌صورت $(-\infty,a)$ که $a\le 3$، صعودی است، پس بیشترین مقدار ممکن a برابر ۳ است.



تست ۱۱

کدام تابع روی $\mathbb{R}$ یکنوا نیست؟

۱) $y=x|x|$ ۲) $y=x+|x|$

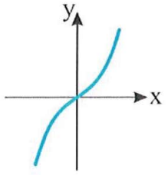
۳) $y=|x|-x$ ۴) $y=x|x-1|$

راه‌حل

نمودار توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

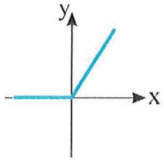
گزینهٔ (۱) تابع $y=x|x|$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

$$y=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$



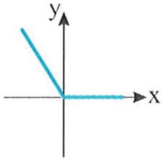
گزینهٔ (۲) تابع $y=x+|x|$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است.

$$y=x+|x|=\begin{cases} 2x & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$



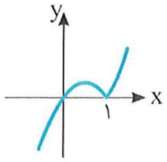
گزینهٔ (۳) تابع $y=|x|-x$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است.

$$y=|x|-x=\begin{cases} 0 & x\ge 0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$$



گزینهٔ (۴) تابع $y=x|x-1|$ روی $\mathbb{R}$ غیریکنواست.

$$y=x|x-1|=\begin{cases} x^2-x & x\ge 1 \\ -x^2+x & x<1 \end{cases}$$



تست ۱۲

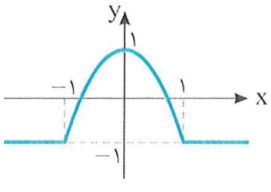
تابع $f(x)=|x^2-1|-x^2$ روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار ممکن $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) ۲

راه‌حل

ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1-x^2 & x^2\ge 1 \\ -x^2+1-x^2 & x^2\le 1 \end{cases}=\begin{cases} -1 & x\ge 1 \text{ یا } x\le -1 \\ -2x^2+1 & -1\le x\le 1 \end{cases}$$

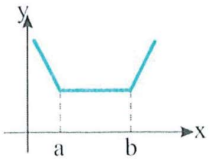


بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-1,0]$ و هر بازهٔ دیگر به‌صورت $[a,b]$ که $-1\le a<b\le 0$، اکیداً صعودی است. پس برای اینکه $b-a$ حداکثر مقدار را داشته باشد، $a=-1$، $b=0$ و در نتیجه $b-a=1$.

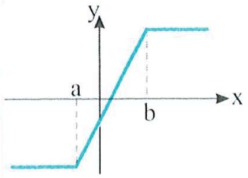
۵۵

نکته

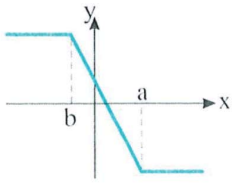
- نمودار تابع $f(x)=|x-a|+|x-b|$ به شکل مقابل است $(a<b)$. واضح است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty, b]$ نزولی، روی بازهٔ $[a, +\infty)$ اکیداً نزولی، روی بازهٔ $[b, +\infty)$ صعودی، روی بازهٔ $[a, b]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[a, b]$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) است.



- اگر $a<b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[a, b]$ اکیداً صعودی، روی بازه‌های $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ صعودی است.



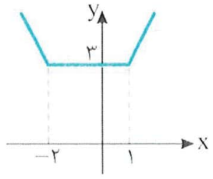
- اگر $a>b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت مقابل است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[b, a]$ اکیداً نزولی، روی بازه‌های $(-\infty, b]$ و $[a, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی (ثابت) و روی $\mathbb{R}$ نزولی است.



تست ۱۳ تابع $f(x)=|x-1|+|x+2|$ روی بازهٔ $[a, +\infty)$ صعودی است. کمترین مقدار ممکن a کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۲-

راه‌حل نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty, -2]$ و هر بازه‌ای به‌صورت $[a, +\infty)$ که $a\geq -2$، صعودی است. بنابراین کمترین مقدار ممکن a برابر -2 است.



تست ۱۴ به‌ازای چه مقادیری از m، تابع $f(x)=|x-m+1|-|x-3m+3|$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

۱) $m\leq 1$ ۲) $m\geq 1$ ۳) $m>1$ ۴) $m<1$

راه‌حل نمودار تابع $y=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت ⎍ یا ⎎ است. که حالت اول به شرط $a<b$ و حالت دوم به شرط $a>b$ رخ می‌دهد. اکنون دقت کنید که $f(x)=|x-\underbrace{(m-1)}_{a}|-|x-\underbrace{(3m-3)}_{b}|$. بنابراین برای آنکه تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد، باید $a\geq b$:

$$m-1\geq 3m-3\Rightarrow 2m\leq 2\Rightarrow m\leq 1$$

توجه کنید که به ازای $m=1$، تابع به‌صورت $f(x)=0$ درمی‌آید که روی $\mathbb{R}$ نزولی است.

۵۶

توابع اکیداً یکنوا و نابرابری‌ها

اگر تابع f روی بازهٔ I اکیداً صعودی باشد، به‌ازای هر a و b در I، $a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$

اگر تابع f روی بازهٔ I اکیداً نزولی باشد، به‌ازای هر a و b در I، $a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$

اکنون توجه کنید که

۱) تابع $y=x^3$ و در حالت کلی تابع $y=x^{2n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی هستند. پس $a<b\Rightarrow a^3<b^3$ ، $a<b\Rightarrow a^{2n+1}<b^{2n+1}$

در واقع می‌توان دو طرف هر نابرابری را بدون تغییر جهت آن به توان فرد رساند.

۲) تابع‌های $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ و در حالت کلی تابع‌های $y=x^{2n}$ و $y=\sqrt[2n]{x}$ $(n\in\mathbb{N})$ روی بازهٔ $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی هستند. پس به‌ازای هر دو عدد حقیقی و نامنفی مانند a و b،

$$\begin{cases} 0\leq a<b\Rightarrow a^2<b^2 \\ 0\leq a<b\Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\leq a<b\Rightarrow a^{2n}<b^{2n} \\ 0\leq a<b\Rightarrow \sqrt[2n]{a}<\sqrt[2n]{b} \end{cases}$$

۳) تابع $y=x^{۲}$ و در حالت کلی تابع $y=x^{۲n}\ (n\in\mathbb{N})$ روی بازهٔ $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی هستند. پس به‌ازای هر دو عدد حقیقی و غیر مثبت مانند a و b،

$$a<b\leq ۰\Rightarrow a^{۲}>b^{۲}\ ,\quad a<b\leq ۰\Rightarrow a^{۲n}>b^{۲n}$$

در واقع وقتی دو طرف نابرابری غیر مثبت است، با توان زوج رساندن دو طرف، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

۴) اگر $a>۱$، تابع $y=\log_a x$ روی $(۰,+\infty)$ و تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی هستند. پس

$$۰<x_۱<x_۲\Rightarrow \log_a x_۱<\log_a x_۲\ ,\quad x_۱<x_۲\Rightarrow a^{x_۱}<a^{x_۲}$$

در حقیقت، در این حالت، با لگاریتم گرفتن از دو طرف نابرابری یا اثر دادن تابع نمایی، جهت نابرابری تغییر نمی‌کند.

۵) اگر $۰<a<۱$، تابع $y=\log_a x$ روی $(۰,+\infty)$ و تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی هستند. پس

$$۰<x_۱<x_۲\Rightarrow \log_a x_۱>\log_a x_۲\ ,\quad x_۱<x_۲\Rightarrow a^{x_۱}>a^{x_۲}$$

در حقیقت، در این حالت، با لگاریتم گرفتن از دو طرف نابرابری یا اثر دادن تابع نمایی، جهت نابرابری تغییر می‌کند.

نکته ۵۷

۱) اگر تابع f صعودی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a<b$. **۲) اگر تابع f نزولی باشد و $f(a)<f(b)$، آن‌گاه $a>b$.**

تست ۱۵ **تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی است و $f(۳x-۱)<f(۲-x)$. حدود x کدام است؟**

۱) $x>۱$ ۲) $x<۱$ ۳) $x>\frac{۳}{۴}$ ۴) $x<\frac{۳}{۴}$

راه‌حل چون تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی است، پس

$$f(۳x-۱)<f(۲-x)\Rightarrow ۳x-۱>۲-x\Rightarrow ۴x>۳\Rightarrow x>\frac{۳}{۴}$$

تست ۱۶ **اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(۲)=۰$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-f(x)}$ کدام است؟**

۱) $(-\infty,۲]$ ۲) $[۲,+\infty)$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۰]$

راه‌حل باید $-f(x)\geq ۰$، پس $f(x)\leq ۰$. از طرف دیگر، چون تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است و $f(۲)=۰$، پس

$$f(x)\leq ۰\Rightarrow f(x)\leq f(۲)\Rightarrow x\geq ۲$$

بنابراین $D_g=[۲,+\infty)$.

نکته ۵۸

۱) اگر تابع‌های f و g صعودی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ صعودی است.

۲) اگر تابع‌های f و g نزولی باشند، آن‌گاه تابع $f+g$ نزولی است.

۳) اگر تابع‌های f و g صعودی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f\times g$ نیز صعودی است.

۴) اگر تابع‌های f و g نزولی باشند و مقادیر این دو تابع همگی مثبت باشند، آن‌گاه تابع $f\times g$ نیز نزولی است.

۵) اگر f تابعی صعودی باشد، تابع $-f$ نزولی است.

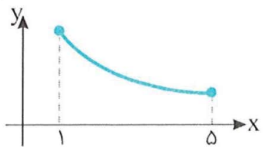
۶) اگر f تابعی نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است.

۷) اگر f تابعی صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{۱}{f}$ نزولی است.

۸) اگر f تابعی نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشند، آن‌گاه تابع $\frac{۱}{f}$ صعودی است.

توجه کنید که نتایج بالا همگی برای توابع اکیداً یکنوا نیز درست‌اند.

تست ۱۷ **نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. کدام تابع اکیداً صعودی است؟**



۱) $y=\frac{۱}{f(x)}$ ۲) $y=f^{۲}(x)$ ۳) $y=x^{۲}f(x)$ ۴) $y=xf(x)$

راه‌حل f تابعی اکیداً نزولی با مقادیر مثبت است. بنابراین تابع $y=\frac{۱}{f(x)}$ اکیداً صعودی است.

تست ۱۸ اگر مقادیر تابع f عددهایی مثبت باشند و تابع $f^۲$ صعودی باشد، کدام‌یک از تابع‌های زیر حتماً نزولی است؟

۱) $y=f(x)+۲x^۲$ ۲) $y=x^۲f(x)$ ۳) $y=x^۲-f(x)$ ۴) $y=\frac{۱}{f(x)}$

راه‌حل توجه کنید که دامنهٔ تابع‌های f و $f^۲$ یکسان است. همچنین، اگر a و b در دامنهٔ f باشند، چون تابع $f^۲$ صعودی است و مقادیر f مثبت‌اند، پس

$$a<b\Rightarrow f^۲(a)\le f^۲(b)\Rightarrow f(a)\le f(b)\Rightarrow \frac{۱}{f(b)}\le\frac{۱}{f(a)}$$

یعنی تابع $\frac{۱}{f}$ حتماً نزولی است.

نکته ۵۹

۱) اگر تابع‌های f و g هر دو صعودی باشند، آن‌گاه ترکیب آن‌ها تابعی صعودی است.
۲) اگر تابع‌های f و g هر دو نزولی باشند، آن‌گاه ترکیب آن‌ها تابعی صعودی است.
۳) اگر یکی از تابع‌های f و g صعودی و دیگری نزولی باشد، آن‌گاه ترکیب آن‌ها نزولی است.
توجه کنید که نتایج بالا همگی برای توابع اکیداً یکنوا نیز درست‌اند.

تست ۱۹ اگر f تابعی صعودی روی $\mathbb{R}$ با مقادیر مثبت باشد، کدام تابع حتماً روی $\mathbb{R}$ نزولی است؟

۱) $y=\sqrt{f(x)}$ ۲) $y=\log f(x)$ ۳) $y=|f(x)|$ ۴) $y=-f(x^۳)$

راه‌حل چون تابع $g(x)=x^۳$ صعودی و تابع f هم صعودی است، پس ترکیب آن‌ها، یعنی $(fog)(x)=f(x^۳)$ حتماً صعودی است. بنابراین تابع $y=-f(x^۳)$ نزولی است.

دست‌گرمی

۴۹- کدام تابع اکیداً نزولی است؟

۱) $f=\{(-۳,-۱),(-۲,۲),(-۱,۰)\}$ ۲) $f=\{(۱,۲),(۰,۲),(-۱,۰)\}$
۳) $f=\{(-۱,-۲),(-۳,۰),(۱,-۶)\}$ ۴) $f=\{(۰,-۱),(-۱,-۲),(-۲,-۲)\}$

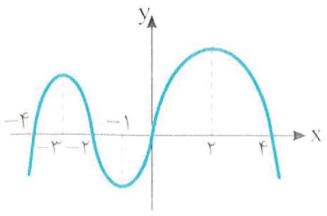
۵۰- اگر تابع $f=\{(۱,۲a+۱),(۲,a-۲),(۳,۲-a)\}$ نزولی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a\ge-۳$ ۲) $a\ge-۲$ ۳) $a\ge۲$ ۴) $a\ge۳$

۵۱- تابع $f(x)=۲x^۲-۴x+۳$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(۰,+\infty)$

۵۲- نمودار تابع $y=f(x-۱)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(x)|$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟



۱) $(-۳,-۲)$ ۲) $(۲,۴)$
۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(-۲,-۱)$

۵۳- تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge۱\\ ۱-x^۲ & x\le۰\end{cases}$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی
۳) غیر یکنوا ۴) هم صعودی و هم نزولی

آزمون ۲۵ — توابع یکنوا (۱)

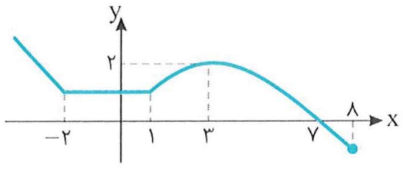
۲۴۱- کدام تابع صعودی است؟

۱) $f=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴)\}$
۲) $f=\{(۲,۳),(۴,۳),(۵,۷)\}$
۳) $f=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۱)\}$
۴) $f=\{(-۱,-۱),(-۲,۱),(۳,۰)\}$

۲۴۲- اگر تابع $f=\{(۱,a^۲-۱),(۲,a+۱),(۳,۳a-۱)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $-۱<a<۲$
۲) $۱<a<۲$
۳) $۰<a<۲$
۴) $-۱<a<۱$

۲۴۳- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. اگر تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ صعودی باشد، حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۸

۲۴۴- تابع نمایی $f(x)=(k^۲-۳)^x$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $|k|>۲$
۲) $\sqrt{۳}<|k|<۲$
۳) $|k|>۳$
۴) $|k|>\sqrt{۳}$

۲۴۵- تابع $f(x)=-۴x^۲+۶x-۱$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(\frac{۳}{۴},+\infty)$
۲) $(-\infty,\frac{۳}{۴})$
۳) $(-\frac{۳}{۴},+\infty)$
۴) $(-\infty,-\frac{۳}{۴})$

۲۴۶- کدام تابع نزولی است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}x-۲ & x\geq ۰\\ x+۲ & x<۰\end{cases}$
۲) $f(x)=\begin{cases}x+۲ & x\geq ۰\\ x-۲ & x<۰\end{cases}$
۳) $f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x\geq ۰\\ -x-۲ & x<۰\end{cases}$
۴) $f(x)=\begin{cases}-x-۲ & x\geq ۰\\ -x+۲ & x<۰\end{cases}$

۲۴۷- حدود a که به‌ازای آن تابع $f(x)=\begin{cases}x+a & x\geq ۱\\ ۲x+۱ & x<۱\end{cases}$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $a\geq ۲$
۲) $a>۱$
۳) $a\leq ۳$
۴) $a\leq ۲$

۲۴۸- اگر f یک تابع صعودی روی $\mathbb{R}$ باشد و $f(۲m-۱)\geq f(m+۱)$، حدود m کدام است؟

۱) $m>۲$
۲) $m\geq ۲$
۳) $m<۲$
۴) $m\leq ۲$

۲۴۹- اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و $f(۰)=۰$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $[۰,+\infty)$
۳) $(۰,+\infty)$
۴) $(-\infty,۰]$

۲۵۰- اگر $f+g$ و $f-g$ توابعی صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشند، کدام تابع صعودی است؟

۱) f
۲) g
۳) $f\times g$
۴) $\frac{f}{g}$

آزمون ۲۶ توابع یکنوا (۲)

سؤال	گام
۲۵۱	۴۸ ۵۱
۲۵۲	۴۸
۲۵۳	۴۸ ۵۸
۲۵۴	۵۲
۲۵۵	۵۳
۲۵۶	۵۰ ۵۵
۲۵۷	۵۴
۲۵۸	۵۷
۲۵۹	۲۲ ۵۷
۲۶۰	۵۸

۲۵۱- کدام تابع غیریکنوا است؟

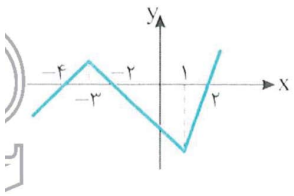
۱) $f=\{(-۲,۱),(-۱,۲),(۱,۳)\}$ ۲) $g=\{(۲,۱),(۳,۰),(۴,-۱)\}$

۳) $h=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲)\}$ ۴) $k=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۰)\}$

۲۵۲- به ازای چند عدد صحیح x تابع $f=\{(-۲,۴x),(۰,x^۲+۳),(۱,۷x-x^۲)\}$ صعودی است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۵۳- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. تابع $-f$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟



۱) $[-۳,۲]$

۲) $(-\infty,-۳]$

۳) $[-۳,۱]$

۴) $[۱,+\infty)$

۲۵۴- تابع $f(x)=\log_{(k-۱)}(x-۳)$ اکیداً نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $k>۲$ ۲) $k<۱$ ۳) $۱<k<۲$ ۴) $۰<k<۱$

۲۵۵- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=-x^۲+۴x$ و دامنهٔ $[k,+\infty)$ نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\leq ۲$ ۲) $k\geq ۲$ ۳) $k\leq -۲$ ۴) $k\geq -۲$

۲۵۶- تابع $f(x)=|x-۲|+|x+۱|$ روی بازهٔ $[a,b]$ هم صعودی است هم نزولی. بیشترین مقدار ممکن $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۷- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱}+۲ & x\geq ۱\\ ۴x-k & x<۱\end{cases}$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\leq ۲$ ۲) $k\leq ۱$ ۳) $k\geq ۲$ ۴) $k\geq ۱$

۲۵۸- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم $f(a^۲-۳)>f(۲a)$، حدود a کدام است؟

۱) $a>۰$ ۲) $a>\sqrt{۳}$ ۳) $-۱<a<۳$ ۴) $-۳<a<۱$

۲۵۹- اگر f تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و اکیداً نزولی باشد و $f(۱)=۲$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(x-۲)-۲}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۳]$ ۲) $(-\infty,۱]$ ۳) $[۳,+\infty)$ ۴) $(۲,+\infty)$

۲۶۰- اگر f روی $\mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد، کدام تابع حتماً صعودی است؟

۱) $y=xf(x)$ ۲) $y=x+f(x)$ ۳) $y=x-f(x)$ ۴) $y=\frac{x}{f(x)}$

آزمون ۲۷ — توابع یکنوا (۳)

۲۶۱- تابع $f=\{(۱,m-۱),(۲,۲m),(۳,m+۳)\}$ صعودی است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۶۲- تابع $f=\{(۱,a-۲),(۲,۳a+۶),(۳,۴a-b)\}$ هم صعودی است و هم نزولی. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) -۱۴

۲۶۳- تابع $f(x)=۳\sin x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},a]$ صعودی است. حداکثر مقدار ممکن a کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) π ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۲۶۴- تابع $f(x)=\frac{۱}{-x+۲}$ روی بازهٔ $(-\infty,a)$ صعودی است. حداکثر مقدار ممکن a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۶۵- تابع $f(x)=x^۲-۲(k+۱)x+۱$ با دامنهٔ $[۳,۵]$ غیریکنواست. حدود k کدام است؟

۱) $k<۲$ ۲) $k>۴$ ۳) $۲<k<۴$ ۴) $k<۴$

۲۶۶- تابع $f(x)=|x-۳|-|x+۱|$ روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار ممکن $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۷- تابع $f(x)=kx+|x-۱|$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq ۱$ ۲) $k\geq -۱$ ۳) $-۱\leq k\leq ۱$ ۴) $k\leq -۱$

۲۶۸- اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و $f(۶)=۰$، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{۴-x^۲}{f(x)}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۶۹- تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x+۱}}$

۱) صعودی است.
۲) نزولی است.
۳) ابتدا صعودی سپس نزولی است.
۴) ابتدا نزولی سپس صعودی است.

۲۷۰- کدام تابع یکنوا است؟

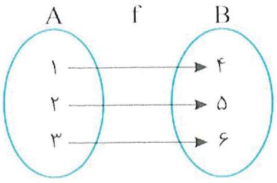
۱) $y=x^۲-x$ ۲) $y=x^۲+x$ ۳) $y=x^۳+x$ ۴) $y=x^۳-x$

سؤال
۲۶۱
۲۶۲
۲۶۳
۲۶۴
۲۶۵
۲۶۶
۲۶۷
۲۶۸
۲۶۹
۲۷۰

درس یازدهم: تابع وارون

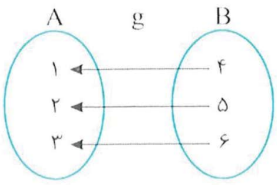
تابع وارون

تابع‌های f و g به‌صورت مقابل تعریف شده‌اند. توجه کنید که تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B تعریف شده است و



$$f(۱)=۴ ,\quad f(۲)=۵ ,\quad f(۳)=۶$$

همین‌طور تابع g از مجموعهٔ B به مجموعهٔ A تعریف شده است و

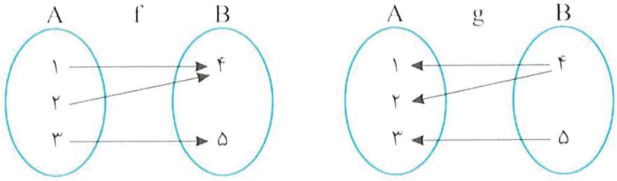


$$g(۴)=۱ ,\quad g(۵)=۲ ,\quad g(۶)=۳$$

بنابراین تابع g عکس عمل تابع f را انجام می‌دهد. به تابع g تابع وارون تابع f می‌گوییم.

تذکر لزومی ندارد که هر تابعی تابع وارون داشته باشد.

مثال: تابع f را به‌صورت زیر در نظر بگیرید. توجه کنید اگر g وارون تابع f باشد. آن‌گاه g تابع نیست. زیرا g به عدد ۴ دو عدد ۱ و ۲ را نسبت می‌دهد. در این‌صورت می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر نیست.



اگر وارون f خودش تابع باشد، می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر است و تابع وارون تابع f را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

تعریف

۶۰

اگر رابطهٔ بین دو مجموعه به‌صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از عوض کردن جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب این رابطه با هم به‌دست می‌آید، وارون این رابطه می‌نامیم. اگر رابطهٔ f تابع باشد و وارون رابطهٔ f نیز تابع باشد، تابع f را وارون‌پذیر می‌نامیم و وارون آن را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، $f^{-۱}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$.

مثال: فرض کنید $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$. در این صورت $f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳)\}$. توجه کنید که مثلاً $f(۱)=۲$ و $f^{-۱}(۲)=۱$.

تست ۱ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$، تابع $gof^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{(۱,۳),(۰,۰)\}$ ۲) $\{(۲,۴),(۳,۵)\}$ ۳) $\{(۲,۰),(-۱,۴)\}$ ۴) $\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$

راه‌حل: تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم: $f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\}$. در نتیجه $gof^{-۱}=\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$.

نکته

۶۱

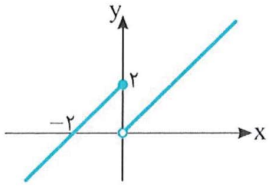
۱) تابع f وارون‌پذیر است، اگر و فقط اگر یک‌به‌یک باشد.

۲) اگر تابع f روی دامنه‌اش اکیداً یکنوا باشد، آن‌گاه یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

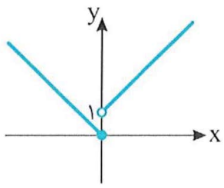
تست ۲ کدام تابع وارون‌پذیر است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}x+۲ & x\le ۰\\ x & x>۰\end{cases}$ ۲) $f(x)=\begin{cases}-x & x\le ۰\\ x+۱ & x>۰\end{cases}$ ۳) $f(x)=\begin{cases}-x^۲ & x\le ۰\\ x^۲+۱ & x>۰\end{cases}$ ۴) $f(x)=\begin{cases}x^۲-۱ & x\le ۰\\ x^۲+۱ & x>۰\end{cases}$

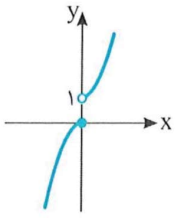
راه‌حل نمودار تابع هر گزینه به شکل زیر است:



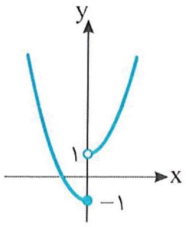
گزینهٔ (۱)



گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)

از روی نمودارها معلوم است که فقط تابع گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک است، پس وارون‌پذیر است.

نکته ۶۲

فرض کنید تابع f وارون‌پذیر باشد. در این صورت

۱) اگر $f(a)=b$، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$. به عبارت دیگر، اگر نقطهٔ (a,b) روی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ (b,a) روی نمودار تابع f^{-1} است.

۲) $D_{f^{-1}}=R_f$ و $D_f=R_{f^{-1}}$.

۳) $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

تست ۳ **اگر** $f=\{(۳,۴),(۴,۵),(-۱,۷),(۷,۳)\}$ و $f^{-1}(f^{-1}(a))=۳$، **مقدار a کدام است؟**

۱) ۳ **۲)** ۴ **۳)** ۵ **۴)** ۷

راه‌حل اگر فرض کنیم $f^{-1}(a)=b$، تساوی داده شده به‌صورت $f^{-1}(b)=۳$ درمی‌آید. پس $f(۳)=b$ و در نتیجه $b=۴$. بنابراین

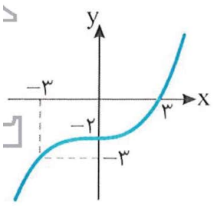
$$f^{-1}(a)=۴\Rightarrow f(۴)=a\Rightarrow a=۵$$

تست ۴ **اگر** $f(x)=\sqrt{۳x+۱}+۲x$، **مقدار** $f(۵)+f^{-1}(۱۴)$ **کدام است؟**

۱) ۱۹ **۲)** ۱۸ **۳)** ۱۷ **۴)** ۱۶

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $f(۵)=\sqrt{۳\times۵+۱}+۲\times۵=۱۴$. بنابراین $f^{-1}(۱۴)=۵$ و در نتیجه $f(۵)+f^{-1}(۱۴)=۱۴+۵=۱۹$.

تست ۵ **نمودار تابع** $y=f(۲x+۱)$ **در شکل مقابل رسم شده است. مقدار** $f^{-1}(-۳)+f^{-1}(-۲)-f^{-1}(۰)$ **کدام است؟**



۱) ۱۰- **۲)** ۱۱- **۳)** ۵- **۴)** ۸-

راه‌حل فرض کنید $g(x)=f(۲x+۱)$. با توجه به نمودار تابع g،

$$g(۳)=۰\Rightarrow f(۷)=۰\Rightarrow f^{-1}(۰)=۷,\quad g(۰)=-۲\Rightarrow f(۱)=-۲\Rightarrow f^{-1}(-۲)=۱,\quad g(-۳)=-۳\Rightarrow f(-۵)=-۳\Rightarrow f^{-1}(-۳)=-۵$$

بنابراین $f^{-1}(-۳)+f^{-1}(-۲)-f^{-1}(۰)=-۵+۱-۷=-۱۱$.

تست ۶ **اگر نمودار تابع وارون تابع** $f(x)=x^۳+۲x+۲m$ **از نقطهٔ** $(m,۱)$ **عبور کند، مقدار** $f^{-1}(-۶)$ **کدام است؟**

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۳- **۴)** ۳۷-

راه‌حل چون نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(m,۱)$ عبور می‌کند، پس

$$f^{-1}(m)=۱\Rightarrow f(۱)=m\Rightarrow ۱+۲+۲m=m\Rightarrow m=-۳$$

بنابراین $f(x)=x^۳+۲x-۶$. فرض کنید $f^{-1}(-۶)=a$. در این صورت

$$f(a)=-۶\Rightarrow a^۳+۲a-۶=-۶\Rightarrow a^۳+۲a=۰\Rightarrow a(a^۲+۲)=۰\Rightarrow a=۰$$

در نتیجه $f^{-1}(-۶)=۰$.

تست ۷ برد تابع وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ کدام است؟

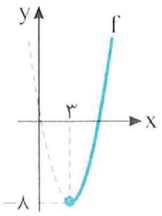
۱) $[0,+\infty)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

راه‌حل توجه کنید برد تابع f^{-1} برابر با دامنهٔ تابع f است. از طرف دیگر، $D_f=\{x|x^2+1\geq 0\}=\mathbb{R}$. بنابراین $R_{f^{-1}}=D_f=\mathbb{R}$.

تست ۸ اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[3,+\infty)$ باشد و $f(x)=x^2-6x+1$، دامنهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $[-8,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-8]$ ۳) $[3,+\infty)$ ۴) $(-\infty,3]$

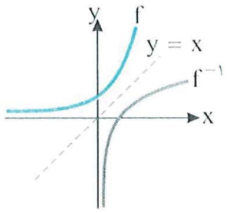
راه‌حل به نمودار تابع f توجه کنید. برد این تابع بازهٔ $[-8,+\infty)$ است. پس دامنهٔ تابع f^{-1} نیز همین بازه است.



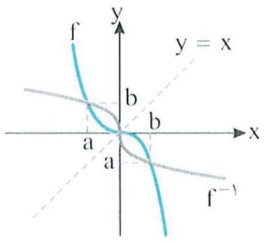
نکته ۶۳

فرض کنید تابع f وارون‌پذیر باشد. در این صورت

۱) نمودار تابع‌های f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار تابعی نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد، آن‌گاه این تابع و وارونش با هم برابرند.

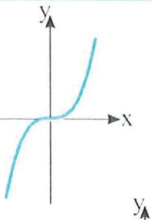


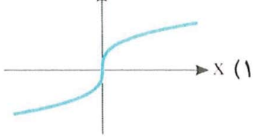
۲) اگر نمودار تابع‌های f و f^{-1} یکدیگر را در نقطهٔ (a,b) قطع کرده باشند، آن‌گاه $f(a)=b$ و $f(b)=a$. توجه کنید که نقطهٔ (b,a) نیز یک نقطهٔ تقاطع است.

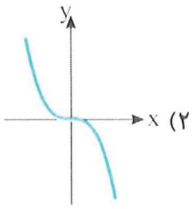


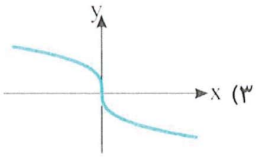
۳) اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه تابع f^{-1} نیز اکیداً صعودی است. همچنین اگر تابع f اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه تابع f^{-1} نیز اکیداً نزولی است.

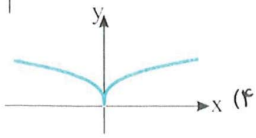
تست ۹ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟



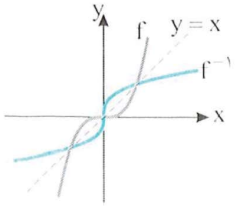
۱)


۲)


۳)


۴)


راه‌حل باید نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم، که نمودار گزینهٔ (۱) به‌دست می‌آید.



تست ۱۰ اگر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(a+b)x^3+a-b$ نمودار تابع وارونش را در نقطهٔ $(1,0)$ قطع کند، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) صفر

راه‌حل باید $f(0)=1$ و $f(1)=0$. پس $f(0)=a-b=1$ و $f(1)=a+b+a-b=0$. بنابراین $a=0$ و $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-1$.

تست ۱۱ اگر تابع f^{-1} روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد و $D_f=\mathbb{R}$، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x^3)<f(x^2)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,1)-\{0\}$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $(-\infty,0)$ ۴) $(0,+\infty)-\{1\}$

راه‌حل چون تابع f^{-1} روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است، پس تابع f نیز روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. بنابراین

$$f(x^3)<f(x^2)\Rightarrow x^3<x^2\Rightarrow x^2(x-1)<0\Rightarrow x<1\ ,\ x\neq 0$$

پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون

۶۴

فرض کنید تابع f وارون‌پذیر باشد. برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون (f^{-1})، از تساوی $y=f(x)$، x را برحسب y پیدا می‌کنیم و سپس با تبدیل y به x، ضابطهٔ f^{-1} را به‌دست می‌آوریم.

مثال:

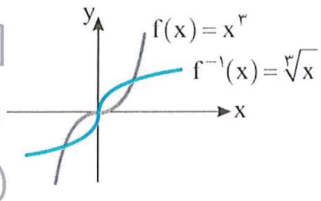
- فرض کنید $f(x)=2x-3$، در این صورت f تابعی یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. برای پیدا کردن f^{-1} می‌توان نوشت

$$y=f(x)\Rightarrow y=2x-3\Rightarrow x=\frac{y+3}{2}$$

اگر در تساوی آخر جای x و y را عوض کنیم، به‌دست می‌آید $y=\frac{x+3}{2}$، پس $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2}$.

- فرض کنید $f(x)=x^3$، در این صورت f تابعی یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. برای پیدا کردن f^{-1} می‌توان نوشت $y=x^3$ در نتیجه $x=\sqrt[3]{y}$. پس $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

توجه کنید که چون $D_f=R_f=\mathbb{R}$، پس $D_{f^{-1}}=R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$. نمودار تابع f^{-1} قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است، که در شکل روبه‌رو نشان داده شده است.



تست ۱۲ تابع وارون تابع $f(x)=3-4x$ به‌صورت $f^{-1}(x)=ax+b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) -3 ۳) 3 ۴) $-\frac{1}{3}$

راه‌حل ابتدا از تساوی $y=3-4x$، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$4x=3-y\Rightarrow x=\frac{3-y}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}y$$

بنابراین تابع وارون تابع f به‌صورت $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$ است. پس $a=-\frac{1}{4}$ و $b=\frac{3}{4}$. در نتیجه $\frac{b}{a}=-3$.

تست ۱۳ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x|-|x-2|$ و دامنهٔ $[a,b]$ وارون‌پذیر است. ضابطهٔ f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{x-2}{2}$ ۲) $f^{-1}(x)=\frac{x+2}{2}$ ۳) $f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3}$ ۴) $f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{3}$

راه‌حل توجه کنید که $x<0\Rightarrow f(x)=-x+x-2=-2$ ، $0\le x\le 2\Rightarrow f(x)=x+x-2=2x-2$ ، $x>2\Rightarrow f(x)=x-x+2=2$

بنابراین اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[0,2]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این بازه باشد، آن‌گاه تابع f وارون‌پذیر است و وارون آن به‌صورت زیر است

$$y=2x-2\Rightarrow x=\frac{y+2}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+2}{2}$$

تست ۱۴ تابع وارون تابع $f(x)=2-\sqrt{x-1}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=x^2-4x+5, x\le 2$ ۲) $f^{-1}(x)=-x^2+4x-5, x\le 2$

۳) $f^{-1}(x)=-x^2+4x-5, x\ge 1$ ۴) $f^{-1}(x)=x^2-4x+5, x\ge 1$

راه‌حل x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=2-\sqrt{x-1}\Rightarrow\sqrt{x-1}=2-y\xrightarrow{2-y\ge 0}x-1=4+y^2-4y\Rightarrow x=y^2-4y+5$$

چون $2-y\ge 0$، پس $y\le 2$، یعنی $R_f=(-\infty,2]$ و در نتیجه $f^{-1}(x)=x^2-4x+5$ و $D_{f^{-1}}=(-\infty,2]$.

تست ۱۵ ضابطهٔ تابع وارون تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=(x-1)^3+1$ ۲) $f^{-1}(x)=(x+1)^3-1$ ۳) $f^{-1}(x)=(x-1)^3-1$ ۴) $f^{-1}(x)=(x+1)^3+1$

راه‌حل

راه‌حل اول x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt[3]{x-1}+1\Rightarrow y-1=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow (y-1)^3=x-1\Rightarrow x=(y-1)^3+1$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(x-1)^3+1$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(1)=1$، پس $f^{-1}(1)=1$ که فقط در تابع گزینهٔ (۱) صدق می‌کند.

تست ۱۶ دامنهٔ تابع f بازهٔ $[2,+\infty)$ و ضابطهٔ آن $f(x)=4x-x^2$ است. ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\sqrt{4-x}+2$ ۲) $f^{-1}(x)=-\sqrt{4-x}+2$ ۳) $f^{-1}(x)=\sqrt{4+x}-2$ ۴) $f^{-1}(x)=\sqrt{4+x}+2$

راه‌حل

راه‌حل اول ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=4x-x^2=-(x-2)^2+4\Rightarrow (x-2)^2=4-y\Rightarrow |x-2|=\sqrt{4-y}$$

با توجه به دامنهٔ تابع f که بازهٔ $[2,+\infty)$ است، نتیجه می‌شود $|x-2|=x-2$. پس

$$x-2=\sqrt{4-y}\Rightarrow x=2+\sqrt{4-y}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=2+\sqrt{4-x}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(3)=3$، پس $f^{-1}(3)=3$ که فقط در گزینهٔ (۱) چنین است.

تست ۱۷ اگر $f(x)=\frac{2}{3^{x-1}}+1$، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{x-2}{3})$ ۲) $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{2}{x-1})$ ۳) $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{3}{x-2})$ ۴) $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{1-x}{2})$

راه‌حل

می‌توان نوشت

$$y=\frac{2}{3^{x-1}}+1\Rightarrow 3^{x-1}y=2+3^{x-1}\Rightarrow 3^{x-1}(y-1)=2\Rightarrow 3^{x-1}=\frac{2}{y-1}$$

بنابراین $x-1=\log_3(\frac{2}{y-1})$، پس $x=1+\log_3(\frac{2}{y-1})$. اگر جای x و y را در این تساوی عوض کنیم، به‌دست می‌آید $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{2}{x-1})$.

نکته تابع وارون تابع‌های چندضابطه‌ای ۶۵

فرض کنید تابع $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\in D_1\\ h(x) & x\in D_2\end{cases}$ وارون‌پذیر باشد، در این صورت وارون f به‌صورت $f^{-1}(x)=\begin{cases}g^{-1}(x) & x\in R_1\\ h^{-1}(x) & x\in R_2\end{cases}$ است که

R_1 برد تابع g با دامنهٔ D_1 و R_2 برد تابع h با دامنهٔ D_2 است.

تست ۱۸ تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases}3x+4 & x\le 1\\ 2x+5 & x>1\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-4}{3} & x\le 1\\ \frac{x-5}{2} & x>1\end{cases}$ ۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-4}{3} & x\le 7\\ \frac{x-5}{2} & x>7\end{cases}$ ۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-5}{2} & x\le 7\\ \frac{x-4}{3} & x>7\end{cases}$ ۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-5}{2} & x\le 1\\ \frac{x-4}{3} & x>1\end{cases}$

راه‌حل

توجه کنید که اگر $x\le 1$، $g(x)=3x+4$، آن‌گاه $g(x)\le 7$ و $g^{-1}(x)=\frac{x-4}{3}$. اگر $x>1$، $h(x)=2x+5$، آن‌گاه $h(x)>7$ و

بنابراین $h^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}$، بنابراین $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-4}{3} & x\le 7\\ \frac{x-5}{2} & x>7\end{cases}$.

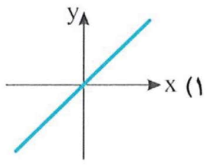
۶۶ نکته

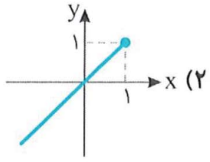
اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه

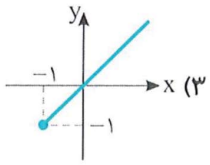
۱) به‌ازای هر x از دامنهٔ f، $(f^{-1}of)(x)=x$.

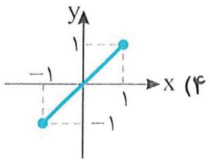
۲) به‌ازای هر x از دامنهٔ f^{-1}، $(fof^{-1})(x)=x$.

تست ۱۹ اگر $f(x)=1-\sqrt{x+1}$، نمودار تابع $y=(fof^{-1})(x)$ کدام است؟

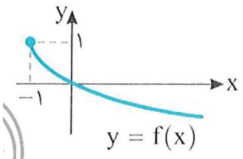
۱)


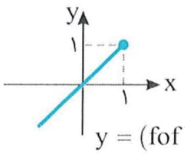
۲)


۳)


۴)


راه‌حل می‌دانیم که به ازای هر x از دامنهٔ f^{-1}، $y=(fof^{-1})(x)=x$. از طرف دیگر $D_{f^{-1}}=R_f$، پس باید برد تابع f را حساب کنیم. با توجه به نمودار تابع f معلوم است که $R_f=(-\infty,1]$. پس نمودار تابع fof^{-1} به شکل روبه‌رو است.





۶۷ نکته

اگر f و g تابع‌هایی وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه $(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$.

تست ۲۰ اگر $g(x)=2x+3$ و $(g^{-1}of)^{-1}(x)=6x-2$، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل اول فرض کنید $f(4)=a$. از تساوی $(g^{-1}of)^{-1}(x)=6x-2$ نتیجه می‌شود $(g^{-1}of)(6x-2)=x\Rightarrow g^{-1}(f(6x-2))=x$

در تساوی فوق قرار می‌دهیم $x=1$ و به‌دست می‌آید $g^{-1}(f(4))=1$. پس $g^{-1}(a)=1\Rightarrow g(1)=a\Rightarrow a=5$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(g^{-1}of)^{-1}(x)=(f^{-1}og)(x)$. بنابراین

$$(g^{-1}of)^{-1}(x)=6x-2\Rightarrow(f^{-1}og)(x)=6x-2\Rightarrow f^{-1}(g(x))=6x-2\Rightarrow f^{-1}(2x+3)=6x-2$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید $f^{-1}(5)=4$، پس $f(4)=5$.

۶۸ نکته

- **اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، نقاط مشترک نمودار تابع f و نمودار تابع f^{-1} در صورت وجود روی خط $y=x$ قرار دارند. در غیر این صورت این نقاط می‌توانند روی خط $y=x$ نباشند.**
- **طول نقاط مشترک نمودار تابع‌های f و f^{-1} از معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ به‌دست می‌آید. در حالتی که f اکیداً صعودی باشد طول این نقاط را می‌توانیم از معادلهٔ $f(x)=x$ به‌دست بیاوریم.**

تست ۲۱ نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$، نمودار تابع وارونش را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل ضابطهٔ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{2x-1}{x+3}\Rightarrow yx+3y=2x-1\Rightarrow(y-2)x=-3y-1\Rightarrow x=\frac{3y+1}{2-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{2-x}$$

اکنون معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{2x-1}{x+3}=\frac{3x+1}{2-x}\Rightarrow 4x-2x^2-2+x=3x^2+x+9x+3\Rightarrow 5x^2+5x+5=0\Rightarrow x^2+x+1=0,\ \Delta<0$$

بنابراین معادله جواب ندارد، پس نمودار تابع‌های f و f^{-1} متقاطع نیستند.

تست ۲۲

نمودار تابع $f(x)=x^3+x-4$ در نقطه‌ای با کدام طول نمودار تابع f^{-1} را قطع می‌کند؟

۱) $\sqrt[3]{2}$ ۲) $2\sqrt[3]{2}$ ۳) $\sqrt[3]{4}$ ۴) $2\sqrt[3]{4}$

راه‌حل

چون تابع f اکیداً صعودی است، کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$x^3+x-4=x \Rightarrow x^3=4 \Rightarrow x=\sqrt[3]{4}$$

نکته ۶۹

تابع وارون برخی توابع با خود آن‌ها برابر است.

- تابع چندجمله‌ای درجهٔ اول $f(x)=ax+b$ در دو حالت زیر با تابع وارونش برابر است.

الف) $a=1$ و $b=0$ ب) $a=-1$

- تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ در حالتی که وارون‌پذیر است و $a=-d$ با تابع وارونش برابر است.

تست ۲۳

اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{a^2x-16}{x-2a}$ بر نمودار تابع وارونش منطبق باشد، مقدار $f(a+4)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -4 ۴) 4

راه‌حل

باید تساوی $a^2=2a$ برقرار باشد تا تابع f با تابع وارونش برابر باشد. پس $a=0$ یا $a=2$.

اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-16}{x}$ و در نتیجه $f(a+4)=f(4)=-4$. اگر $a=2$، آن‌گاه $f(x)=\frac{4x-16}{x-4}=4$ و تابع f وارون‌پذیر نیست.

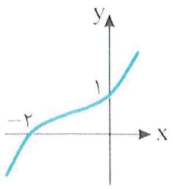
دست‌گرمی

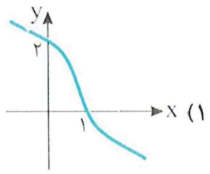
۵۴- کدام تابع وارون‌پذیر است؟

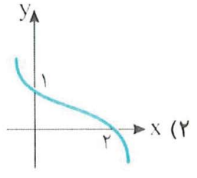
۱) $f=\{(1,2),(-1,1),(3,2),(4,-1)\}$ ۲) $f=\{(1,-1),(2,3),(4,2),(5,3)\}$

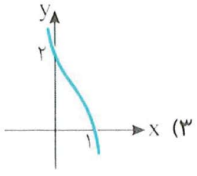
۳) $f=\{(1,-1),(2,-2),(3,-4),(4,-5)\}$ ۴) $f=\{(1,0),(2,1),(3,0),(4,1)\}$

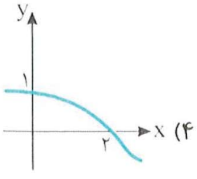
۵۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-f^{-1}(x)$ کدام گزینه است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵۶- اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ و $g=\{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$، مقدار $(f^{-1}og)(2)+(g^{-1}of)(3)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۵۷- اگر $f(x)=x^3+x$، مقدار $f(1)+f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۸- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x^2-4x$ با شرط $x<2$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+4}$ ۲) $f^{-1}(x)=-2+\sqrt{x+4}$

۳) $f^{-1}(x)=2-\sqrt{x-4}$ ۴) $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-4}$

آزمون ۲۸ تابع وارون (۱)

۲۷۱- اگر $f=\{(1,2),(2,1),(3,-2),(-1,4)\}$ ، $g=\{(3,4),(1,-1),(4,-2),(-4,1)\}$ و $(f^{-1}og^{-1})(a)=-1$، مقدار $f^{-1}(a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷۲- اگر $f=\{(-1,2),(3,5),(-2,3),(5,-1)\}$ و $g=\{(2,3),(-1,4),(4,1),(3,0)\}$، تابع gof^{-1} کدام است؟

۱) $\{(-1,3),(3,0)\}$ ۲) $\{(5,4),(3,5)\}$ ۳) $\{(2,0),(-1,4)\}$ ۴) $\{(2,4),(5,0)\}$

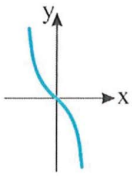
۲۷۳- اگر $f=\{(3,2),(2,3),(4,-1),(5,6)\}$ ، $g=\{(2,4),(3,2),(1,5),(5,-1)\}$ و $f^{-1}(a)+g^{-1}(2)=6$، مقدار $g(a)$ کدام است؟

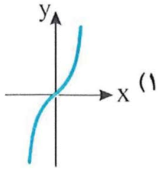
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) -1

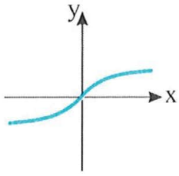
۲۷۴- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}-1$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

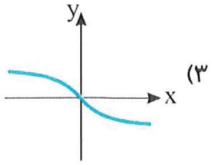
۱) $(1,11)$ ۲) $(1,9)$ ۳) $(9,11)$ ۴) $(11,9)$

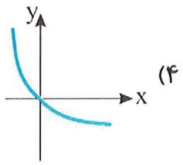
۲۷۵- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع f^{-1} کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۲۷۶- اگر $f(x)=x^2+2x$ و $D_f=[-1,2]$، دامنهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $[-1,8]$ ۲) $[0,4]$ ۳) $[-1,4]$ ۴) $[-2,9]$

۲۷۷- کدام تابع وارون‌پذیر است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 0\\ x-1 & x>0\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}-x-1 & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x\le 0\\ x^2-1 & x>0\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}-x^2-1 & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\end{cases}$

۲۷۸- خط $y=3x-4$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم. معادلهٔ خط جدید کدام است؟

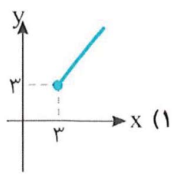
۱) $y=4x-3$ ۲) $y=4x+3$ ۳) $y=\frac{x+4}{3}$ ۴) $y=\frac{x+3}{4}$

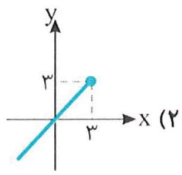
۲۷۹- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-1}+2$ کدام است؟

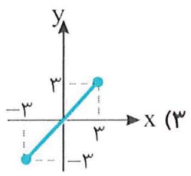
۱) $f^{-1}(x)=x^2-4x+3$ ۲) $f^{-1}(x)=x^2+4x+5$

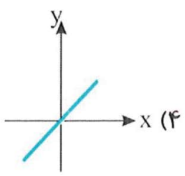
۳) $f^{-1}(x)=x^2-4x+5$ ۴) $f^{-1}(x)=x^2+4x+3$

۲۸۰- اگر $f(x)=\sqrt{3-x}+1$، نمودار تابع $g(x)=(f^{-1}of)(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


آزمون ۲۹ تابع وارون (۲)

سؤال	گام
۲۸۱	۲۶ ۶۰
۲۸۲	۶۲ ۳۰۶
۲۸۳	۶۲
۲۸۴	۳۵ ۶۳
۲۸۵	۲۲ ۶۲
۲۸۶	۴۲ ۶۱
۲۸۷	۶۴ ۲۹۴
۲۸۸	۶۴
۲۸۹	۲۳ ۶۶
۲۹۰	۲۸ ۶۴ ۶۷

۲۸۱- اگر $f=\{(۱,۳),(۲,۴),(۳,۲),(۵,۱)\}$، تابع $f\times f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱),(۴,۱)\}$
۲) $\{(۱,۱۵),(۲,۱۲),(۳,۲)\}$
۳) $\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱)\}$
۴) $\{(۱,۱۵),(۲,۱۲)\}$

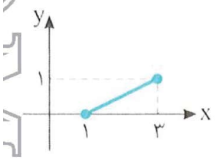
۲۸۲- اگر $f(x)=\frac{x}{x-۱}$، آن‌گاه $f^{-۱}(۳)$ کدام است؟

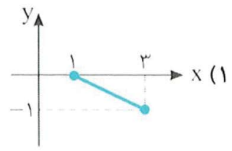
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

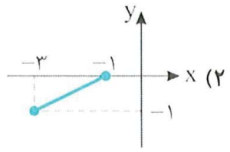
۲۸۳- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x+\sqrt[۳]{x-۱}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

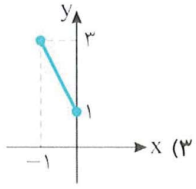
۱) $(۱,۳)$
۲) $(۱,۸)$
۳) $(۸,۹)$
۴) $(۹,۸)$

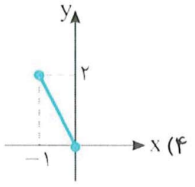
۲۸۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f^{-۱}(-x)-۱$ کدام گزینه است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۲۸۵- اگر $f(x)=\frac{x+\sqrt{۴x-x^۲}}{x-۱}$، چند عدد صحیح در برد تابع $f^{-۱}$ قرار دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۸۶- کدام تابع وارون‌پذیر نیست؟

۱) $f(x)=-x|x|$
۲) $f(x)=۳x-|x|$
۳) $f(x)=۲x+|x|$
۴) $f(x)=x-۳|x|$

۲۸۷- اگر $f(x)=a-۳x$ و معادلهٔ $x^۲=f^{-۱}(x)$ فقط یک جواب داشته باشد. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۲}$
۲) $\frac{۱}{۱۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $-\frac{۱}{۳}$

۲۸۸- اگر $f(x)=x^۲-۴x+۲$ و $D_f=[۲,+\infty)$، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۲}-۲$
۲) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۲}+۲$
۳) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x}-۲$
۴) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x}+۲$

۲۸۹- اگر $f(x)=۱-\sqrt{x-۱}$، دامنهٔ تابع $fof^{-۱}$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$
۲) $(-\infty,-۱]$
۳) $(-\infty,۱]$
۴) $[-۱,+\infty)$

۲۹۰- اگر $f(x)=x-۱$ و $(f^{-۱}og)^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{۲}$، ضابطهٔ تابع g کدام است؟

۱) $g(x)=\frac{۱}{۲}x+۱$
۲) $g(x)=\frac{۱}{۲}x-۱$
۳) $g(x)=۲x-۱$
۴) $g(x)=۲x+۱$

آزمون ۳۰ — تابع وارون (۳)

۲۹۱- اگر $f=\{(1,2),(2,3),(-2,4),(4,1)\}$ و $g=\{(2,2),(3,1),(4,-1),(1,-2)\}$، تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

۱) $\{(2,3),(3,2),(4,1)\}$ ۲) $\{(1,3),(2,2),(-2,1)\}$

۳) $\{(3,2),(2,3),(1,4)\}$ ۴) $\{(3,2),(1,4),(4,1)\}$

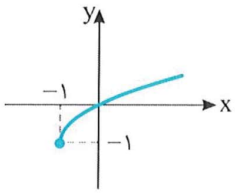
۲۹۲- اگر $f(x)=\begin{cases} x+3 & x<1 \\ 3x+1 & x\geq 1 \end{cases}$، مقدار $f^{-1}(7)+f^{-1}(-1)$ کدام است؟

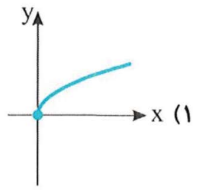
۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

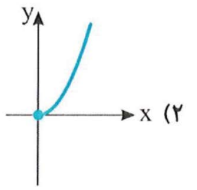
۲۹۳- اگر نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+x+a$ از نقطهٔ $(3,2)$ عبور کند، مقدار $f(3)$ کدام است؟

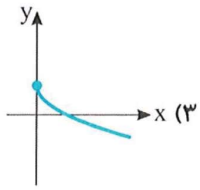
۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

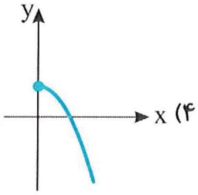
۲۹۴- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=f^{-1}(x-1)+1$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۹۵- اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطهٔ $(1,2)$ برخورد کنند، مقدار ab کدام است؟

۱) -21 ۲) ۱۰ ۳) -10 ۴) ۲۱

۲۹۶- f تابعی خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است، $f(1)=3$ و $f^{-1}(11)=3$. مقدار $f(-3)$ کدام است؟

۱) -16 ۲) -13 ۳) -10 ۴) -7

۲۹۷- اگر $f^{-1}(x)=2x+k$ و معادلهٔ $f(x)=x^2$ جواب نداشته باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>\frac{1}{4}$ ۲) $k>\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{8}<k<\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}<k<1$

۲۹۸- اگر $f(x)=x^3+3x^2+3x$، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}-1$ ۲) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}+1$

۳) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$ ۴) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$

۲۹۹- اگر $f(x)=\frac{2x+a}{x-1}$ و $(f^{-1}of^{-1})(3)=\frac{9}{4}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -3 ۴) -4

۳۰۰- اگر $f(x)=\frac{x}{x-3}$، دامنهٔ تابع $f^{-1}of$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{3\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1,3\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۴) $\mathbb{R}$

آزمون ۳۱ تابع وارون (۴)

سؤال	گام
۳۰۱	۲۶ ۶۰
۳۰۲	۶۲
۳۰۳	۶۲
۳۰۴	۶۳
۳۰۵	۶۳
۳۰۶	۶۲
۳۰۷	۶۴
۳۰۸	۶۴ ۶۵ ۳۳۱
۳۰۹	۲۳ ۶۶
۳۱۰	۲۷ ۶۴ ۶۷

۳۰۱- اگر $f=\{(۱,۲),(-۱,۳),(۲,-۲),(۴,۱)\}$ و $g=\{(۳,۲),(۴,۳),(۲,۴),(۱,۱)\}$، مجموع عضوهای دامنه و برد تابع $f^{-۱}-g^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

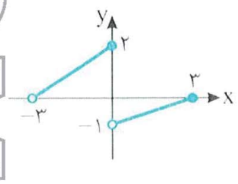
۳۰۲- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}+۲$، مقدار $f(۹)+f^{-۱}(۴)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۳۰۳- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=۲x+\sqrt[۳]{x}-۵$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(-۲,۰)$ ۲) $(۱,-۲)$ ۳) $(۱۰,۸)$ ۴) $(۱۳,۸)$

۳۰۴- نمودار تابع f به شکل زیر است. نمودار تابع $f^{-۱}$ در چند نقطه این نمودار را قطع می‌کند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۳۰۵- اگر $f(x)=a\sqrt{b-۳x}$ و نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۱,۲)$ برخورد کنند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۰۶- اگر تابع‌های f و g وارون‌پذیر باشند، $f(۲x-۱)=g(۳x)-۱$ و $f^{-۱}(۲)=۳$، مقدار $g(۶)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۷- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=x-۲\sqrt{x+۱}$
۲) $f^{-۱}(x)=x+۲-۲\sqrt{x+۱}$
۳) $f^{-۱}(x)=x+۲\sqrt{x+۱}$
۴) $f^{-۱}(x)=x-۲+۲\sqrt{x+۱}$

۳۰۸- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|-|x-۱|-۲x$ و دامنهٔ $\mathbb{R}-[a,b]$ وارون‌پذیر است. تابع وارون تابع f کدام است؟ ($b-a$ حداقل مقدار ممکن است.)

۱) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{۳-x}{۲} & x<۱\\ \frac{-x-۳}{۲} & x>۱\end{cases}$
۲) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{-x-۳}{۲} & x<-۲\\ \frac{۳-x}{۲} & x>۱\end{cases}$
۳) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{x+۳}{۴} & x<۱\\ \frac{۳+x}{۲} & x>۱\end{cases}$
۴) $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{۳-x}{۲} & x<۱\\ \frac{۳-x}{۴} & x>۱\end{cases}$

۳۰۹- اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}+۲$، برد تابع $g(x)=(fof^{-۱})(x)+۳$ کدام است؟

۱) $[۳,+\infty)$ ۲) $[۵,+\infty)$ ۳) $[۱,۳]$ ۴) $[۲,۵]$

۳۱۰- اگر $f(x)=۱+\sqrt[۳]{x-۲}$ و $g(x)=(x-۱)^۳$، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}og^{-۱}$ کدام است؟

۱) $y=x-۲$ ۲) $y=x+۲$ ۳) $y=-x+۲$ ۴) $y=-x-۲$

آزمون ۳۲ — تابع وارون (۵)

۳۱۱- اگر $f=\{(a,b),(b,c),(c,a),(d,d)\}$ و $fog^{-1}=\{(a,a),(b,c),(c,d),(d,b)\}$، تابع g کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\{(a,d),(b,a),(d,c)\}$
۲) $\{(a,d),(b,b),(c,a),(d,c)\}$
۳) $\{(a,b),(b,d),(c,a),(d,c)\}$
۴) $\{(a,d),(b,b),(c,c),(d,a)\}$

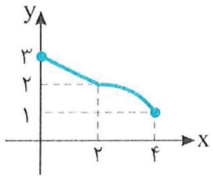
۳۱۲- اگر $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+2}+2}$، مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
۲) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
۳) $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$
۴) $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$

۳۱۳- نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+2x+9$ خط $y=x+1$ را در نقطه‌ای قطع می‌کند. عرض این نقطه کدام است؟

۱) ۱
۲) -1
۳) ۲
۴) -2

۳۱۴- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مساحت محصور بین نمودار f، نمودار f^{-1} و محورهای مختصات کدام است؟

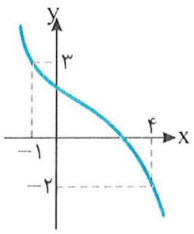


۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۳۱۵- نمودار تابع $f(x)=-x^3+ax+b$ در نقطهٔ $(-1,\frac{1}{3})$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{9}$
۲) $-\frac{10}{9}$
۳) $-\frac{2}{3}$
۴) $-\frac{13}{9}$

۳۱۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $g(x)=1-f(x+1)$، مقدار $(g^{-1}of)(-1)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۱۷- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\frac{2x+a}{x+b}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\frac{3x-4}{x-2}$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۶
۲) -12
۳) ۱۲
۴) -6

۳۱۸- اگر $f(x)=3x+|x-1|$، تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & x<3\\ \frac{x+1}{4} & x\geq 3\end{cases}$
۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{4} & x<3\\ \frac{x+1}{2} & x\geq 3\end{cases}$
۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}4x-1 & x<1\\ 2x+1 & x\geq 1\end{cases}$
۴) $f^{-1}(x)=\begin{cases}4x-1 & x<3\\ \frac{x+1}{4} & x\geq 3\end{cases}$

۳۱۹- اگر وارون تابع $f(x)=\frac{(a+1)x+4}{3x-1}$ خود این تابع باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -2
۲) -1
۳) ۱
۴) صفر

۳۲۰- اگر $f(x)=\sqrt{x-1}+2$، برد تابع $g(x)=x+(fof^{-1})(x)$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$
۲) $[2,+\infty)$
۳) $[4,+\infty)$
۴) $[2,7]$

آزمون ۳۳

آزمون فصل اول (۱)

۳۲۱- به ازای چند مقدار مختلف m رابطهٔ $f=\{(1,4m^3-m),(2m,2),(1,0),(0,4),(4m,2)\}$ تابع است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۲۲- اگر تابع $f(x)=\frac{(a+2)x+3}{2x-3}$ تابعی ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -3 ۴) -4

۳۲۳- کدام عدد در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{x-1-\sqrt{x}}$ قرار ندارد؟

۱) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

۳۲۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{16-|x^2-9|}$ به‌صورت $[a,b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۸

۳۲۵- اگر نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را یک واحد به سمت راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم، سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم. نمودار به‌دست آمده نمودار اولیه را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۲۶- اگر $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$، $g=\{(-1,\sqrt{5}),(0,1),(1,4),(3,5),(4,3)\}$ و $(2g+f)(a)=6$، مقدار $f(-a)$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{3}$

۳۲۷- اگر $f(x)=ax^2+b$ و $(fof)(x)=27x^4-18x^2+2$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

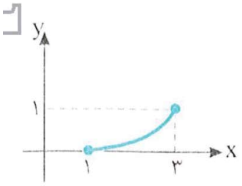
۳۲۸- تابع $f(x)=3x+|kx|$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $-1\le k\le 1$ ۲) $k\ge -3$ ۳) $-3\le k\le 3$ ۴) $k\le 1$

۳۲۹- نمودار تابع $f(x)=ax^3-\frac{2}{9}x+b$ در نقطهٔ $(-1,\frac{1}{3})$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

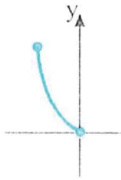
۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{10}{9}$ ۳) $-\frac{17}{9}$ ۴) $-\frac{23}{9}$

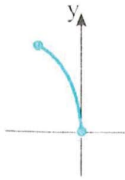
۳۳۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)-1$ کدام گزینه است؟



۱) 

۲)

۳) 

۴) 

سؤال	گام
۳۲۱	۲
۳۲۲	۹
۳۲۳	۲۲ ۳۱۹
۳۲۴	۲۲ ۳۲۷
۳۲۵	۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳
۳۲۶	۲۲ ۲۶
۳۲۷	۲۷
۳۲۸	۵۴ ۳۳۱
۳۲۹	۶۳
۳۳۰	۳۵ ۶۳

آزمون ۳۴ — آزمون فصل اول (۲)

۳۳۱- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}+a & x\geq 2\\ ax^3+16 & x\leq 2\end{cases}$ ضابطهٔ تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) -32 ۴) -16

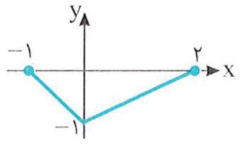
۳۳۲- اگر $f(x)=mx(2-x)+x^2+4x+m$ ضابطهٔ یک تابع خطی باشد، مقدار $f(m)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۳۳- اگر $f(x)=[\frac{x+1}{x}]+[-\frac{1}{x}]$، آن‌گاه $f(-x)$ کدام است؟

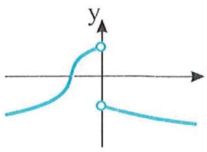
۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $1-f(x)$ ۴) $f(x)-1$

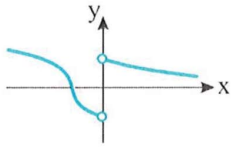
۳۳۴- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{2})$ را رسم می‌کنیم. مساحت ناحیهٔ محصور بین دو نمودار و محور طول‌ها کدام است؟

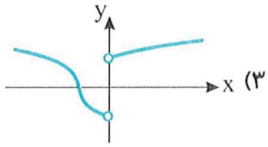


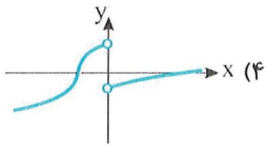
۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

۳۳۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt[3]{x+1}$ کدام است؟

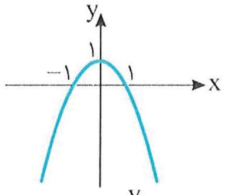
۱) 

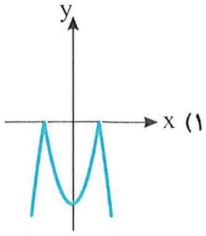
۲) 

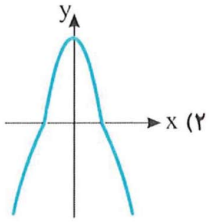
۳) 

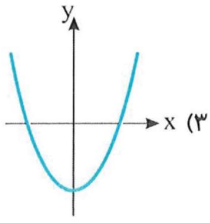
۴) 

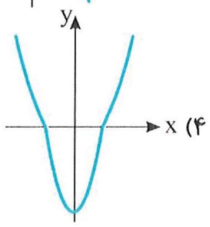
۳۳۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-2f(x)-|f(x)|$ کدام گزینه است؟



۱) 

۲) 

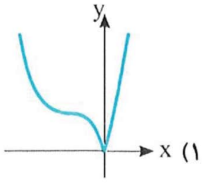
۳) 

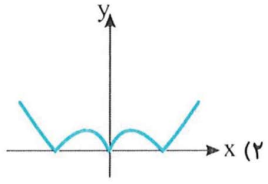
۴) 

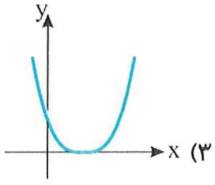
۳۳۷- نمودار تابع $f(x)=|x||x-2|$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=|\frac{1}{x}|$ را قطع می‌کند؟

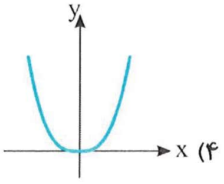
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳۸- نمودار تابع $f(x)=|x^2(x+3)+3x|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۳۹- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt[3]{2-3x}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\frac{ax^3+b}{3}$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۴ ۴) ۶

۳۴۰- تابع $f(x)=\sin(\frac{3\pi}{2}-4x)$ روی بازهٔ $[a,0]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{3}$ ۳) $-\frac{\pi}{2}$ ۴) $-\pi$

آزمون ۳۵

آزمون فصل اول (۳)

سؤال	گام
۳۴۱	۹ ۱۰
۳۴۲	۵ ۲۸۴
۳۴۳	۲۲ ۳۱۸
۳۴۴	۲۲ ۲۹۴
۳۴۵	۲۲ ۲۴ ۲۹۴
۳۴۶	۲۶
۳۴۷	۲۹ ۳۲۷
۳۴۸	۵۳
۳۴۹	۶۲
۳۵۰	۶۲

-۳۴۱ اگر تابع $f(x)=ax^2-bx+b+c$ تابع همانی باشد. تابع $g(x)=2^{ax}+bx+c$ چگونه است؟

۱) ثابت ۲) خطی ۳) همانی ۴) نمایی

-۳۴۲ اگر $f(\frac{1}{x})=\frac{x+2}{2x^2+1}$، ضابطهٔ تابع f برای هر $x\neq 0$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{2x^2+x}{x^2+2}$ ۲) $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$ ۳) $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$ ۴) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+2}$

-۳۴۳ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-3}}-\sqrt{\frac{x-7}{2-x}}$ به‌صورت $(a,b)-\{c\}$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

-۳۴۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x+1}{m^2x^2+3x+1}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است. چند مقدار مختلف برای n وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۳۴۵ دو تابع $f(x)=\frac{5}{x+2}$ و $g(x)=\frac{ax+b}{x^2+cx+4}$ با هم برابرند. مقدار abc کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰۰- ۴) ۲۰۰-

-۳۴۶ اگر $f=\{(1,-1),(4,2),(3,2),(5,1)\}$، مجموع اعضای برد تابع $g(x)=\frac{3f(x)}{2-f(x)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۳۴۷ اگر $D_f=[1,4]$ ، $f(x)=x^2+x$ و $D_g=[-5,4]$ ، $g(x)=|x-1|$، چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع fog قرار دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

-۳۴۸ تابع درجهٔ دوم $f(x)=(k+2)x^2+2x+1$ با دامنهٔ $(-\infty,4]$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k<-2$ ۲) $k\geq-\frac{9}{4}$ ۳) $-\frac{9}{4}\leq k<-2$ ۴) $-2<k<-1$

-۳۴۹ اگر نمودار تابع وارون تابع $f(x)=\frac{1}{16}x^3+\sqrt[3]{x}+2a$ از نقطهٔ $(4,8)$ عبور کند. مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) ۱۲- ۲) ۱۵- ۳) ۲۰- ۴) ۳۰-

-۳۵۰ اگر تابع‌های f و g با دامنهٔ $\mathbb{R}$، وارون‌پذیر باشند. $f(2x+1)=2g(3x)-1$ و $f^{-1}(2)=5$، مقدار $g(6)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

آزمون ۳۶ آزمون فصل اول (۴) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۳۵۱- نمودار تابع $y=|\frac{۱}{۲}x|-۲$ را، چهار واحد به طرف xهای منفی و یک واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟ تجربی - ۹۳

۱) $-۳/۵$ ۲) -۳ ۳) $-۲/۵$ ۴) -۲

۳۵۲- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $(gof)(a)=۵$، مقدار a کدام است؟ تجربی - ۹۱

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

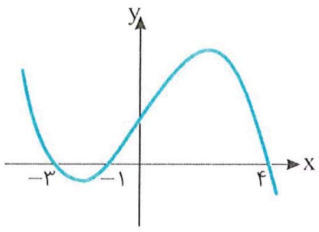
۳۵۳- اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x+۲}{۲-x}$، ضابطهٔ تابع gof کدام است؟ تجربی - ۹۶

۱) $x-۱$ ۲) $x+۱$ ۳) x ۴) $۲x$

۳۵۴- اگر $f(x)=۲x+۳$ و $(gof)(x)=۸x^۲+۲۲x+۲۰$، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟ ریاضی - ۹۲

۱) $۲x^۲-۷x+۳$ ۲) $۲x^۲-۳x+۷$ ۳) $۴x^۲-۲x+۱۳$ ۴) $۴x^۲-۴x+۱۱$

۳۵۵- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۴



۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$

۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$

۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$

۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۳۵۶- تابع $f(x)=|x^۳|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ چگونه است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون‌ناپذیر ۴) یک‌به‌یک

۳۵۷- اگر $f(x)=۲x-۵$، $g=\{(۲,۵),(۳,۴),(۱,۶),(۴,۷),(۸,۱)\}$ و $(f^{-۱}og)(a)=۶$، مقدار a کدام است؟ ریاضی - ۹۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵۸- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x} & x<۰\\ \sqrt{x} & x\geq ۰\end{cases}$، کدام است؟ تجربی - ۹۶

۱) $y=-x^۲$ ۲) $y=x^۲$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=-x|x|$

۳۵۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ نمودار تابع وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱) -۴ و -۱ ۲) ۴ و -۱ ۳) -۴ و ۱ ۴) ۴ و ۱

۳۶۰- اگر دو خط به معادله‌های $ax+by=۸$ و $۲x-۳y=b$ نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم قرینهٔ یکدیگر باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱) ± ۳ ۲) ± ۲ ۳) -۳ یا ۲ ۴) -۲ یا ۳

سؤال
۳۵۱
۳۵۲
۳۵۳
۳۵۴
۳۵۵
۳۵۶
۳۵۷
۳۵۸
۳۵۹
۳۶۰

آزمون ۳۷ آزمون فصل اول (۵) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۳۶۱- نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x^۲-۳x-۱۰$ را حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد؟ خارج از کشور تجربی ۹۳

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۶۲- اگر $f(x)=x-[x]$، برد تابع $g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۲

۱) $[-۱,۰]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $\{-۱,۰\}$ ۴) $\{۰,۱\}$

۳۶۳- اگر $f(x)=(۲x-۳)^۲$ و $g(x)=x+۲$، نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع‌اند؟ تجربی ۹۲

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۶۴- اگر $f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}$، ضابطهٔ تابع gof کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۶

۱) x ۲) $-x$ ۳) $-x-۱$ ۴) $x+۱$

۳۶۵- اگر $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ ریاضی ۹۶

۱) $[۰,۱)$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$

۳۶۶- تابع $f(x)=x^۲-۲x-۳$ با دامنهٔ $\{x||x-۱|<۲\}$ همواره چگونه است؟ ریاضی ۹۱

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

۳۶۷- دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$، مقدار a کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۶

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۶۸- تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x-|۴-۲x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. اگر دامنهٔ تابع f را به آن بازه محدود کنیم، تابع $f^{-۱}$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۲

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱, x\geq ۴$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x-۱, x\leq ۴$

۳) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x-۱, x\geq ۴$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱, x\leq ۴$

۳۶۹- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}, x^۲\neq ۱$ و $f(۰)=۰$ ضابطهٔ تابع وارون آن برابر کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۱

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $xf(x)$ ۴) $-xf(x)$

۳۷۰- تابع $f(x)=x^۲+۲x+۱$ با دامنهٔ $(-۱,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟ ریاضی ۹۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

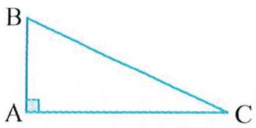
سؤال	گام
۳۶۱	۱۴ ۲۹۰
۳۶۲	۵ ۳۳۳
۳۶۳	۲۷ ۲۹۰
۳۶۴	۲۸ ۲۸۴
۳۶۵	۲۲ ۲۹
۳۶۶	۱۴ ۳۱۲ ۳۲۷
۳۶۷	۲۷ ۶۲
۳۶۸	۶۴ ۳۳۱
۳۶۹	۶۳ ۶۴
۳۷۰	۶۳ ۶۴

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

تعریف نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویهٔ حاده به طول وتر مثلث را **سینوس** این زاویه می‌نامند:



$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC},\quad \sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}$$

همچنین، نسبت طول ضلع مجاور به هر زاویهٔ حاده (به‌جز وتر) به طول وتر مثلث را **کسینوس** این زاویه می‌نامند:

$$\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC},\quad \cos\hat{C}=\frac{AC}{BC}$$

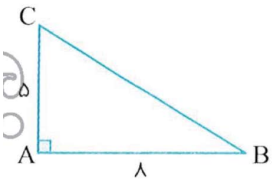
همین‌طور، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویهٔ حاده به طول ضلع مجاور به این زاویه (به‌جز وتر) را **تانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB},\quad \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}$$

و عکس تانژانت یک زاویه را **کتانژانت** این زاویه می‌نامند:

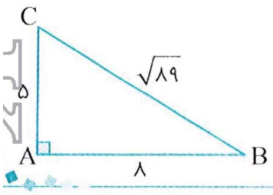
$$\cot\hat{B}=\frac{AB}{AC},\quad \cot\hat{C}=\frac{AC}{AB}$$

تست ۱ در شکل مقابل مقدار $\sin\hat{B}+\cos\hat{B}$ کدام است؟



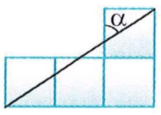
۱) $\frac{۸۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۴۰}{۸۹}$ ۳) $\frac{۱۳}{\sqrt{۸۹}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۸۹}}{۱۳}$

راه‌حل از قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم طول وتر مثلث را به‌دست آوریم: $BC=\sqrt{۵^۲+۸^۲}=\sqrt{۸۹}$. بنابراین



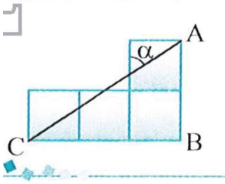
$$\sin\hat{B}+\cos\hat{B}=\frac{AC}{BC}+\frac{AB}{BC}=\frac{۵}{\sqrt{۸۹}}+\frac{۸}{\sqrt{۸۹}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۸۹}}$$

تست ۲ در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



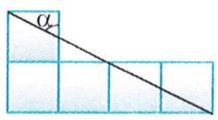
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

راه‌حل از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=C\hat{A}B$. بنابراین



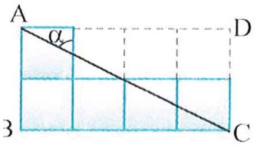
$$\tan\alpha=\tan C\hat{A}B=\frac{CB}{AB}=\frac{۳}{۲}$$

تست ۳ در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

راه‌حل از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat{C}D$. بنابراین

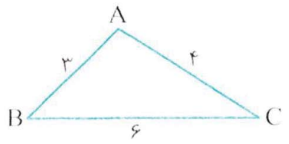


$$\sin\alpha=\sin A\hat{C}D=\frac{AD}{AC}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ACD، $AC^۲=AD^۲+DC^۲=۴^۲+۲^۲=۲۰$. پس $AC=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$. در نتیجه

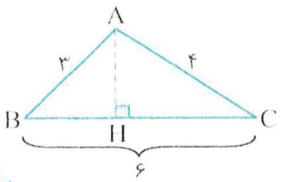
$$\sin\alpha=\frac{AD}{AC}=\frac{۴}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}.$$

تست ۴ در شکل مقابل مقدار $\cos\hat{B}+\frac{۴}{۳}\cos\hat{C}$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

راه‌حل



مطابق شکل، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، $\cos\hat{B}=\frac{BH}{AB}=\frac{BH}{۳}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC، $\cos\hat{C}=\frac{HC}{AC}=\frac{HC}{۴}$. بنابراین

$$\cos\hat{B}+\frac{۴}{۳}\cos\hat{C}=\frac{BH}{۳}+\frac{۴}{۳}\left(\frac{HC}{۴}\right)=\frac{BH+HC}{۳}=\frac{BC}{۳}=۲$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

مقدار زاویهٔ A / مقدار نسبت مثلثاتی	$\sin\hat{A}$	$\cos\hat{A}$	$\tan\hat{A}$	$\cot\hat{A}$
۳۰°	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۳}$
۴۵°	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	۱
۶۰°	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

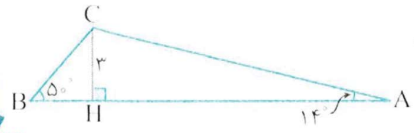
تست ۵ مطابق شکل درختی به ارتفاع ۳ متر از نقطهٔ A با زاویهٔ ۱۴° و از نقطهٔ B با زاویهٔ ۵۰° دیده می‌شود. فاصلهٔ A از B تقریباً چقدر است؟ ($\tan۵۰^\circ\simeq۱/۱۹$ ، $\tan۱۴^\circ\simeq۰/۲۵$)



۱) ۱۲
۲) ۱۳/۵۲
۳) ۱۴/۵۲
۴) ۱۲/۵۲

راه‌حل

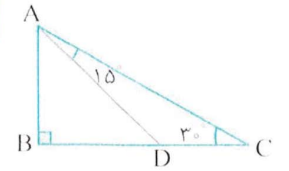
مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث قائم‌الزاویهٔ CBH، $\tan۵۰^\circ=\frac{CH}{BH}=\frac{۳}{BH}$، پس $\frac{۳}{BH}=۱/۱۹$، یعنی $BH=\frac{۳}{۱/۱۹}\simeq۲/۵۲$.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC، $\tan۱۴^\circ=\frac{CH}{HA}=\frac{۳}{HA}$، پس $\frac{۳}{HA}=۰/۲۵$، یعنی $HA=\frac{۳}{۰/۲۵}=۱۲$.

بنابراین فاصلهٔ دو نقطهٔ B و A تقریباً برابر است با $BA=BH+HA\simeq۲/۵۲+۱۲=۱۴/۵۲$.

تست ۶ در شکل مقابل طول CD چقدر است؟ ($AD=۲\sqrt{۲}$)



۱) $۲(\sqrt{۳}-۱)$
۲) $۲(\sqrt{۳}+۱)$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $\hat{A}=۹۰^\circ-\hat{C}=۹۰^\circ-۳۰^\circ=۶۰^\circ$. پس $B\hat{A}D=B\hat{A}C-D\hat{A}C=۶۰^\circ-۱۵^\circ=۴۵^\circ$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ DBA،

$$\cos B\hat{A}D=\frac{AB}{AD}\Rightarrow\cos۴۵^\circ=\frac{AB}{۲\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AB}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین $AB=۲$. همچنین، در همین مثلث،

$$\sin B\hat{A}D=\frac{BD}{AD}\Rightarrow\sin۴۵^\circ=\frac{BD}{۲\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{BD}{۲\sqrt{۲}}$$

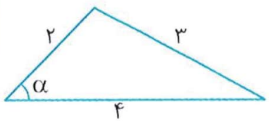
بنابراین $BD=۲$. از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$\tan۳۰^\circ=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲}{BC}\Rightarrow BC=۲\sqrt{۳}$$

به این ترتیب $CD=BC-BD=۲\sqrt{۳}-۲=۲(\sqrt{۳}-۱)$.

تست ۷

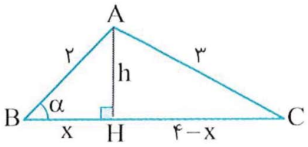
در شکل مقابل مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۸}$
۲) $\frac{۱۳}{۱۶}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

راه‌حل

از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH با توجه به قضیهٔ فیثاغورس،



$$x^۲+h^۲=۴,\quad h^۲+(۴-x)^۲=۹\Rightarrow h^۲+x^۲+۱۶-۸x=۹$$

اگر به‌جای $x^۲+h^۲$ در معادلهٔ دوم مقدار ۴ را قرار دهیم، می‌توان مقدار x را به‌دست آورد

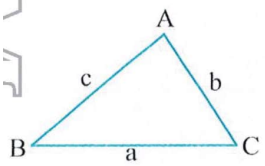
$$۴+۱۶-۸x=۹\Rightarrow ۸x=۱۱\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۸}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH مقدار $\cos\alpha$ را به‌دست می‌آوریم $\cos\hat{B}=\frac{BH}{AB}$، پس $\cos\alpha=\frac{x}{۲}=\frac{۱۱}{۱۶}$.

محاسبهٔ مساحت مثلث

۷۲

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول‌های دو ضلع آن در سینوس زاویهٔ میان این دو ضلع.



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$$

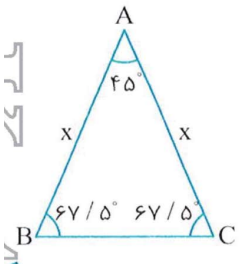
تست ۸

در مثلث متساوی‌الساقین ABC می‌دانیم $AB=AC$، $\hat{B}=۶۷/۵^\circ$ و مساحت مثلث $۹\sqrt{۲}$ است. طول ساق مثلث کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

راه‌حل

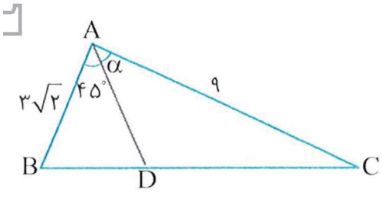
مطابق شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۴۵° است و اگر طول ساق مثلث را x فرض کنیم، مساحت مثلث برابر $S=\frac{۱}{۲}x^۲\sin\hat{A}$ است. پس



$$۹\sqrt{۲}=\frac{۱}{۲}x^۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x^۲=۳۶\Rightarrow x=۶$$

تست ۹

در شکل روبه‌رو $S_{ABD}=\frac{۱}{۲}S_{ADC}$. مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

راه‌حل

توجه کنید که

$$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}S_{ADC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}AB\times AD\times\sin۴۵^\circ=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}AD\times AC\times\sin\alpha\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times۳\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times۹\times\sin\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

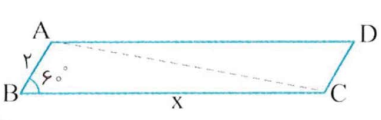
تست ۱۰

در یک متوازی‌الاضلاع که مساحت آن برابر $۱۰\sqrt{۳}$ است، اندازهٔ یک ضلع برابر ۲ و اندازهٔ یک زاویه ۶۰° است. اندازهٔ ضلع دیگر کدام است؟

۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۸
۴) ۱۲

راه‌حل

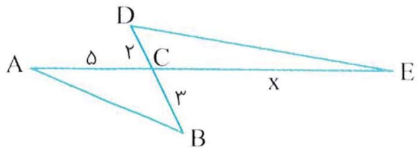
مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD دو برابر مساحت مثلث ABC است. پس مساحت مثلث ABC برابر $۵\sqrt{۳}$ است. بنابراین



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times۲x\times\sin۶۰^\circ\Rightarrow۵\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\Rightarrow x=۱۰$$

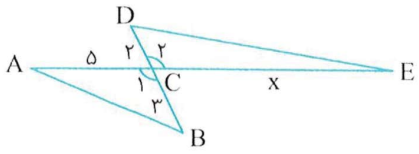
تست ۱۱

در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث CDE برابر $\frac{۳}{۴}$ است. مقدار x کدام است؟



۱) ۴
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۰

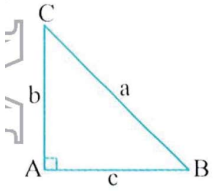
راه‌حل توجه کنید که $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$، پس $\sin\hat{C}_۱=\sin\hat{C}_۲$. از طرف دیگر،



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}}=\frac{\frac{۱}{۲}CA\times CB\times\sin\hat{C}_۱}{\frac{۱}{۲}CD\times CE\times\sin\hat{C}_۲}=\frac{CA\times CB}{CD\times CE}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{۵\times۳}{۲\times x}\Rightarrow x=۱۰$$

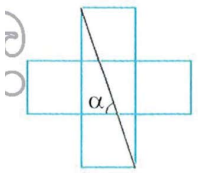
دست‌گرمی

۵۹- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اگر $b=۵$ و $\cos\hat{B}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$، مقدار a کدام است؟



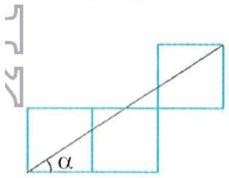
۱) ۶
۲) ۷
۳) $\sqrt{۷}$
۴) ۱۴

۶۰- در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶۱- در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

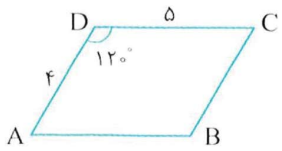


۱) $\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$
۲) $\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱۱}}$
۴) $\frac{۲}{\sqrt{۱۱}}$

۶۲- مقدار عبارت $A=\frac{۴\sin^۳۶۰^\circ-۳\sin۶۰^\circ}{۴\cos^۳۲۰^\circ-۳\cos۲۰^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱-
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) صفر

۶۳- در شکل مقابل مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD چقدر است؟



۱) $۵\sqrt{۳}$
۲) $۱۰\sqrt{۳}$
۳) ۵
۴) ۱۰

آزمون ۳۸ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۱)

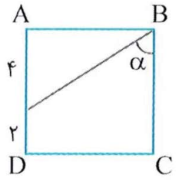
سؤال | گا

۳۷۱ ۳۷۲ ۳۷۳ ۳۷۴ ۳۷۵ ۳۷۶ ۳۷۷ ۳۷۸ ۳۷۹ ۳۸۰

۳۷۱- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\hat{A}=۹۰^\circ$، $\sin\hat{B}=\frac{۱}{۳}$ و $AC=۲$. مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟

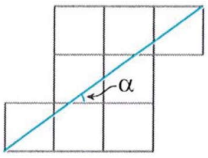
۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۳۷۲- در شکل مقابل ABCD مربع است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



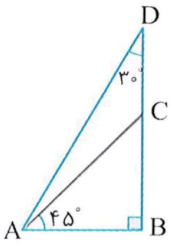
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۷۳- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan\alpha+\cot\alpha$ کدام است؟



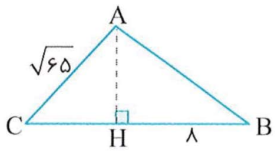
۱) $\frac{۲۵}{۶}$ ۲) $\frac{۴۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۴۹}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲۵}{۱۲}$

۳۷۴- در شکل مقابل نسبت طول DC به طول AC کدام است؟



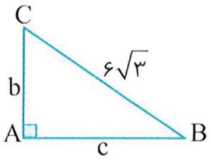
۱) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

۳۷۵- در شکل مقابل $HB=۸$ و $\tan\hat{B}=\frac{۳}{۴}$. طول CH کدام است؟



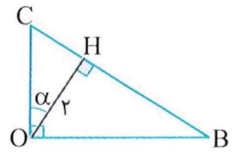
۱) $\sqrt{۲۹}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۳۵}$ ۴) $\sqrt{۲۴}$

۳۷۶- در شکل مقابل $\cot\hat{B}=\sqrt{۲}$. مساحت مثلث چقدر است؟



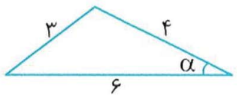
۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) $۱۸\sqrt{۲}$ ۴) $۳۶\sqrt{۲}$

۳۷۷- در شکل مقابل $OH=۲$. مقدار $OB+OC$ کدام است؟



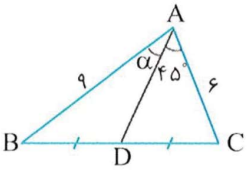
۱) $\tan\alpha+\cot\alpha$ ۲) $\frac{۲}{\sin\alpha}+\frac{۲}{\cos\alpha}$ ۳) $۲\tan\alpha$ ۴) $۲\cot\alpha$

۳۷۸- در شکل مقابل مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



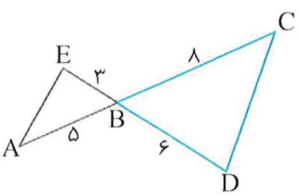
۱) $\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۳۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۴۸}$ ۳) $\frac{۲۹}{۳۶}$ ۴) $\frac{۲۹}{۴۸}$

۳۷۹- در شکل مقابل مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳۸۰- در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABE به مساحت مثلث BCD چقدر است؟



۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

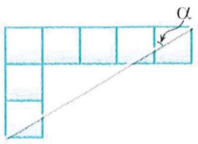
آزمون ۳۹ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۲)

سؤال	گام
۳۸۱	۷۰
۳۸۲	۷۰
۳۸۳	۷۰ ۷۱
۳۸۴	۷۰ ۷۱
۳۸۵	۷۰ ۷۱
۳۸۶	۷۰
۳۸۷	۷۰
۳۸۸	۷۰
۳۸۹	۷۰ ۷۱ ۷۲
۳۹۰	۷۱ ۷۲

۳۸۱- در مثلث ABC، اگر $\hat{C}=۹۰^\circ$، $\sin\hat{B}=\frac{۴}{۵}$ و $b+c=۷$، مقدار a کدام است؟

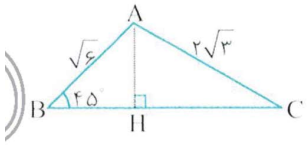
۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱۱}{۳}$

۳۸۲- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



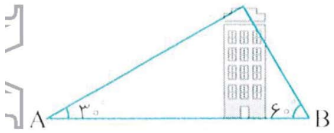
۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۳۸۳- در شکل مقابل نسبت طول ضلع HC به طول ضلع BH چقدر است؟



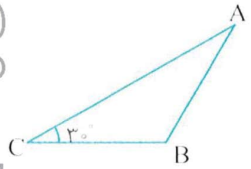
۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) $\sqrt{۵}$

۳۸۴- مطابق شکل روبه‌رو از دو نقطه A و B روی زمین که ۲۴ متر از هم فاصله دارند، بالاترین قسمت یک ساختمان به‌ترتیب با زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° دیده می‌شود. ارتفاع ساختمان کدام است؟



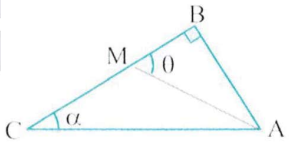
۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۳۸۵- در مثلث متساوی‌الساقین مقابل $AB=BC$ و طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر $۸\sqrt{۳}$ است. طول ضلع BC کدام است؟



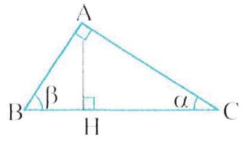
۱) ۸ ۲) ۱۶
۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $۱۶\sqrt{۳}$

۳۸۶- در شکل روبه‌رو $CM=AB$ و $\tan\theta=۳\tan\alpha$. حاصل عبارت $\cot\alpha+\cot\theta$ کدام است؟



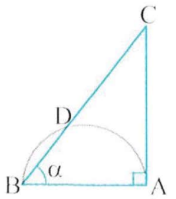
۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۷

۳۸۷- در شکل مقابل $BC=۴$، مقدار $\frac{BH}{HC}$ کدام است؟



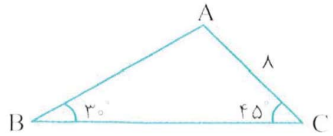
۱) $\tan^۲\alpha$ ۲) $\tan^۲\beta$
۳) $\sin\alpha\cos\alpha$ ۴) $\sin\beta+\cos\beta$

۳۸۸- در نیم‌دایرهٔ شکل روبه‌رو، $BD=x$ و $DC=۸x$. مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟



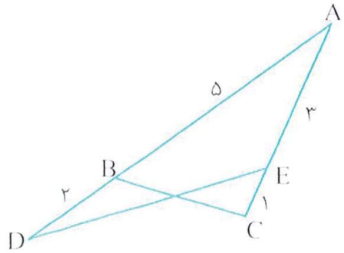
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۸۹- در شکل مقابل طول ضلع AB چقدر است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

۳۹۰- در شکل روبه‌رو $S_{ADE}+S_{ABC}=\frac{۴۱}{۴}$. اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ A کدام است؟

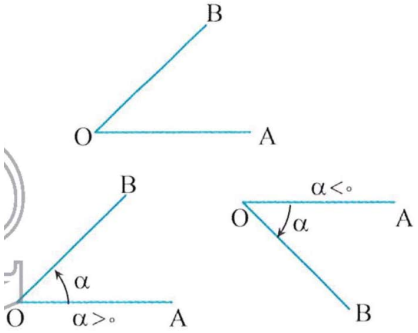


۱) ۶۰° ۲) ۴۵°
۳) ۳۰° ۴) ۱۵°

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی

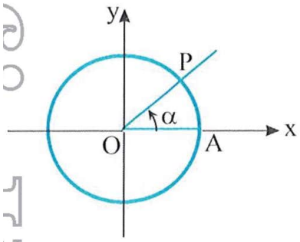
تعاریف اولیه

زاویهٔ مثلثاتی

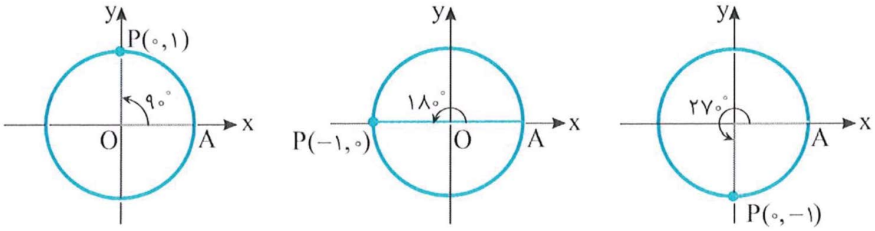


دو نیم‌خط OA و OB را در نظر بگیرید که در نقطهٔ O مشترک‌اند. اگر نیم‌خط OA حول نقطهٔ O دوران کند و بر نیم‌خط OB منطبق شود، **زاویه‌ای مثلثاتی** ایجاد می‌شود. OA را ضلع ابتدایی، OB را ضلع انتهایی و مقدار دوران را **مقدار زاویهٔ مثلثاتی** می‌نامند. اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (ساعتگرد) باشد، اندازهٔ زاویه را منفی در نظر می‌گیرند و اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازهٔ زاویه را مثبت در نظر می‌گیرند. اگر رأس زاویه بر مبدأ مختصات واقع باشد و ضلع ابتدایی زاویه بر قسمت مثبت محور طول‌ها واقع باشد، می‌گوییم زاویه در **موقعیت استاندارد** است. از این پس تمام زاویه‌ها را در موقعیت استاندارد در نظر می‌گیریم.

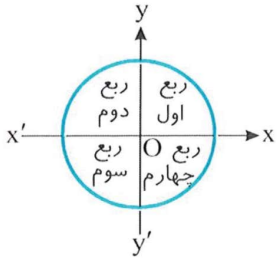
دایرهٔ مثلثاتی



دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد، **دایرهٔ مثلثاتی** می‌نامند. نقطهٔ تقاطع دایره با محور طول‌ها $A(1,0)$ و OA ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی است. اگر OA به اندازهٔ α مطابق شکل روبه‌رو دوران کند، بر OP منطبق می‌شود. α را اندازهٔ زاویهٔ مثلثاتی ایجاد شده و کمان AP را کمان روبه‌رو به زاویهٔ α می‌نامیم. چون ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی را OA فرض کرده‌ایم، پس با معلوم بودن نقطهٔ P روی دایره و جهت دوران، زاویهٔ α مشخص می‌شود. مثلاً وقتی P در نقطه‌های $(0,1)$، $(-1,0)$ و $(0,-1)$ قرار گیرد و جهت دوران پادساعتگرد باشد، زاویه‌های زیر مشخص می‌شوند:



ناحیه‌های مثلثاتی



محورهای $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحهٔ مختصات را به چهار ناحیه تقسیم کرده‌اند. ناحیهٔ بین Ox و Oy را **ناحیهٔ اول** یا **ربع اول** مثلثاتی می‌نامند. همچنین ناحیهٔ بین Oy و Ox' را **ربع دوم** مثلثاتی، ناحیهٔ بین Ox' و Oy' را **ربع سوم** مثلثاتی و ناحیهٔ بین Oy' و Ox را **ربع چهارم** مثلثاتی می‌نامند.

تذکر اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در نقطه‌های $(0,1)$، $(-1,0)$، $(0,-1)$ یا $(1,0)$ قرار داشته باشد، زاویهٔ α در هیچ‌یک از چهار ناحیهٔ مثلثاتی قرار ندارد.

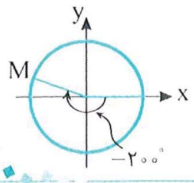
نکته

ناحیه‌ای که نقطهٔ P، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α، در آن قرار می‌گیرد برای زاویه‌های مختلف از 0° تا 360° مطابق جدول زیر است:

حدود α	$0^\circ<\alpha<90^\circ$	$90^\circ<\alpha<180^\circ$	$180^\circ<\alpha<270^\circ$	$270^\circ<\alpha<360^\circ$
ناحیه‌ای که P قرار دارد	اول	دوم	سوم	چهارم

تست ۱ انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ -۲۰۰° در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم



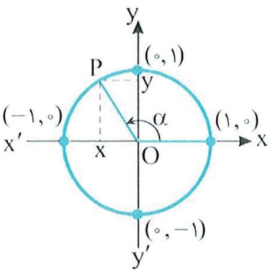
راه‌حل مطابق شکل روبه‌رو انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ -۲۰۰° در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

تست ۲ اگر α زاویه‌ای حاده باشد، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ $\alpha+۱۸۰^\circ$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

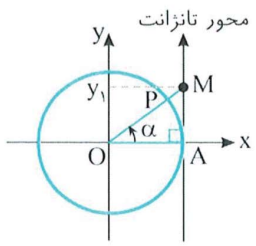
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

راه‌حل چون α زاویه‌ای حاده است، پس $۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$، بنابراین $۱۸۰^\circ<\alpha+۱۸۰^\circ<۲۷۰^\circ$ و در نتیجه انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ $\alpha+۱۸۰^\circ$ در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی



در دایرهٔ مثلثاتی مقابل برای هر زاویه مانند α، $\sin\alpha$ برابر عرض نقطهٔ P یعنی y است. پس $\sin\alpha$ با عددی روی محور $y'Oy$ متناظر است. محور $y'Oy$ را **محور سینوس** می‌نامند و چون $-۱\le y\le ۱$، پس $-۱\le\sin\alpha\le ۱$. همچنین $\cos\alpha$ برابر طول نقطهٔ P یعنی x است. پس $\cos\alpha$ با عددی روی محور $x'Ox$ متناظر است. محور $x'Ox$ را **محور کسینوس** می‌نامند و چون $-۱\le x\le ۱$، پس $-۱\le\cos\alpha\le ۱$.



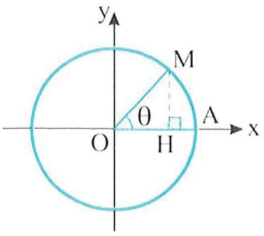
در نقطهٔ $A(۱,۰)$ محوری عمود بر محور x رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور y انتخاب می‌کنیم. این محور را **محور تانژانت** می‌نامیم. مقدار تانژانت هر زاویهٔ دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM در شکل مقابل می‌توان نوشت $\tan\alpha=\frac{AM}{OA}=\frac{AM}{۱}=AM$.

برای مشخص کردن تانژانت زاویهٔ α، کافی است شعاع OP، ضلع انتهایی زاویهٔ α، را امتداد دهیم تا محور تانژانت را در نقطهٔ $M(۱,y_۱)$ قطع کند. در این‌صورت $y_۱=\tan\alpha$.

نکته

اگر ضلع انتهایی زاویهٔ α روی محور y قرار داشته باشد، تانژانت زاویهٔ α تعریف نمی‌شود.

تست ۳ در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، $\cos\theta=\frac{۲}{۳}$. اندازهٔ پاره‌خط AH چقدر است؟



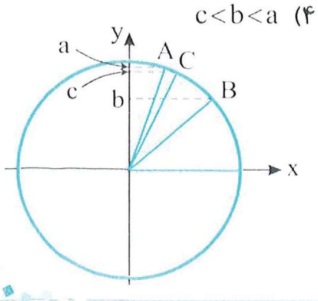
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۸}}{۳}$ ۴) $۱-\frac{\sqrt{۸}}{۳}$

راه‌حل با توجه به شکل، $OH=\cos\theta=\frac{۲}{۳}\Rightarrow AH=OA-OH=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$

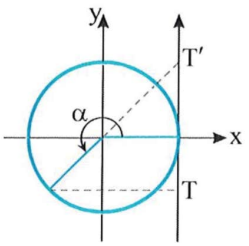
تست ۴ اگر $a=\sin ۷۱^\circ$، $b=\sin ۴۱^\circ$ و $c=\sin ۶۷^\circ$، کدام درست است؟

۱) $a<b<c$ ۲) $b<c<a$ ۳) $a<c<b$ ۴) $c<b<a$



راه‌حل فرض کنید نقاط A، B و C به‌ترتیب انتهای کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های ۷۱°، ۴۱° و ۶۷° روی دایرهٔ مثلثاتی باشند. از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b<c<a$.

تست ۵ در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، طول پاره‌خط TT' برابر کدام عبارت است؟



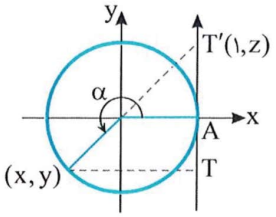
۱) $\tan\alpha-\sin\alpha$

۲) $\tan\alpha+\sin\alpha$

۳) $\sin\alpha-\cos\alpha$

۴) $\sin\alpha+\cos\alpha$

راه‌حل با توجه به شکل روبه‌رو واضح است که $\sin\alpha=y$ و $\tan\alpha=z$. بنابراین طول پاره‌خط TT' برابر است با

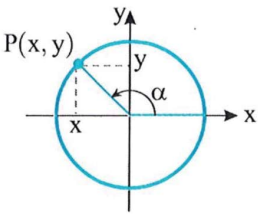


$$TT'=AT+AT'=|y|+|z|=-y+z=-\sin\alpha+\tan\alpha$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی

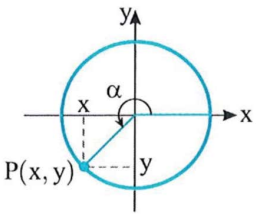
۷۵

اگر نقطهٔ P انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α، در ناحیهٔ اول مثلثاتی واقع باشد، طول و عرض آن مثبت است و تمام نسبت‌های مثلثاتی α مثبت‌اند.
اگر نقطهٔ P در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم مثلثاتی قرار گیرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α می‌توانند مثبت یا منفی باشند، زیرا طول و عرض نقطهٔ P در این ناحیه‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. به شکل‌های زیر دقت کنید:



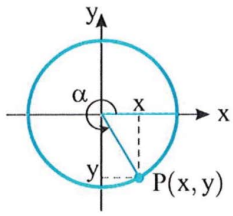
$\sin\alpha=y>0$ ، $\cos\alpha=x<0$

$\tan\alpha=\frac{y}{x}<0$ ، $\cot\alpha=\frac{x}{y}<0$



$\sin\alpha=y<0$ ، $\cos\alpha=x<0$

$\tan\alpha=\frac{y}{x}>0$ ، $\cot\alpha=\frac{x}{y}>0$



$\sin\alpha=y<0$ ، $\cos\alpha=x>0$

$\tan\alpha=\frac{y}{x}<0$ ، $\cot\alpha=\frac{x}{y}<0$

نکته

علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α، وقتی انتهای کمان روبه‌رو به آن در ناحیه‌های مختلف قرار می‌گیرد، مطابق جدول زیر است:

نسبت \ ناحیه	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

تست ۶ اگر $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$ و $|\sin\alpha|=\sin\alpha$، **انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟** $(\alpha\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z})$

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

راه‌حل با توجه به تساوی $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$، معلوم است که $\cos\alpha\leq 0$. با توجه به تساوی $|\sin\alpha|=\sin\alpha$، معلوم است که $\sin\alpha\geq 0$. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد.

تست ۷ اگر $\sin\alpha\cos\alpha<0$ و $\sin\alpha\tan\alpha>0$، **انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟**

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

راه‌حل با توجه به $\sin\alpha\cos\alpha<0$ مشخص است که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مختلف‌العلامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم یا چهارم قرار دارد. با توجه به $\sin\alpha\tan\alpha>0$ واضح است که $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ هم‌علامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ اول یا چهارم قرار دارد. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

تست ۸ کدام‌یک عددی مثبت است؟

۱) $\sin ۲۰۰^\circ$ ۲) $\cos ۲۰۰^\circ$ ۳) $\sin ۳۰۰^\circ$ ۴) $\cos ۳۰۰^\circ$

راه‌حل انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۲۰۰° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin ۲۰۰^\circ$ و $\cos ۲۰۰^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰۰° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin ۳۰۰^\circ$ عددی منفی و $\cos ۳۰۰^\circ$ عددی مثبت است.

نسبت‌های مثلثاتی چند زاویهٔ معروف

۷۶

زاویه / نسبت	$\alpha=۰^\circ$	$\alpha=۳۰^\circ$	$\alpha=۴۵^\circ$	$\alpha=۶۰^\circ$	$\alpha=۹۰^\circ$	$\alpha=۱۸۰^\circ$	$\alpha=۲۷۰^\circ$	$\alpha=۳۶۰^\circ$
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

نکته ۷۷

برای هر زاویهٔ دلخواه مانند α، $-۱\le\sin\alpha\le۱$ و $-۱\le\cos\alpha\le۱$، همچنین اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ تعریف شوند، مقادیر آن‌ها اعدادی در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ هستند.

تست ۹ حداکثر مقدار عبارت $۴\cos\alpha-۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل طرفین نابرابری $-۱\le\cos\alpha\le۱$ را در ۴ ضرب می‌کنیم $-۴\le۴\cos\alpha\le۴$. یک واحد از طرفین نابرابری اخیر کم می‌کنیم $-۵\le۴\cos\alpha-۱\le۳$. بنابراین حداکثر مقدار عبارت ۳ است.

تست ۱۰ مجموع حداکثر و حداقل مقدار عبارت $\frac{\sin\alpha}{۲+\sin\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

راه‌حل ابتدا عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{\sin\alpha}{۲+\sin\alpha}=\frac{۲+\sin\alpha-۲}{۲+\sin\alpha}=\frac{۲+\sin\alpha}{۲+\sin\alpha}-\frac{۲}{۲+\sin\alpha}=۱-\frac{۲}{۲+\sin\alpha}$$

اکنون با توجه به اینکه $-۱\le\sin\alpha\le۱$ می‌توانیم محدودهٔ A را بیابیم:

$$-۱\le\sin\alpha\le۱\Rightarrow۱\le۲+\sin\alpha\le۳\Rightarrow\frac{۱}{۳}\le\frac{۱}{۲+\sin\alpha}\le۱\Rightarrow-۲\le\frac{-۲}{۲+\sin\alpha}\le-\frac{۲}{۳}\Rightarrow-۱\le۱-\frac{۲}{۲+\sin\alpha}\le\frac{۱}{۳}$$

بنابراین حداقل مقدار A برابر -۱ و حداکثر مقدار آن $\frac{۱}{۳}$ است. در نتیجه مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت، برابر $-\frac{۲}{۳}$ است.

نکته ۷۸ **حدود نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف**

$۲۷۰^\circ<\alpha<۳۶۰^\circ$	$۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$	$۹۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$	$۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$
$-۱<\sin\alpha<۰$	$-۱<\sin\alpha<۰$	$۰<\sin\alpha<۱$	$۰<\sin\alpha<۱$
$۰<\cos\alpha<۱$	$-۱<\cos\alpha<۰$	$-۱<\cos\alpha<۰$	$۰<\cos\alpha<۱$
$\tan\alpha<۰$	$\tan\alpha>۰$	$\tan\alpha<۰$	$\tan\alpha>۰$
$\cot\alpha<۰$	$\cot\alpha>۰$	$\cot\alpha<۰$	$\cot\alpha>۰$

تست ۱۱ اگر $۱۸۰^\circ\le\alpha\le۲۷۰^\circ$، اختلاف حداقل و حداکثر مقدار عبارت $A=۳-۲\sin\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل با توجه به $۱۸۰^\circ\le\alpha\le۲۷۰^\circ$، معلوم می‌شود α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی قرار دارد و می‌توان نتیجه گرفت $-۱\le\sin\alpha\le۰$. بنابراین $۰\le-۲\sin\alpha\le۲$ و در نتیجه $۳\le۳-۲\sin\alpha\le۵$. پس حداقل مقدار A برابر ۳ و حداکثر مقدار آن برابر ۵ است و اختلاف آن‌ها ۲ است.

نکته ۷۹

با افزایش مقادیر α از ۰° به ۳۶۰°،

مقادیر $\sin\alpha$ در ناحیه‌های اول و چهارم در حال افزایش و در ناحیه‌های دوم و سوم در حال کاهش هستند.

مقادیر $\cos\alpha$ در ناحیه‌های اول و دوم در حال کاهش و در ناحیه‌های سوم و چهارم در حال افزایش هستند.

مقادیر $\tan\alpha$ در هر چهار ناحیه در حال افزایش هستند.

تست ۱۲ کدام مقدار بزرگ‌تر است؟

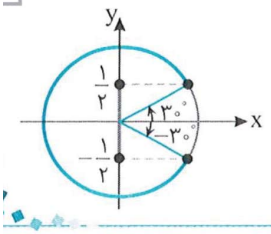
۱) $\sin۱۰۰^\circ$ ۲) $\sin۱۴۰^\circ$ ۳) $\sin۲۰۰^\circ$ ۴) $\sin۲۴۰^\circ$

راه‌حل توجه کنید که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های ۱۰۰° و ۱۴۰° در ناحیهٔ دوم قرار دارد و سینوس این اعداد مثبت هستند و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های ۲۰۰° و ۲۴۰° در ناحیهٔ سوم قرار دارند و سینوس این اعداد منفی هستند. از طرف دیگر در ناحیهٔ دوم، زاویهٔ بزرگ‌تر سینوس کوچک‌تری دارد. بنابراین $\sin۱۰۰^\circ$ در بین مقادیر داده شده از همه بزرگ‌تر است.

تست ۱۳ اگر $-۶۰^\circ\le\alpha\le۶۰^\circ$ و $\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{m}{۴}$، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل از $-۶۰^\circ\le\alpha\le۶۰^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-۳۰^\circ\le\frac{\alpha}{۲}\le۳۰^\circ$. با توجه به شکل روبه‌رو $-\frac{۱}{۲}\le\sin\frac{\alpha}{۲}\le\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $-\frac{۱}{۲}\le\frac{m}{۴}\le\frac{۱}{۲}$، یعنی $-۲\le m\le۲$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ±۲، ±۱ و صفر باشد.

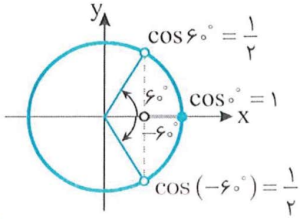


تست ۱۴ اگر $-۶۰^\circ<\alpha<۶۰^\circ$ و $\cos\alpha=۳m+۱$، حدود m کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}<m<۰$ ۲) $۰\le m<\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}<m<\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۶}<m\le۰$

راه‌حل وقتی α از -۶۰° تا ۶۰° تغییر می‌کند، مقدار $\cos\alpha$، از -۶۰° تا ۰° افزایش می‌یابد و سپس از ۰° تا ۶۰° کاهش می‌یابد. بنابراین $\cos\alpha$ در $\alpha=۰^\circ$ به بیشترین مقدار خود، یعنی ۱ می‌رسد. پس

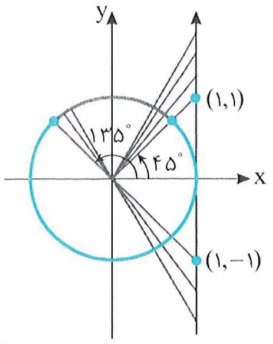
$$\frac{۱}{۲}<\cos\alpha\le۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<۳m+۱\le۱\Rightarrow-\frac{۱}{۲}<۳m\le۰\Rightarrow-\frac{۱}{۶}<m\le۰$$



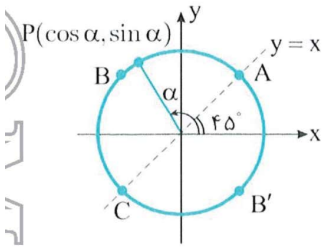
تست ۱۵ اگر $۴۵^\circ \le \alpha \le ۱۳۵^\circ$، مقادیر $\tan\alpha$ در کدام محدوده قرار دارند؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[-۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $\mathbb{R}-(-۱,۱)$

راه‌حل با توجه به شکل روبه‌رو، وقتی $۴۵^\circ \le \alpha \le ۱۳۵^\circ$، $\tan\alpha \ge ۱$ یا $\tan\alpha \le -۱$، یعنی مقادیر $\tan\alpha$ در $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ قرار دارند.



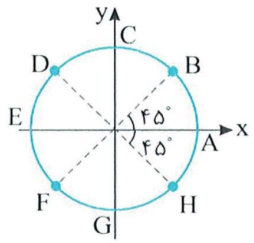
از روی شکل مقابل معلوم است که اگر نقطهٔ (x,y) روی کمان ABC از دایرهٔ مثلثاتی باشد، آن‌گاه $y>x$. بنابراین اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α روی کمان ABC باشد، آن‌گاه $\sin\alpha>\cos\alpha$. همین‌طور، اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α روی کمان $AB'C$ باشد، آن‌گاه $\sin\alpha<\cos\alpha$. به همین ترتیب نتایج زیر به‌دست می‌آید.



نکته ۸۰

شکل مقابل را در نظر بگیرید. فرض کنید نقطهٔ $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α روی دایرهٔ مثلثاتی باشد. در این صورت

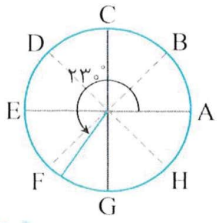
- **اگر نقطهٔ P روی کمان BDF باشد، آن‌گاه $\sin\alpha>\cos\alpha$ و اگر نقطهٔ P روی کمان BHF باشد، آن‌گاه $\sin\alpha<\cos\alpha$.**
- **اگر نقطهٔ P روی کمان DBH باشد، آن‌گاه $\sin\alpha+\cos\alpha>۰$ و اگر نقطهٔ P روی کمان DFH باشد، آن‌گاه $\sin\alpha+\cos\alpha<۰$.**
- **اگر نقطهٔ P روی کمان‌های AB، CD، EF یا GH باشد (به شرطی که $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan\alpha<\cot\alpha$ و اگر نقطهٔ P روی کمان‌های BC، DE، FG یا HA باشد، آن‌گاه $\tan\alpha>\cot\alpha$.**
- **اگر نقطهٔ P روی کمان‌های ABC یا EFG باشد (به شرطی که $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan\alpha+\cot\alpha>۰$ و اگر نقطهٔ P روی کمان‌های CDE یا GHA باشد، آن‌گاه $\tan\alpha+\cot\alpha<۰$.**



تست ۱۶ کدام گزینه درست است؟

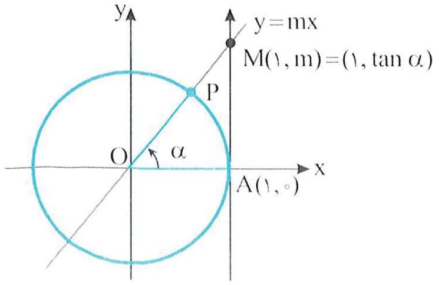
۱) $\sin ۲۵^\circ > \cos ۲۵^\circ$ ۲) $\tan ۲۵^\circ > \cot ۲۵^\circ$ ۳) $\sin ۲۳۰^\circ > \cos ۲۳۰^\circ$ ۴) $\tan ۲۳۰^\circ > \cot ۲۳۰^\circ$

راه‌حل با توجه به شکل مقابل، چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۲۳۰° روی کمان FG است، پس $\tan ۲۳۰^\circ > \cot ۲۳۰^\circ$. خودتان بررسی کنید که گزینه‌های دیگر درست نیستند.



رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه

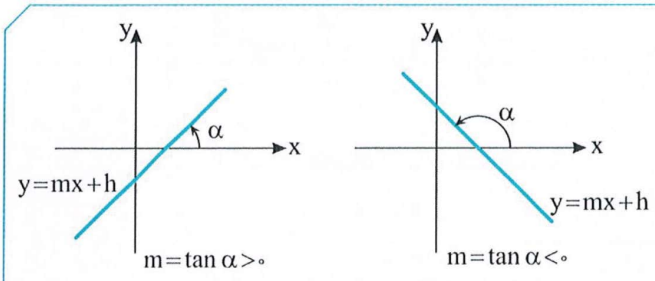
۸۱



می‌دانیم مقدار $\tan\alpha$ برابر عرض نقطهٔ M، محل برخورد امتداد شعاع OP با محور تانژانت است (شکل روبه‌رو را ببینید). از طرف دیگر، طول نقطهٔ M برابر ۱ است و این نقطه روی خط $y=mx$ قرار دارد، پس عرض آن برابر m است. بنابراین $m=\tan\alpha$. اکنون توجه کنید که همهٔ خط‌های موازی با خط $y=mx$ شیب یکسان با این خط دارند و آن‌ها نیز محور طول‌ها را با زاویهٔ α قطع می‌کنند. بنابراین شیب تمام این خط‌ها همان $\tan\alpha$ است.

نکته

اگر محور طول‌ها و خط $y=mx+h$ یک زاویهٔ مثلثاتی مثبت و کمتر از 180° به اندازهٔ α تشکیل دهند، آن‌گاه $m=\tan\alpha$.



تست ۱۷

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-2,\sqrt{12})$ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویهٔ مثلثاتی 60° می‌سازد، کدام است؟

۱) $y=\sqrt{3}x+8$ ۲) $y=\sqrt{3}x-8$ ۳) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-4$ ۴) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

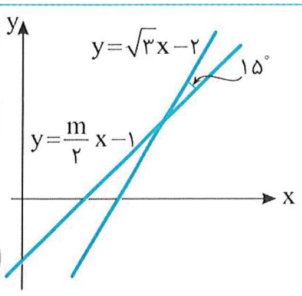
راه‌حل

با توجه به زاویهٔ خط با محور طول‌ها که برابر زاویهٔ مثلثاتی 60° است، شیب خط برابر $\tan 60^\circ$ یا همان $\sqrt{3}$ است. پس معادلهٔ خط به‌صورت $y=\sqrt{3}x+b$ است و چون خط از نقطهٔ $(-2,\sqrt{12})$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند، $-2=\sqrt{3}\sqrt{12}+b$.

بنابراین $b=-8$. پس معادلهٔ خط $y=\sqrt{3}x-8$ است.

تست ۱۸

با توجه به شکل مقابل مقدار m کدام است؟



۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲

۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{1}{2}$

راه‌حل

چون شیب خط $y=\sqrt{3}x-2$ برابر $\sqrt{3}$ است، زاویهٔ مثلثاتی تشکیل‌شده بین محور طول‌ها و این خط 60° است. پس زاویهٔ مثلثاتی تشکیل‌شده بین محور طول‌ها و خط $y=\frac{m}{2}x-1$، برابر $180^\circ-120^\circ-15^\circ=45^\circ$ است و در نتیجه

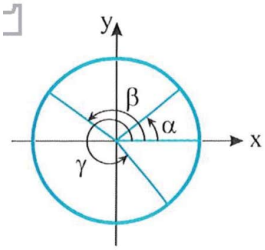
$$\frac{m}{2}=\tan 45^\circ=1\Rightarrow m=2$$

دست‌گرمی

۶۴- انتهای کمان روبه‌رو به کدام‌یک از زاویه‌های زیر در ناحیهٔ سوم قرار دارد؟

۱) 170° ۲) 260° ۳) 280° ۴) 330°

۶۵- زاویه‌های α، β و γ مانند شکل روبه‌رو در دایرهٔ مثلثاتی مشخص شده‌اند. اگر $a=\cos\alpha$، $b=\cos\beta$ و $c=\cos\gamma$، کدام گزینه درست است؟



۱) $a>b>c$

۲) $b>c>a$

۳) $a>c>b$

۴) $c>a>b$

۶۶- اگر $\sin\alpha\cos\alpha>0$ و $\cos\alpha\cot\alpha<0$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۶۷- اگر $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$ و $\sin\alpha=\frac{m}{2}-1$، حدود m کدام است؟

۱) $2\le m\le 4$ ۲) $-2\le m\le 0$ ۳) $-2\le m\le 2$ ۴) $1\le m\le 3$

۶۸- حاصل‌ضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت $A=2+3\sin^2 x$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۶۹- معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(\sqrt{3},6)$ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویهٔ مثلثاتی 30° می‌سازد، کدام است؟

۱) $x-\sqrt{3}y-3=0$ ۲) $x+\sqrt{3}y-9=0$ ۳) $2x-\sqrt{3}y-9=0$ ۴) $x-2\sqrt{3}y=0$

آزمون ۴۰ نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی (۱)

سؤال	گام
۳۹۱	۷۳ ۷۵
۳۹۲	۷۵
۳۹۳	۷۰ ۷۴
۳۹۴	۷۹
۳۹۵	۷۷
۳۹۶	۷۸
۳۹۷	۷۲ ۷۸
۳۹۸	۷۸
۳۹۹	۷۶ ۸۱
۴۰۰	۷۶ ۸۱

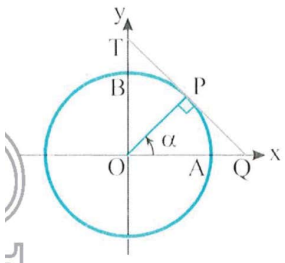
۳۹۱- کدام‌یک عددی مثبت است؟

۱) $\sin 230^\circ$ ۲) $\cos 230^\circ$ ۳) $\sin 310^\circ$ ۴) $\cos 310^\circ$

۳۹۲- اگر $\cos x\sqrt{1+\tan^2 x}=1$ و $\tan x=-\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$. انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۹۳- در دایرهٔ مثلثاتی مقابل α زاویه‌ای حاده است. طول پاره‌خط BT کدام است؟



۱) $\frac{1}{\cos\alpha}$ ۲) $\frac{1}{\sin\alpha}$
۳) $\frac{1}{\cos\alpha}-1$ ۴) $\frac{1}{\sin\alpha}-1$

۳۹۴- اگر $-15^\circ\le\alpha\le 15^\circ$ و $\sin 2\alpha=\frac{m}{4}$. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۹۵- اگر $2\sin\alpha+5\cos\beta=7$، مقدار $3\sin\alpha-4\cos\beta$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -7

۳۹۶- اگر $0^\circ\le\alpha\le 180^\circ$. حداکثر مقدار عبارت $\frac{3}{2\sin\alpha+1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

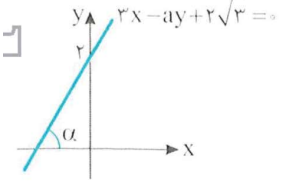
۳۹۷- اگر طول دو ضلع مثلثی $\sqrt{2}$ و $\sqrt{6}$ باشد. بیشترین مقدار ممکن مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{3}$

۳۹۸- اگر $90^\circ<\alpha\le 180^\circ$ و $\tan\alpha=2m+1$. حدود m کدام است؟

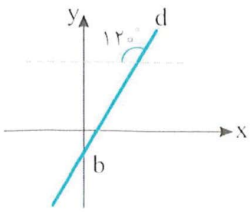
۱) $m\le-\frac{1}{2}$ ۲) $m<-\frac{1}{2}$ ۳) $m>-\frac{1}{2}$ ۴) $m\ge-\frac{1}{2}$

۳۹۹- در شکل مقابل مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۴۰۰- معادلهٔ خط d در شکل مقابل به‌صورت $y=a(x-2)+\sqrt{3}$ است. مقدار b کدام است؟



۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $-2\sqrt{3}$
۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

آزمون ۴۱ — نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی (۲)

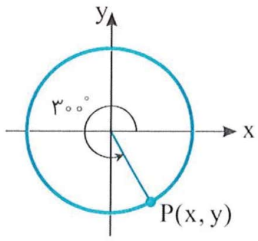
سؤال

۴۰۱ ۴۰۲ ۴۰۳ ۴۰۴ ۴۰۵ ۴۰۶ ۴۰۷ ۴۰۸ ۴۰۹ ۴۱۰

۴۰۱- کدام‌یک عددی منفی است؟

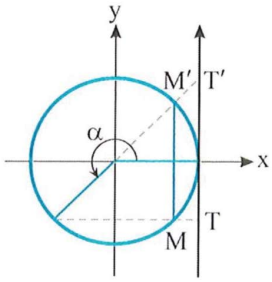
۱) $\tan ۱۷۰^\circ$ ۲) $\tan ۱۹۰^\circ$ ۳) $\cot ۷۰^\circ$ ۴) $\cot ۲۶۰^\circ$

۴۰۲- در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، مقدار $\frac{y}{x-۱}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}$
۲) $-\sqrt{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴۰۳- در دایرهٔ مثلثاتی مقابل طول پاره‌خط TT' چقدر از طول پاره‌خط MM' بیشتر است؟



۱) $\tan\alpha-\sin\alpha$
۲) $\tan\alpha+\sin\alpha$
۳) $\cot\alpha-\cos\alpha$
۴) $\sin\alpha+\cos\alpha$

۴۰۴- اگر $-۹۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$ و $\cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{m}{۴}$، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۴۰۵- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A=۴\cos^۲ x-۲\sin x$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۴}$ ۴) ۴

۴۰۶- مقدار عبارت $A=\frac{۳\cos\alpha+۱}{\cos\alpha+۳}$ با کدام‌یک از اعداد زیر نمی‌تواند برابر باشد؟

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $-\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) ۱

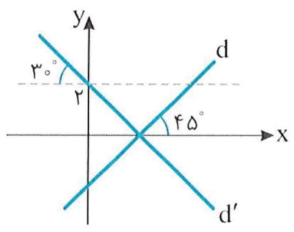
۴۰۷- حاصل عبارت $|\sin ۲۰^\circ-\cos ۲۰^\circ|-|\sin ۷۰^\circ-\cos ۷۰^\circ|$ کدام است؟

۱) $-۲\sin ۲۰^\circ$ ۲) $۲\cos ۲۰^\circ$ ۳) $۲\sin ۲۰^\circ$ ۴) صفر

۴۰۸- اگر $۱۸۰^\circ\le\alpha<۲۷۰^\circ$ و $\tan\alpha=m^۳+m^۲$، حدود m کدام است؟

۱) $m\ge ۰$ ۲) $m\le ۰$ ۳) $m\ge -۱$ ۴) $m\le -۱$

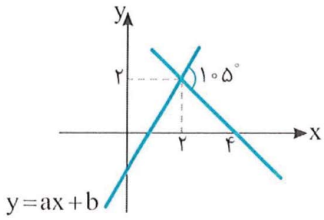
۴۰۹- در شکل مقابل خط‌های d و d' روی محور x متقاطع‌اند. معادلهٔ خط d کدام است؟



$(\tan ۱۵۰^\circ=-\frac{۱}{\sqrt{۳}})$

۱) $y=x-۲\sqrt{۳}$ ۲) $y=۲x-\sqrt{۳}$
۳) $y=\sqrt{۳}x-\sqrt{۳}$ ۴) $y=x-\sqrt{۳}$

۴۱۰- دو خط شکل مقابل از نقطهٔ $(۲,۲)$ عبور می‌کنند. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) $۲-۲\sqrt{۳}$
۲) $۲-\sqrt{۳}$
۳) $۱-\sqrt{۳}$
۴) $۲-۳\sqrt{۳}$

درس سوم: اتحادهای مثلثاتی

نکتهٔ زیر از تعریف روابط مثلثاتی نتیجه می‌شود.

نکته رابطهٔ بین نسبت‌های مثلثاتی ۸۲

اگر α زاویه‌ای باشد که مخرج‌ها در عبارت‌های زیر صفر نباشند، آن‌گاه رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی درست‌اند:

۱) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ۲) $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ۳) $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$

۴) $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ ۵) $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ ۶) $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$

تساوی (۳) را می‌توان به شکل $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ نیز نوشت. همین‌طور، از تساوی (۴) نتیجه می‌شود $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$ و $\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha$.

تست ۱ مقدار عبارت $\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{۱}{۱+\cot^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sin\alpha$ ۳) $\cos\alpha$ ۴) $\frac{۱}{\sin\alpha}$

راه‌حل **راه‌حل اول** می‌دانیم $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$، بنابراین

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{۱}{۱+\cot^۲\alpha}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\tan^۲\alpha}}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=۱$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ و $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$، بنابراین

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{۱}{۱+\cot^۲\alpha}=\frac{۱}{\frac{۱}{\cos^۲\alpha}}+\frac{۱}{\frac{۱}{\sin^۲\alpha}}=\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha=۱$$

تست ۲ ساده شدهٔ عبارت $\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\tan\alpha\tan\beta$ ۳) $\cot\alpha\cot\beta$ ۴) $\cot\alpha+\cot\beta$

راه‌حل می‌دانیم $\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}$ و $\tan\beta=\frac{۱}{\cot\beta}$، بنابراین

$$\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\frac{۱}{\cot\alpha}+\frac{۱}{\cot\beta}}=\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\frac{\cot\beta+\cot\alpha}{\cot\alpha\cot\beta}}=\cot\alpha\cot\beta$$

تست ۳ اگر $\frac{۳\sin x}{۲\sin x+\cos x}=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

راه‌حل از تساوی $\frac{۳\sin x}{۲\sin x+\cos x}=\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود $۶\sin x=۲\sin x+\cos x$، بنابراین $۴\sin x=\cos x$ و در نتیجه $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۴}$، پس $\tan x=\frac{۱}{۴}$.

تست ۴ حاصل عبارت $\frac{۴\sin\alpha\cos\alpha}{۱-\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) $۲\cot\alpha$ ۲) $۲\tan\alpha$ ۳) $\sin\alpha$ ۴) $\cot\alpha$

راه‌حل ابتدا مخرج کسر را به‌صورت $(۱-\cos^۲\alpha)+\sin^۲\alpha=\sin^۲\alpha+\sin^۲\alpha=۲\sin^۲\alpha$ می‌نویسیم. پس $\frac{۴\sin\alpha\cos\alpha}{۲\sin^۲\alpha}=\frac{۲\cos\alpha}{\sin\alpha}=۲\cot\alpha$.

تست ۵ اگر $\sin\alpha=\sqrt{m}$ و $\cos\alpha=\sqrt{2m-1}$، مقدار $\tan^2\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل با توجه به رابطهٔ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$، مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$(\sqrt{m})^2+(\sqrt{2m-1})^2=1\Rightarrow m+2m-1=1\Rightarrow m=\frac{2}{3}$$

برای به دست آوردن $\tan^2\alpha$، از رابطهٔ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2m-1}}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\sqrt{2}\Rightarrow\tan^2\alpha=2$$

تست ۶ اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع سوم باشد و $\tan\alpha=\frac{3}{4}$، حاصل $\sin\alpha-\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{5}$ ۲) $-\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

راه‌حل توجه کنید که

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\xrightarrow[\cos\alpha<0]{\alpha\text{ ربع سوم}}\cos\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{\sin\alpha}{-\frac{4}{5}}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

بنابراین $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

تست ۷ اگر $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ و $270^\circ<\alpha<360^\circ$، مقدار $15\tan\alpha-12\cot\alpha$ کدام است؟

۱) ۲۷− ۲) ۲۹− ۳) ۳۱− ۴) ۳۳−

راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که اگر $270^\circ<\alpha<360^\circ$، آن‌گاه $\cot\alpha$ مقداری منفی است. پس

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\frac{169}{144}\Rightarrow\cot^2\alpha=\frac{25}{144}\Rightarrow\cot\alpha=-\frac{5}{12},\ \tan\alpha=-\frac{12}{5}$$

پس $15\tan\alpha-12\cot\alpha=-36+5=-31$.

راه‌حل دوم از رابطهٔ $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر $270^\circ<\alpha<360^\circ$، آن‌گاه $\cos\alpha>0$، پس

$$\cos^2\alpha=1-(-\frac{12}{13})^2=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{5}{13}$$

پس $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{5}{12}$. بنابراین $15\tan\alpha-12\cot\alpha=15(-\frac{12}{5})-12(-\frac{5}{12})=-31$.

تست ۸ اگر $\tan\alpha=3$، مقدار $A=\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-4\cos\alpha}$ کدام است؟

۱) ۷− ۲) ۷ ۳) ۱− ۴) ۱

راه‌حل اول از تساوی $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$ به دست می‌آید $\sin\alpha=3\cos\alpha$. با جای‌گذاری مقدار $3\cos\alpha$ به جای $\sin\alpha$ در عبارت A، به‌دست می‌آید $A=\frac{2(3\cos\alpha)+\cos\alpha}{3\cos\alpha-4\cos\alpha}=\frac{7\cos\alpha}{-\cos\alpha}=-7$.

راه‌حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan\alpha$ در عبارت ظاهر شود:

$$A=\frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{4\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{2\tan\alpha+1}{\tan\alpha-4}=\frac{2\times3+1}{3-4}=-7$$

تست ۹ اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ربع اول باشد و $\sin x-\cos x=\frac{۱}{۳}$، حاصل $\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۹}$ ۴) $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^۲+(\sin x+\cos x)^۲=\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}-۲\sin x\cos x+\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}+۲\sin x\cos x=۲$$

$$(\sin x+\cos x)^۲=۲-(\sin x-\cos x)^۲=۲-(\frac{۱}{۳})^۲=۲-\frac{۱}{۹}=\frac{۱۷}{۹}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ربع اول قرار دارد، پس $\sin x+\cos x>۰$. در نتیجه $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$.

تست ۱۰ عبارت $\sin^۲\alpha\cos^۲\beta-\cos^۲\alpha\sin^۲\beta$ با کدام‌یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

۱) $\cos^۲\alpha-\cos^۲\beta$ ۲) $\sin^۲\alpha-\cos^۲\beta$ ۳) $\sin^۲\alpha-\sin^۲\beta$ ۴) $\cos^۲\alpha-\sin^۲\beta$

راه‌حل در عبارت داده شده به جای $\cos^۲\beta$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^۲\beta$ و به جای $\cos^۲\alpha$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^۲\alpha$. عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$\sin^۲\alpha\cos^۲\beta-\cos^۲\alpha\sin^۲\beta=\sin^۲\alpha(۱-\sin^۲\beta)-(۱-\sin^۲\alpha)\sin^۲\beta=\sin^۲\alpha-\sin^۲\alpha\sin^۲\beta-\sin^۲\beta+\sin^۲\alpha\sin^۲\beta$$
$$=\sin^۲\alpha-\sin^۲\beta$$

تست ۱۱ ساده شدهٔ عبارت $\frac{\cos ۱۰^\circ}{۱+\sin ۱۰^\circ}-\frac{\cos ۱۰^\circ}{۱-\sin ۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $-۲\tan ۱۰^\circ$ ۲) $۲\tan ۱۰^\circ$ ۳) $\frac{۲}{\cos^۲ ۱۰^\circ}$ ۴) $-\frac{۲}{\cos ۱۰^\circ}$

راه‌حل به کمک مخرج مشترک‌گیری، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۱۰^\circ(\frac{۱}{۱+\sin ۱۰^\circ}-\frac{۱}{۱-\sin ۱۰^\circ})=(\frac{۱-\sin ۱۰^\circ-(۱+\sin ۱۰^\circ)}{(۱+\sin ۱۰^\circ)(۱-\sin ۱۰^\circ)})\cos ۱۰^\circ=\frac{-۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}{۱-\sin^۲ ۱۰^\circ}$$
$$=\frac{-۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}{\cos^۲ ۱۰^\circ}=\frac{-۲\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=-۲\tan ۱۰^\circ$$

تست ۱۲ هرگاه $\tan^۲\theta+\tan\theta-۱=۰$، حاصل $\tan^۴\theta+\cot^۴\theta$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

راه‌حل چون $\tan\theta\neq۰$، بنابراین تساوی داده‌شده را می‌توان به‌صورت $\tan\theta-\frac{۱}{\tan\theta}=-۱$ نوشت. پس

$$\tan^۲\theta+\frac{۱}{\tan^۲\theta}=(\tan\theta-\frac{۱}{\tan\theta})^۲+۲=۳$$

در نتیجه

$$\tan^۴\theta+\cot^۴\theta=\tan^۴\theta+\frac{۱}{\tan^۴\theta}=(\tan^۲\theta+\frac{۱}{\tan^۲\theta})^۲-۲=۹-۲=۷$$

تست ۱۳ اگر $۹۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$، حاصل عبارت $A=\sqrt{۱+۲\sqrt{\sin^۲\alpha-\sin^۴\alpha}}$ کدام است؟

۱) $\sin\alpha+\cos\alpha$ ۲) $\sin\alpha-\cos\alpha$ ۳) $\cos\alpha-\sin\alpha$ ۴) $\sqrt{\sin\alpha-\cos\alpha}$

راه‌حل توجه کنید که

$$A=\sqrt{۱+۲\sqrt{\sin^۲\alpha(۱-\sin^۲\alpha)}}=\sqrt{۱+۲\sqrt{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}}=\sqrt{۱+۲|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم است، پس $\sin\alpha>۰$ و $\cos\alpha<۰$. در نتیجه

$$|\sin\alpha\cos\alpha|=-\sin\alpha\cos\alpha$$

از طرف دیگر

$$۱=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha$$

بنابراین $A=\sqrt{۱-۲\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲}=|\sin\alpha-\cos\alpha|$

چون $۹۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$، پس $\sin\alpha>\cos\alpha$، بنابراین علامت $\sin\alpha-\cos\alpha$ مثبت است و در نتیجه $A=\sin\alpha-\cos\alpha$.

اتحاد مثلثاتی

هر تساوی بین دو عبارت مثلثاتی که به ازای تمام مقادیری از متغیرها (که هر دو عبارت به ازای آن‌ها با معنی‌اند) برقرار باشد، یک **اتحاد مثلثاتی** است. تمام تساوی‌هایی که در نکتهٔ ابتدای درس برای نسبت‌های مثلثاتی آورده‌ایم، اتحاد هستند.

تذکر برای اثبات درستی یک اتحاد مثلثاتی می‌توان یک طرف تساوی را با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و به‌کارگیری دیگر اتحادها، به طرف دیگر تبدیل کرد. برای اثبات نادرستی یک رابطه کافی است زاویه‌ای مثال بزنیم که به ازای آن، دو طرف تساوی مقادیر مختلفی داشته باشند.

تست ۱۴ ساده شدهٔ عبارت $\frac{\cos x}{۱+\sin x}+\tan x$ کدام است؟

۱) $\cos x$ ۲) $\sin x$ ۳) $\frac{۱}{\cos x}$ ۴) $\frac{۱}{\sin x}$

راه‌حل **راه‌حل اول** از اتحاد $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x}{۱+\sin x}+\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^۲ x+\sin x(۱+\sin x)}{(۱+\sin x)\cos x}=\frac{\cos^۲ x+\sin x+\sin^۲ x}{(۱+\sin x)\cos x}=\frac{۱+\sin x}{(۱+\sin x)\cos x}=\frac{۱}{\cos x}$$

راه‌حل دوم اگر $x=۳۰^\circ$، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ و گزینه‌ها به ترتیب $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ و ۲ می‌شوند، پس گزینهٔ (۳) درست است.

تست ۱۵ اگر تساوی $\frac{a}{\sin^۲ x}+\frac{b}{\sin^۴ x}+۱=\cot^۴ x$ یک اتحاد باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

راه‌حل **راه‌حل اول** تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{a\sin^۲ x+b}{\sin^۴ x}=\cot^۴ x-۱\Rightarrow\frac{a\sin^۲ x+b}{\sin^۴ x}=\frac{\cos^۴ x-\sin^۴ x}{\sin^۴ x}$$

$$a\sin^۲ x+b=\cos^۴ x-\sin^۴ x=(\cos^۲ x-\sin^۲ x)(\cos^۲ x+\sin^۲ x)$$

$$a\sin^۲ x+b=\cos^۲ x-\sin^۲ x\Rightarrow a\sin^۲ x+b=۱-\sin^۲ x-\sin^۲ x$$

بنابراین باید تساوی $b+a\sin^۲ x=۱-۲\sin^۲ x$ یک اتحاد باشد که کافی است $a=-۲$ و $b=۱$، یعنی $ab=-۲$.

راه‌حل دوم چون تساوی یک اتحاد است، پس به ازای هر x دلخواه که $\sin x\neq۰$، برقرار است. قرار می‌دهیم $x=۳۰^\circ$، در نتیجه

$$\frac{a}{\frac{۱}{۴}}+\frac{b}{\frac{۱}{۱۶}}+۱=۹\Rightarrow a+۴b=۲$$

قرار می‌دهیم $x=۴۵^\circ$ و در نتیجه $\frac{a}{\frac{۱}{۲}}+\frac{b}{\frac{۱}{۴}}+۱=۱$، پس $a+۲b=۰$. از حل دستگاه $\begin{cases}a+۴b=۲\\a+۲b=۰\end{cases}$ به‌دست می‌آید $a=-۲$ و $b=۱$ و در نتیجه $ab=-۲$.

نکته **چند اتحاد مثلثاتی مهم**

$$\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x},\quad \sin^۶ x+\cos^۶ x=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x,\quad \sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$$

تست ۱۶ اگر $۲\sin\alpha+۳\cos\alpha=۰$، مقدار $\sin\alpha\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{۶}{۱۳}$ ۲) $-\frac{۴}{۱۳}$ ۳) $-\frac{۹}{۲۶}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۲۷}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$۲\sin\alpha+۳\cos\alpha=۰\Rightarrow ۲\sin\alpha=-۳\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow\cot\alpha=-\frac{۲}{۳}$$

بنابراین $\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=\tan\alpha+\cot\alpha=-\frac{۳}{۲}+\frac{-۲}{۳}=-\frac{۱۳}{۶}$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{۶}{۱۳}$.

دست‌گرمی

۷۰- اگر $\frac{۱-\tan x}{\tan x}=۲$، مقدار $\frac{\cot x}{\cot x-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۷۱- اگر $\tan\alpha=\frac{۱}{۲m-۱}$ و $\cot\alpha=m+۲$، مقدار $\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۶۲۶}{۲۵}$ ۳) $\frac{۲۶}{۹}$ ۴) $\frac{۱۶}{۵}$

۷۲- اگر $۹۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$ و $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$، مقدار $\tan\alpha-\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۱}{۲۰}$ ۲) $-\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $-\frac{۳۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱}{۲۰}$

۷۳- ساده شدهٔ عبارت $A=\frac{\tan^۲x}{۱+\tan^۲x}+\frac{\cot^۲x}{۱+\cot^۲x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sin^۲x$ ۳) $\cos^۲x$ ۴) ۲

۷۴- ساده شدهٔ عبارت $\frac{۱}{\sin^۴\theta}-\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\cot^۴\theta$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\tan^۲\theta$ ۴) $\cot^۲\theta$

۷۵- اگر $\tan\alpha+\cot\alpha=۳$، مقدار $\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۷ ۴) ۱۳

۷۶- اگر $\cos x\neq۰$ و $۳\sin x+۲\cos x=۳$، مقدار $\cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۵}$ ۲) $-\frac{۱۲}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۱۲}$

آزمون ۴۲ — اتحادهای مثلثاتی (۱)

۴۱۱- اگر $\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ و انتهای کمان متناظر با زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم باشد، مقدار $\tan\alpha-\cot\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۱۲- اگر $\tan\alpha=\frac{۱}{۲m}$ و $\cot\alpha=m+۳$، مقدار $\sin^۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳۵}$

۴۱۳- ساده شدهٔ عبارت $\frac{۱}{۱-\sin۱۰^\circ}+\frac{۱}{۱+\sin۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{\sin^۲۱۰^\circ}$ ۴) $\frac{۲}{\cos^۲۱۰^\circ}$

۴۱۴- حاصل $A=\frac{\sin۱۵^\circ-\sin^۳۱۵^\circ}{\cos۱۵^\circ-\cos^۳۱۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan^۲۱۵^\circ$ ۲) $\tan۱۵^\circ$ ۳) $\cot۱۵^\circ$ ۴) $\cot^۲۱۵^\circ$

۴۱۵- اگر $۳\sin^۲x=۱+۴\cos^۲x$، مقدار $\tan^۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۴۱۶- انتهای کمان متناظر با زاویهٔ α در کدام ناحیه قرار گیرد تا نابرابری $\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}\geq۰$ برقرار باشد؟

۱) فقط اول یا دوم
۲) فقط اول یا سوم
۳) فقط دوم یا چهارم
۴) هریک از چهار ناحیه

۴۱۷- ساده شدهٔ عبارت $\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha}-\cot\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\cos\alpha}$ ۲) $\frac{۱}{\sin\alpha}$ ۳) $\sin\alpha$ ۴) $\cos\alpha$

۴۱۸- اگر انتهای کمان متناظر با زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم باشد و $A=\cot^۲x(۱+\tan^۲x)+\tan^۲x(۱+\cot^۲x)$، حاصل $\sqrt{A}$ کدام است؟

۱) $\tan x-\cot x$ ۲) $-\tan x-\cot x$
۳) $\tan x+\cot x$ ۴) $\cot x-\tan x$

۴۱۹- اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱۶}{۸۱}$ ۳) $\frac{۲۳}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۷}$

۴۲۰- اگر $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=\frac{۲}{۳}$ و انتهای کمان متناظر با زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم باشد، مقدار $\sin\alpha\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۶}}{۸}$

سؤال
۴۱۱
۴۱۲
۴۱۳
۴۱۴
۴۱۵
۴۱۶
۴۱۷
۴۱۸
۴۱۹
۴۲۰

آزمون ۴۳ — اتحادهای مثلثاتی (۲)

سؤال	گام
۴۲۱	۷۵، ۸۲
۴۲۲	۸۲
۴۲۳	۸۲، ۸۳
۴۲۴	۸۲، ۸۳
۴۲۵	۸۲
۴۲۶	۸۲، ۸۴
۴۲۷	۷۵، ۸۲
۴۲۸	۸۲
۴۲۹	۷۵، ۸۲، ۸۳
۴۳۰	۷۵، ۸۲، ۸۳

۴۲۱- اگر $\cot x=\frac{۲}{۳}$ و انتهای کمان متناظر با زاویهٔ x در ناحیهٔ سوم باشد، مقدار $۲\cos x-\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{\sqrt{۱۳}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$ ۳) $-\frac{۷}{\sqrt{۱۳}}$ ۴) $-\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$

۴۲۲- اگر $\sin\alpha=\sqrt{k-۱}$ و $\cos\alpha=\sqrt{۲k-۳}$، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۴۲۳- مقدار $\frac{(۱+\tan ۲۰^\circ)(۱-\cot ۲۰^\circ)}{(۱+\cot ۲۰^\circ)(۱-\tan ۲۰^\circ)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

۴۲۴- ساده شدهٔ عبارت $\frac{\tan x}{۱+\tan^۲ x}\times\frac{۱+\cot^۲ x}{\cot x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\tan x$ ۳) $\sin x$ ۴) $\cos x$

۴۲۵- اگر $\cot\alpha=\sin\alpha$، مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}+۲}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}-۲}{۴}$

۴۲۶- اگر $\sin x-\cos x=\frac{۱}{۳}$، حاصل $\tan x+\cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۴۲۷- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\sin x-\cos x=\frac{۳}{۴}$، حاصل $\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۴}$ ۳) $\frac{-\sqrt{۲۳}}{۴}$ ۴) $\frac{-\sqrt{۱۴}}{۴}$

۴۲۸- اگر $\tan x+\cot x=\sqrt{۵}$، مقدار $\tan^۴ x+\cot^۴ x$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۱

۴۲۹- اگر $۱۸۰^\circ<\alpha<۲۷۰^\circ$، عبارت $\cos\alpha-\sqrt{\tan^۲\alpha-\sin^۲\alpha}$ با کدام‌یک برابر است؟

۱) $\cot\alpha$ ۲) $\tan\alpha$ ۳) $\frac{۱}{\cos\alpha}$ ۴) $\frac{۱}{\sin\alpha}$

۴۳۰- اگر $۳۱۵^\circ<\alpha<۳۶۰^\circ$، حاصل عبارت $\sqrt{۱+۲\sqrt{\cos^۲\alpha-\cos^۴\alpha}}$ کدام است؟

۱) $\sin\alpha+\cos\alpha$ ۲) $\sin\alpha-\cos\alpha$

۳) $-\sin\alpha+\cos\alpha$ ۴) $-\sin\alpha-\cos\alpha$

آزمون ۴۴ — اتحادهای مثلثاتی (۳)

۴۳۱- اگر $\frac{۵\sin x}{۲\sin x+\cos x}=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۴۳۲- اگر $\tan x=\sqrt{\frac{m+۲}{۲m+۵}}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{m+۲}{۳m+۷}}$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۳۳- ساده شدهٔ عبارت $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}+\cot\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\cos\alpha}$ ۲) $\frac{۱}{\sin\alpha}$ ۳) $\sin\alpha$ ۴) $\cos\alpha$

۴۳۴- مقدار $\cos ۱۵^\circ+\frac{\sin^۲ ۱۵^\circ}{۱+\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos^۲ ۱۵^\circ}{۱+\sin ۱۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\cos ۱۵^\circ$ ۲) $-\sin ۱۵^\circ$ ۳) $\cos ۱۵^\circ$ ۴) $\sin ۱۵^\circ$

۴۳۵- اگر $\tan x=۳$، مقدار عبارت $A=\frac{\sin^۳ x-۲\cos x}{۴\sin x-\cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴۷}{۱۱۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۷}$ ۳) $\frac{۷}{۲۹}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲۹}$

۴۳۶- اگر $\sin x-\cos x=\frac{۲}{۳}$، حاصل $\sin^۳ x-\cos^۳ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۲}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲۳}{۲۷}$ ۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۷}$

۴۳۷- اگر $\tan x-\cot x=۳$، مقدار $\tan^۳ x-\cot^۳ x$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

۴۳۸- اگر $\tan\alpha-۲\cot\alpha=\sqrt{۲}$ و انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع اول باشد، مقدار $\tan^۲\alpha$ کدام است؟

۱) $۳-\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $۳+\sqrt{۵}$ ۴) $۳-\sqrt{۵}$

۴۳۹- حاصل عبارت $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+\frac{۱-۲\sin^۲ x}{\cos^۲ x(۱-\tan^۲ x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\cot x}{۱-\cot x}$ ۲) $\frac{۲\cos x}{\sin x+\cos x}$ ۳) $\frac{۲\tan x}{\tan x-۱}$ ۴) $\frac{۲\sin x}{\sin x+\cos x}$

۴۴۰- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A=\cos^۲ x-۲\sin x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

سؤال	گا
۴۳۱	۲
۴۳۲	۲
۴۳۳	
۴۳۴	
۴۳۵	
۴۳۶	۹ ۱
۴۳۷	۹
۴۳۸	
۴۳۹	
۴۴۰	

آزمون ۴۵ — اتحادهای مثلثاتی (۴)

۴۴۱- اگر $\tan x=\frac{۱}{۳}$، مقدار عبارت $A=\frac{۲\sin x+\cos x}{\sin x+۳\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۴۴۲- مقدار عبارت $A=\frac{\cot^۲ ۱۵^\circ-\cos^۲ ۱۵^\circ}{\tan^۲ ۱۵^\circ-\sin^۲ ۱۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan^۶ ۱۵^\circ$ ۲) $\cot^۶ ۱۵^\circ$ ۳) $۱+\tan^۶ ۱۵^\circ$ ۴) $۱+\cot^۶ ۱۵^\circ$

۴۴۳- مقدار $(\frac{۱}{\cos ۲۰^\circ}+\tan ۲۰^\circ)(۱-\sin ۲۰^\circ)$ کدام است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ$ ۲) $\cos ۲۰^\circ$ ۳) $\tan ۲۰^\circ$ ۴) $\cot ۲۰^\circ$

۴۴۴- حاصل $\frac{\sqrt{۱+\cos ۳۶^\circ}+\sqrt{۱-\cos ۳۶^\circ}}{\sqrt{۱+\sin ۳۶^\circ}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۴۴۵- اگر $۳\sin^۲ \alpha-۵\cos \alpha+۵=۰$، مقدار $\cos^۶ \alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

۴۴۶- اگر $\tan x+\cot x=\sqrt{۵}$، مقدار $\tan^۶ x+\cot^۶ x$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷

۴۴۷- اگر $\sin^۲ x+۳\cos^۲ x-۲\sin x\cos x=۲$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) $۱\pm\sqrt{۲}$ ۲) $-۱\pm\sqrt{۲}$ ۳) $۲\pm\sqrt{۳}$ ۴) $-۲\pm\sqrt{۳}$

۴۴۸- حاصل عبارت $\sqrt{۱-۲\sqrt{\sin^۲ \alpha-\sin^۴ \alpha}}$ به ازای $\alpha=۲۰۰^\circ$ کدام است؟

۱) $-\sin ۲۰۰^\circ-\cos ۲۰۰^\circ$ ۲) $\sin ۲۰۰^\circ-\cos ۲۰۰^\circ$

۳) $-\sin ۲۰۰^\circ+\cos ۲۰۰^\circ$ ۴) $\sin ۲۰۰^\circ+\cos ۲۰۰^\circ$

۴۴۹- حاصل $\frac{\sin^۳ ۴۰^\circ-\cos^۳ ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ+\cos^۲ ۴۰^\circ \sin ۴۰^\circ}+۱$ کدام است؟

۱) $\sin ۴۰^\circ$ ۲) $\cos ۴۰^\circ$ ۳) $\tan ۴۰^\circ$ ۴) ۱

۴۵۰- اگر $\frac{\tan^۳ x-\cot^۳ x}{\tan x-\cot x}=۷$، حاصل $\frac{۱}{\sin^۲ x}+\frac{۱}{\cos^۲ x}$ کدام است؟

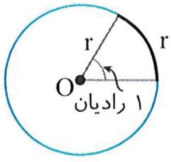
۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

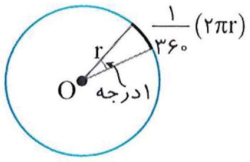
سؤال	گام
۴۴۱	۸۲
۴۴۲	۸۲ ۸۳
۴۴۳	۸۲ ۸۳
۴۴۴	۸۲ ۸۳ ۹۹
۴۴۵	۸۲
۴۴۶	۸۲ ۲۷۵ ۲۷۹
۴۴۷	۸۲
۴۴۸	۸۰ ۸۲ ۸۳
۴۴۹	۸۲ ۸۳
۴۵۰	۸۲ ۸۳ ۲۸۱

درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه

درجه و رادیان

اگر دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت برابر تقسیم کنیم، کمان‌هایی برابر به‌دست می‌آیند که هر یک از آن‌ها روبه‌رو به یک زاویهٔ مرکزی هستند. این زاویه‌ها با یکدیگر برابرند و اندازهٔ هر یک از آن‌ها برابر ۱ درجه است. به همین ترتیب، اگر روی دایره کمانی با طول برابر با شعاع دایره انتخاب کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به این کمان برابر ۱ رادیان است.



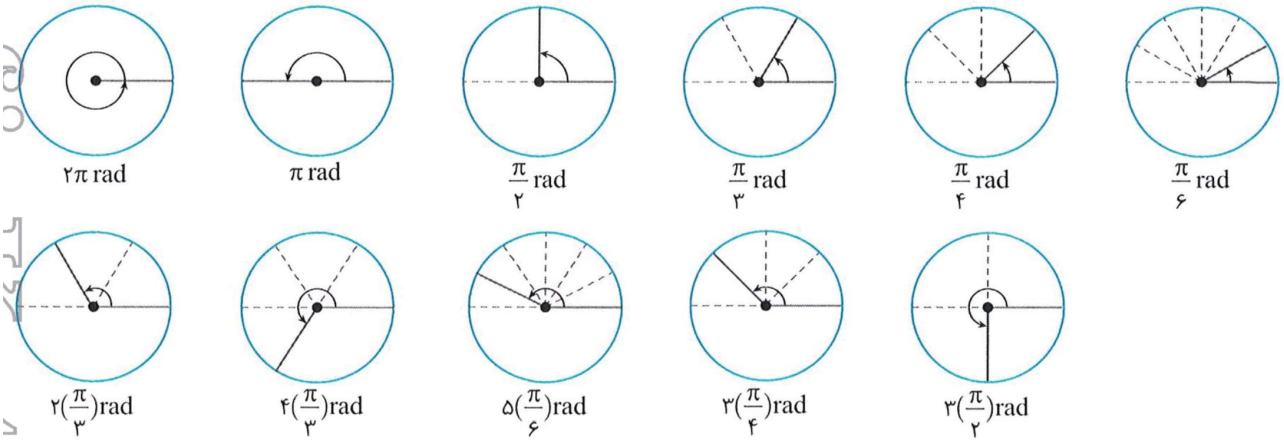


تعریف

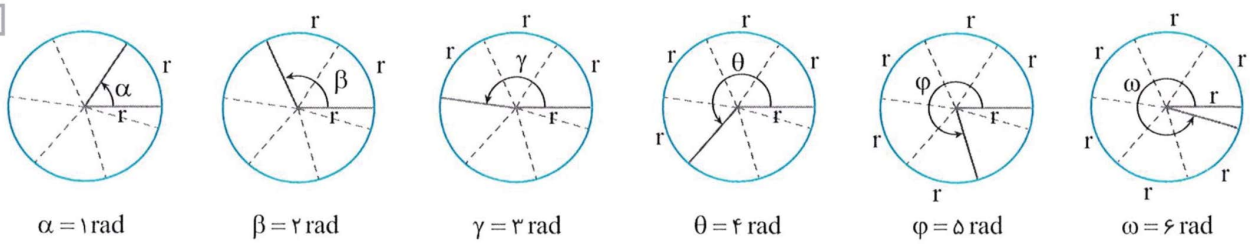
- **۱ درجه برابر با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است. k درجه را می‌نویسیم k°.**
- **۱ رادیان برابر با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن برابر شعاع دایره است. k رادیان را می‌نویسیم k rad.**

تذکر اگر واحد اندازهٔ زاویه‌ای را مشخص نکردیم، منظورمان واحد رادیان است.

مثال: در شکل‌های زیر زاویه‌های معروف با اندازهٔ آن‌ها برحسب رادیان نشان داده شده‌اند.



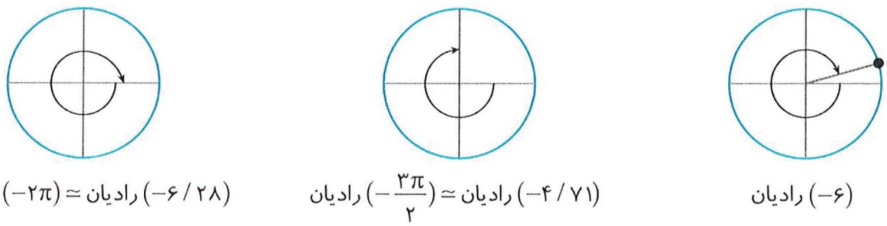
مثال: چون $۲\pi \simeq ۶/۲۸$، روی یک دایرهٔ کامل می‌توان پشت سر هم شش کمان به طول شعاع جدا کرد (شکل‌های زیر را ببینید).



تست ۱ **انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۶− رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟**

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

راه‌حل با توجه به شکل‌های زیر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۶− رادیان در ناحیهٔ اول قرار دارد.

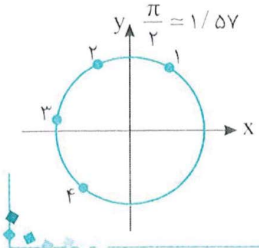


(۶−) رادیان (۴/۷۱−) رادیان $\simeq (-\frac{۳\pi}{۲})$ رادیان (۶/۲۸−) رادیان $\simeq (-۲\pi)$ رادیان

تست ۲ کدام‌یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند.)

۱) $\sin 1$ ۲) $\sin 2$ ۳) $\sin 3$ ۴) $\sin 4$

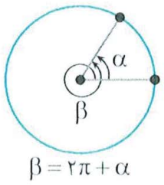
راه‌حل با توجه به شکل روبه‌رو، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان نظیر زاویهٔ ۲ رادیان است، بزرگ‌تر از عرض سایر نقاط است، پس $\sin 2$ از بقیه بزرگ‌تر است.



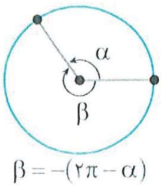
زاویه‌های هم‌انتها

۸۶

می‌دانیم یک زاویهٔ مثلثاتی در موقعیت استاندارد، زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایرهٔ مثلثاتی، ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور x و ضلع دیگر آن از دوران ضلع ابتدایی حول رأس آن به اندازهٔ دلخواه به‌دست آمده باشد. به این ترتیب، دو زاویه با اندازه‌های مختلف ممکن است ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی مشترک داشته باشند. معلوم است که در این‌صورت نقطهٔ انتهایی کمان متناظر با این زاویه‌ها بر هم منطبق است. این زاویه‌ها را **هم‌انتها** می‌نامیم.

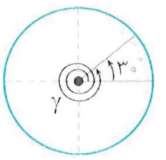


$\beta = 2\pi + \alpha$

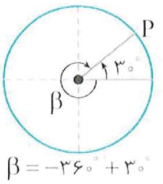


$\beta = -(2\pi - \alpha)$

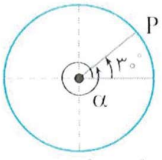
مثال: زاویه‌های 30°، $360^\circ + 30^\circ$، $-360^\circ + 30^\circ$ و $2\times 360^\circ + 30^\circ$ هم‌انتها هستند.



$\gamma = 2\times 360^\circ + 30^\circ$



$\beta = -360^\circ + 30^\circ$



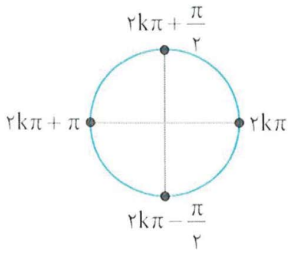
$\alpha = 360^\circ + 30^\circ$

نکته

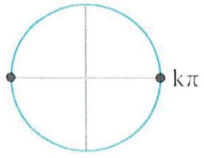
اگر k عدد صحیح دلخواهی باشد،

- زاویه‌های α° و $k\times 360^\circ + \alpha^\circ$ هم‌انتها هستند.
- زاویه‌های α رادیان و $2k\pi + \alpha$ رادیان هم‌انتها هستند.

مثال: اندازهٔ زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان، $\frac{\pi}{2}$ رادیان، π رادیان و $-\frac{\pi}{2}$ رادیان هم‌انتها هستند، به ترتیب برابر $2k\pi$، $2k\pi + \frac{\pi}{2}$، $2k\pi + \pi$ و $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ است (k عددی صحیح است).

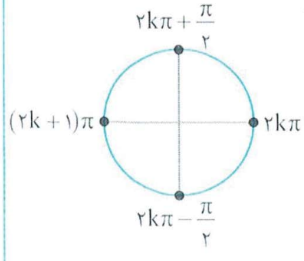


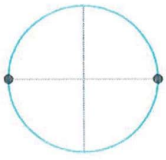
مثال: اندازهٔ زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان یا π رادیان هم‌انتها هستند، به‌ترتیب $2k\pi$ یا $2k\pi + \pi$ است که می‌توان آن‌ها را به صورت $k\pi$ نشان داد (k عددی صحیح است).

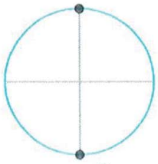


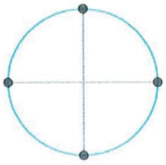
نکته ۸۷

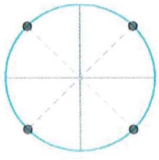
نقطهٔ انتهایی کمان متناظر با برخی زاویه‌های معروف را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم. (k عددی صحیح است).

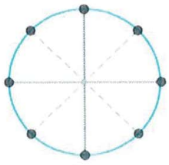






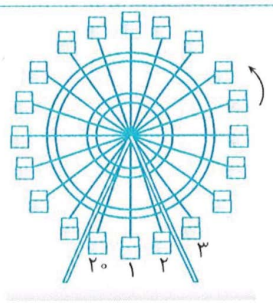






تست ۳

یک چرخ و فلک مطابق شکل مقابل ۲۰ کابین دارد. در لحظهٔ حرکت چرخ و فلک، کابین شمارهٔ یک در پایین‌ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازهٔ $\frac{47\pi}{5}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شمارهٔ یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟



۱) ششم
۲) هفتم
۳) چهاردهم
۴) پانزدهم

راه‌حل زاویهٔ بین هر دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}$ رادیان است. از طرف دیگر $\frac{47\pi}{5}=8\pi+\frac{7\pi}{5}=8\pi+14\times\frac{\pi}{10}$. وقتی چرخ و فلک ۴ دور کامل می‌زند، یعنی 8π رادیان می‌چرخد، هر کابین در جای اولیهٔ خود قرار می‌گیرد. سپس چرخ و فلک به اندازهٔ $14\times\frac{\pi}{10}$ دیگر دوران می‌کند که کابین شمارهٔ یک به مکان فعلی ۱۴ کابین جلوتر، یعنی کابین پانزدهم منتقل می‌شود.

رابطهٔ بین واحد درجه و واحد رادیان

با توجه به تعریف واحدهای درجه و رادیان اندازهٔ زاویه‌های معروف را برحسب درجه و رادیان در جدول زیر نوشته‌ایم.

درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

نکته

اگر اندازهٔ زاویه‌ای برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه $\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}$.

مثال: اگر اندازهٔ زاویهٔ 120° برحسب رادیان برابر با R باشد، آن‌گاه

$$\frac{120^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{2\pi}{3}\,rad$$

همین‌طور اگر اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{12}$ رادیان برحسب درجه برابر با D باشد، آن‌گاه

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{\frac{\pi}{12}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{180^\circ}{12}=15^\circ$$

مثال: اگر R اندازهٔ زاویهٔ 1° برحسب رادیان باشد، آن‌گاه

$$\frac{1^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{180}\,rad$$

بنابراین $1^\circ\simeq 0/017\,rad$. همین‌طور، اگر D اندازهٔ زاویهٔ ۱ رادیان برحسب درجه باشد، آن‌گاه

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{1}{\pi}\Rightarrow D=\frac{180^\circ}{\pi}$$

بنابراین $1\,rad\simeq 57/3^\circ$.

تست ۴

اندازهٔ زاویهٔ 55° برحسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{18}$
۲) $\frac{11\pi}{36}$
۳) $\frac{13\pi}{36}$
۴) $\frac{7\pi}{18}$

راه‌حل در تساوی $\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}$ قرار می‌دهیم $D=55^\circ$:

$$\frac{55^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{11\pi}{36}$$ رادیان

تست ۵ مجموع و تفاضل دو زاویه به‌ترتیب برابر ۱۱۰° و $\frac{۲\pi}{۹}$ رادیان است. اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر چند رادیان است؟

۱) $\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۷}$

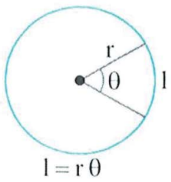
راه‌حل ابتدا توجه کنید که ۱۱۰° برابر $\frac{۱۱\pi}{۱۸}$ رادیان است. اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر را a و اندازهٔ زاویهٔ کوچک‌تر را b در نظر می‌گیریم:

$$a+b=\frac{۱۱\pi}{۱۸}\ ,\quad a-b=\frac{۲\pi}{۹}$$

از حل این دستگاه به‌دست می‌آید $a=\frac{۵\pi}{۱۲}$.

طول کمان

به کمک اندازه‌گیری برحسب رادیان می‌توانیم رابطه‌ای بین طول کمان، شعاع دایره و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی نظیر این کمان پیدا کنیم. فرض کنید شعاع دایره r باشد. اگر طول کمان برابر r باشد، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی نظیر این کمان ۱ رادیان است. اگر طول کمان برابر l باشد، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی نظیر کمان برابر $\frac{l}{r}$ رادیان است. بنابراین $\theta=\frac{l}{r}$.



$l=r\theta$

نکته اگر در دایره‌ای به شعاع r اندازهٔ زاویه‌ای مرکزی θ رادیان و طول کمان روبه‌رو به این زاویه l باشد، آن‌گاه $l=r\theta$.

توجه کنید که واحد l و r یکسان در نظر گرفته می‌شود.

تست ۶ طول کمان نظیر زاویهٔ مرکزی به اندازهٔ ۱۵° در دایره‌ای به شعاع ۱۸ سانتی‌متر، چند سانتی‌متر است؟

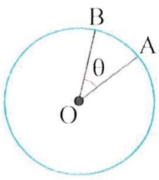
۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

راه‌حل اگر اندازهٔ زاویهٔ ۱۵° برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه

$$\frac{۱۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{۱۲}$$

بنابراین طول کمان مورد نظر برابر است با $\frac{۳\pi}{۲}=\frac{\pi}{۱۲}\times ۱۸$ سانتی‌متر.

تست ۷ در شکل مقابل، دونده‌ای در نقطهٔ A روی مسیری دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O و به شعاع ۱۵۰۰ متر ایستاده است. این دونده با سرعت ۵ متر بر ثانیه می‌دود. اگر پس از ۱۰ ثانیه در نقطهٔ B باشد، اندازهٔ θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=۳$)

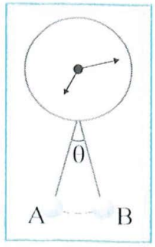


۱) ۱° ۲) ۲° ۳) ۳° ۴) ۴°

راه‌حل مسافتی که این دونده در ۱۰ ثانیه طی می‌کند برابر است با $۵\times ۱۰=۵۰$ متر. بنابراین طول کمان AB برابر ۵۰ متر است. در نتیجه

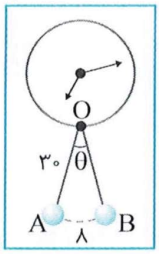
$$\theta=\frac{l}{r}=\frac{۵۰}{۱۵۰۰}=\frac{۱}{۳۰}\text{ rad}=۱۸۰^\circ\left(\frac{\frac{۱}{۳۰}}{\pi}\right)=۱۸۰^\circ\left(\frac{\frac{۱}{۳۰}}{۳}\right)=۲^\circ$$

تست ۸ در شکل مقابل، طول پاندول ساعت ۳۰ سانتی‌متر است و این پاندول در هر ثانیه از A به B و یا برعکس جابه‌جا می‌شود. اگر طول مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می‌کند برابر با ۸ سانتی‌متر باشد، اندازهٔ θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=۳$)



۱) ۱۲° ۲) ۱۴°

۳) ۱۶° ۴) ۱۸°



راه‌حل توجه کنید مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می‌کند، کمانی از دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O و شعاع ۳۰ سانتی‌متر است (شکل مقابل را ببینید). بنابراین $\theta=\frac{l}{r}=\frac{۸}{۳۰}=\frac{۴}{۱۵}$ rad، در نتیجه

$$\theta=۱۸۰^\circ\left(\frac{\frac{۴}{۱۵}}{\pi}\right)=۱۸۰^\circ\left(\frac{\frac{۴}{۱۵}}{۳}\right)=۱۶^\circ$$

در مدت زمان یک ساعت عقربهٔ دقیقه‌شمار یک دور کامل می‌چرخد، پس اندازهٔ زاویه‌ای که طی می‌کند، ۳۶۰° یا ۲π رادیان است. در همین مدت، عقربهٔ ساعت‌شمار، یک‌دوازدهم یک دایره را می‌چرخد. بنابراین اندازهٔ زاویه‌ای که طی می‌کند برابر ۳۰° یا $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است.

۹۰

نکته

در یک دقیقه عقربهٔ دقیقه‌شمار ۶° یا $\frac{\pi}{۳۰}$ رادیان را طی می‌کند. در همین مدت عقربهٔ ساعت‌شمار $(۰/۵)^\circ$ یا $\frac{\pi}{۳۶۰}$ رادیان را طی می‌کند.

تست ۹ **وقتی عقربهٔ ساعت‌شمار به اندازهٔ $\frac{۳\pi}{۸}$ رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟**

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۰

راه‌حل **راه‌حل اول** در هر ساعت عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{۱}{۱۲}$ دور می‌چرخد که معادل $\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. بنابراین

$$\frac{۶۰}{x}=\frac{\frac{\pi}{۶}}{\frac{۳\pi}{۸}}\Rightarrow x=۱۳۵$$ دقیقه

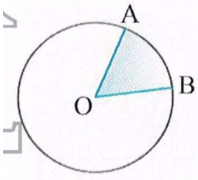
راه‌حل دوم با استفاده از نکتهٔ بالا نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{۱}{x}=\frac{\frac{\pi}{۳۶۰}}{\frac{۳\pi}{۸}}\Rightarrow x=۱۳۵$$ دقیقه

۹۱

مساحت قطاع دایره

تعریف



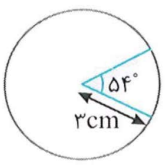
قسمتی از سطح دایره را که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع می‌نامند. زاویهٔ مرکزی نظیر کمان مربوط به قطاع را زاویهٔ قطاع می‌نامند (زاویهٔ AOB در شکل روبه‌رو).

نکته

اگر در دایره‌ای به شعاع r اندازهٔ زاویهٔ قطاعی برابر با θ باشد، مساحت این قطاع برابر است با $\frac{۱}{۲}r^۲\theta$.

تذکر توجه کنید که اگر $\theta=۲\pi$ rad، مساحت قطاع مورد نظر همان مساحت دایره است که برابر است با $\frac{۱}{۲}r^۲(۲\pi)=\pi r^۲$.

تست ۱۰ **در شکل روبه‌رو مساحت قطاع رنگی، کدام است؟**



۱) $\frac{۲۷\pi}{۱۰}$ ۲) $\frac{۲۷\pi}{۲۰}$ ۳) $\frac{۹\pi}{۱۰}$ ۴) $\frac{۹\pi}{۲۰}$

راه‌حل ابتدا اندازهٔ ۵۴° را برحسب رادیان پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۵۴^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۵۴^\circ}{۱۸۰^\circ}\pi=\frac{۳\pi}{۱۰}$$

در نتیجه مساحت بخش رنگی، برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}r^۲\theta=\frac{۱}{۲}(۳)^۲\times\left(\frac{۳\pi}{۱۰}\right)=\frac{۲۷\pi}{۲۰}\,cm^۲$$

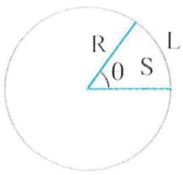
تست ۱۱

در دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی θ رادیان برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است. مساحت قطاع نظیر این زاویه کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۴) ۲π

راه‌حل

با توجه به شکل مقابل.



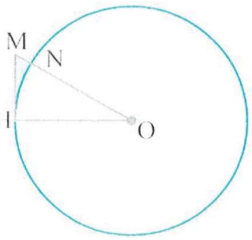
$$L=R\theta \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳}=۴\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۶}$$

بنابراین

$$S=\frac{۱}{۲}R^{۲}\theta=\frac{۱}{۲}\times ۴^{۲}\times\frac{\pi}{۶}=\frac{۴\pi}{۳}$$

تست ۱۲

در شکل مقابل O مرکز دایره و MH بر دایره مماس است. $OM=۶$ و $MH=۳$. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) $\frac{۹}{۴}(۲\sqrt{۳}-\pi)$ ۲) $\frac{۹}{۲}(۲\sqrt{۳}-\pi)$

۳) $\frac{۷}{۴}(۲\sqrt{۳}-\pi)$ ۴) $\frac{۷}{۲}(۲\sqrt{۳}-\pi)$

راه‌حل

چون MH در نقطهٔ H بر دایره مماس است، پس $OHM=۹۰^\circ$. اکنون، از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHO نتیجه می‌شود

$$OM^{۲}=MH^{۲}+HO^{۲} \Rightarrow ۶^{۲}=۳^{۲}+HO^{۲} \Rightarrow HO=۳\sqrt{۳}$$

مساحت قسمت رنگی برابر است با تفاضل مساحت مثلث MHO و مساحت قطاع HON. مساحت مثلث MHO برابر است با $\frac{۱}{۲}MH\times HO=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$.

فرض کنید زاویهٔ قطاع برحسب رادیان برابر α باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHO، $\sin\alpha=\frac{MH}{MO}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$. بنابراین $\alpha=\frac{\pi}{۶}$. در نتیجه، مساحت قطاع HON برابر است با $\frac{۹\pi}{۴}=\frac{\pi}{۶}\times(۳\sqrt{۳})^{۲}=\frac{۱}{۲}r^{۲}\theta=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه، مساحت قسمت رنگی برابر است با $\frac{۹}{۴}(۲\sqrt{۳}-\pi)=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۹\pi}{۴}$.

دست‌گرمی

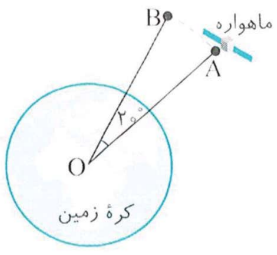
۷۷- اندازهٔ زاویهٔ ۷۵° برحسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۳\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۱۲}$

۷۸- در دایرهٔ مثلثاتی انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۵۰۰° در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۷۹- مطابق شکل ماهواره‌ای در شعاع ۳۶۰۰۰ کیلومتری از مرکز زمین در حال گردش روی یک مسیر دایره‌ای است. این ماهواره چند کیلومتر باید طی کند تا از نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد؟



۱) ۲۰۰۰π

۲) ۲۴۰۰π

۳) ۴۰۰۰π

۴) ۴۸۰۰π

۸۰- آب‌پاش زمین چمنی آب را تا فاصلهٔ ۶ متر پرتاب می‌کند و به اندازهٔ ۱۲۰° دوران می‌کند. مساحت ناحیه‌ای از زمین که این آب‌پاش خیس می‌کند چقدر است؟

۱) ۱۲π ۲) ۲۴π ۳) ۶π ۴) ۲π

آزمون ۴۶ واحدهای اندازه‌گیری زاویه (۱)

۴۵۱- اندازهٔ دو زاویه از مثلثی ۳۶° و $\frac{۳\pi}{۱۰}$ رادیان است. اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ این مثلث برحسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۵}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۵}$

۴۵۲- حاصل‌ضرب اندازه‌های یک زاویه برحسب درجه و برحسب رادیان برابر $\frac{۵\pi}{۴}$ است. اندازهٔ این زاویه برحسب درجه کدام است؟

۱) ۱۰۰° ۲) ۶۰° ۳) ۳۰° ۴) ۱۵°

۴۵۳- انتهای کمان متناظر با زاویه‌های $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان را روی دایرهٔ مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) لوزی ۴) ذوزنقه

۴۵۴- زاویهٔ -۵۶۰° روی دایرهٔ مثلثاتی با کدام‌یک از زاویه‌های زیر هم‌انتها است؟

۱) ۱۶۰° ۲) -۱۶۰° ۳) ۱۴۰° ۴) -۱۴۰°

۴۵۵- یک چرخ‌وفلک ۲۰ کابین دارد. در لحظهٔ حرکت چرخ‌وفلک، کابین شمارهٔ یک در پایین‌ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ‌وفلک به اندازهٔ $\frac{۴۸\pi}{۵}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شمارهٔ یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟

۱) چهاردهم ۲) پانزدهم ۳) شانزدهم ۴) هفدهم

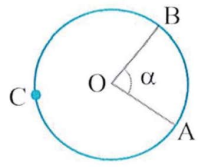
۴۵۶- کدام‌یک از اعداد زیر کوچک‌تر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند.)

۱) $\sin ۱$ ۲) $\sin ۲$ ۳) $\sin ۴$ ۴) $\sin ۶$

۴۵۷- وقتی عقربهٔ ساعت شمار به اندازهٔ $\frac{۵\pi}{۸}$ رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۷۵ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۷۵

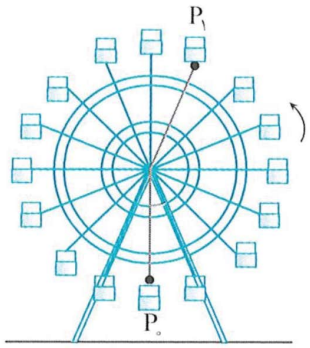
۴۵۸- در شکل مقابل O مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره ۴π واحد است. اگر طول کمان ACB، π واحد بیشتر از طول کمان AB باشد، اندازهٔ زاویهٔ α چند رادیان است؟



۱) $\pi-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\pi-\frac{۱}{۸}$

۳) $\pi-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\pi-\frac{۳}{۲}$

۴۵۹- شعاع چرخ‌وفلک شکل مقابل ۴۰ متر است و در جهت مثبت مثلثاتی می‌چرخد. مسافران از نقطهٔ $P_۰$ تا نقطهٔ $P_۱$ چند متر روی چرخ‌وفلک طی می‌کنند؟



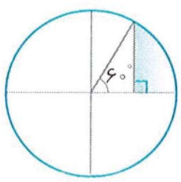
۱) ۳۵π

۲) ۲۵π

۳) ۳۶π

۴) ۳۲π

۴۶۰- در شکل مقابل اندازهٔ شعاع دایره $۶\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ محیط قسمت رنگی کدام است؟



۱) $۳(۱+\sqrt{۳}+\pi)$ ۲) $۲(۱+\sqrt{۳}+\pi)$

۳) $۹+\sqrt{۳}(۲\pi+۳)$ ۴) $۳(۱+\sqrt{۳})+۲\pi$

سؤال
۴۵۱
۴۵۲
۴۵۳
۴۵۴
۴۵۵
۴۵۶
۴۵۷
۴۵۸
۴۵۹
۴۶۰

آزمون ۴۷ واحدهای اندازه‌گیری زاویه (۲)

سؤال	گام
۴۶۱	۸۸
۴۶۲	۸۸
۴۶۳	۸۵
۴۶۴	۸۶
۴۶۵	۸۷
۴۶۶	۸۵
۴۶۷	۹۰
۴۶۸	۸۹
۴۶۹	۸۹ ۹۱
۴۷۰	۸۸ ۸۹

۴۶۱- مجموع اندازه‌های دو زاویه ۴۰۰° و تفاضل اندازه‌های آن‌ها $\frac{۴\pi}{۹}$ رادیان است. اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر برحسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۹}$ ۳) $\frac{۸\pi}{۹}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۹}$

۴۶۲- اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان از $\frac{\pi}{۸۰}$ برابر اندازهٔ آن برحسب درجه $\frac{۵\pi}{۳۶}$ کمتر است. اندازهٔ این زاویه برحسب درجه کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) ۲۰° ۳) ۴۰° ۴) ۵۰°

۴۶۳- انتهای کمان‌های متناظر با زاویه‌های $\frac{\pi}{۳}$، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان را روی دایرهٔ مثلثاتی به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

۱) مستطیل ۲) مربع ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) ذوزنقه

۴۶۴- زاویه‌ای با اندازهٔ $\frac{۲۸\pi}{۳}$ رادیان روی دایرهٔ مثلثاتی با زاویهٔ α هم‌انتهاست. اندازهٔ α برحسب رادیان کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۳۱\pi}{۶}$ ۳) $-\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $-\frac{\pi}{۳}$

۴۶۵- انتهای کمان نظیر زاویه‌هایی به‌صورت $\alpha=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$ را به ازای مقادیر مختلف و صحیح k روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم. اگر این نقاط را متوالیاً به هم وصل کنیم، چه شکلی درست می‌شود؟

۱) مستطیل ۲) مربع ۳) پنج‌ضلعی منتظم ۴) شش‌ضلعی منتظم

۴۶۶- کدام‌یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟ (زاویه‌ها برحسب رادیان هستند.)

۱) $\tan ۲$ ۲) $\tan ۳$ ۳) $\tan ۵$ ۴) $\tan ۶$

۴۶۷- اندازهٔ زاویه‌ای که عقربهٔ ساعت‌شمار بین ساعت ۹ و $۱۰:۲۰'$ طی می‌کند، چند رادیان است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۹}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۴\pi}{۹}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۹}$

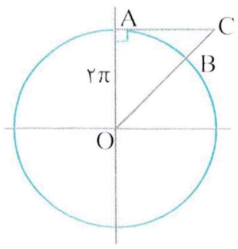
۴۶۸- در شکل مقابل دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاع ۶ و ۹ واحد رسم شده است و $D\hat{O}C=۲۵^\circ$. طول کمان CD چقدر از طول کمان AB بیشتر است؟



۱) $\frac{۵\pi}{۳۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$

۳) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۹}$

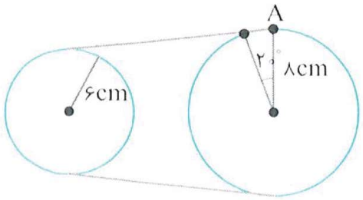
۴۶۹- در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است و مساحت قسمت رنگی $۲\pi^۲(۱-\frac{\pi}{۴})$ است. طول کمان AB چقدر است؟



۱) $\frac{\pi^۲}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۲}$

۴۷۰- در شکل مقابل اگر نقطهٔ A، ۲۰° روی چرخ بزرگ‌تر جابه‌جا شود، چرخ کوچک‌تر چند درجه جابه‌جا می‌شود؟



۱) $\frac{۴\pi}{۲۷}$ ۲) $\frac{۹\pi}{۲۷}$

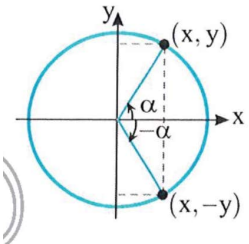
۳) $\frac{۴۰}{۳}$ ۴) $\frac{۸۰}{۳}$

درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها

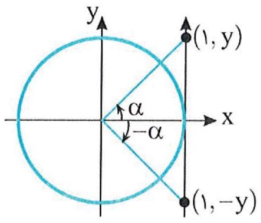
توجه کنید که نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\alpha+2k\pi$ با نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویهٔ α برابرند، زیرا این دو زاویه هم انتها هستند (k عددی صحیح است). بنابراین،

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha\ ,\quad \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha\ ,\quad \tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha\ ,\quad \cot(\alpha+2k\pi)=\cot\alpha$$

همین‌طور، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\alpha$ را می‌توان از روی نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویهٔ α به کمک شکل‌های زیر به‌دست آورد.



$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$



$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=\frac{1}{\tan(-\alpha)}=\frac{1}{-\tan\alpha}=-\cot\alpha$$

نکته

به روش زیر می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای دیگر حساب کنیم.

۱) زاویهٔ مورد نظر را به‌صورت $k\pi\pm\alpha$ (k عددی صحیح است) یا $\frac{k\pi}{2}\pm\alpha$ (k عددی صحیح و فرد است) می‌نویسیم.

۲) با فرض اینکه α زاویه‌ای حاده است، ناحیه‌ای را که انتهای کمان نظیر زاویهٔ مورد نظر در آن قرار دارد مشخص می‌کنیم.

۳) علامت نسبت مثلثاتی مورد نظر در ناحیهٔ به‌دست آمده را یادداشت می‌کنیم.

۴) عبارت $k\pi\pm$ یا $\frac{k\pi}{2}\pm$ را حذف می‌کنیم.

۵) اگر در مرحلهٔ قبلی $\frac{k\pi}{2}\pm$ را حذف کردیم، نسبت مثلثاتی را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم.

- **سینوس به کسینوس**
- **کسینوس به سینوس**
- **تانژانت به کتانژانت**
- **کتانژانت به تانژانت**

مثال:

۱) $\sin 390^\circ=\sin(2\times180^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

۲) $\cos 110^\circ=\cos(90^\circ+20^\circ)=-\sin 20^\circ$

۳) $\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۴) $\cot\frac{13\pi}{10}=\cot(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{5})=\tan\frac{\pi}{5}$

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد و $k\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه با استفاده از روش گفته شده نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آیند.

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$ $\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$

$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$ $\cot(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(۲k\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$

تست ۱

حاصل عبارت $A=\frac{۱+\cos(۱۳\pi-\alpha)}{\sin^۲(۵\pi-\alpha)}\times\frac{۱+\cos(۱۲\pi+\alpha)}{\sin(۷\pi+\alpha)}$ به ازای $\alpha=\frac{۵\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که

$\sin(۷\pi+\alpha)=-\sin\alpha$. $\sin(۵\pi-\alpha)=\sin\alpha$. $\cos(۱۲\pi+\alpha)=\cos\alpha$. $\cos(۱۳\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

بنابراین

$A=\frac{۱-\cos\alpha}{\sin^۲\alpha}\times\frac{۱+\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\frac{۱-\cos^۲\alpha}{-\sin^۳\alpha}=-\frac{\sin^۲\alpha}{\sin^۳\alpha}=-\frac{۱}{\sin\alpha}$

بنابراین مقدار A به ازای $\alpha=\frac{۵\pi}{۶}$ برابر است با $-\frac{۱}{\sin\frac{۵\pi}{۶}}=-\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=-۲$.

تست ۲

حاصل عبارت $A=۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)+۳\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+۴\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)+۵\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ به ازای $\alpha=\frac{۲\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) -۲

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=-\cos\alpha$. $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha$. $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$. $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$.

بنابراین $A=۲\cos\alpha+۳\cos\alpha-۴\cos\alpha-۵\cos\alpha=-۴\cos\alpha$. پس مقدار A به ازای $\alpha=\frac{۲\pi}{۳}$ برابر است با $-۴\cos\frac{۲\pi}{۳}=-۴(-\frac{۱}{۲})=۲$.

تست ۳

مقدار $\sin۴۲^\circ\cos۳۹^\circ+\cos(-۶۶^\circ)\sin(-۳۳^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

راه‌حل

توجه کنید که

$\sin۴۲^\circ=\sin(۳۶^\circ+۶^\circ)=\sin۶^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. $\cos۳۹^\circ=\cos(۳۶^\circ+۳^\circ)=\cos۳^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos(-۶۶^\circ)=\cos۶۶^\circ=\cos(۷۲^\circ-۶^\circ)=\cos۶^\circ=\frac{۱}{۲}$. $\sin(-۳۳^\circ)=-\sin۳۳^\circ=-\sin(۳۶^\circ-۳^\circ)=-(-\sin۳^\circ)=\frac{۱}{۲}$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$.

تست ۴

حاصل $A=۳\sin\frac{۳\pi}{۴}+۵\sin\frac{۵\pi}{۴}+۷\sin\frac{۷\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۵\sqrt{۲}}{۲}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که

$\sin\frac{۳\pi}{۴}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. $\sin\frac{۵\pi}{۴}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$. $\sin\frac{۷\pi}{۴}=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

بنابراین $A=۳(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+۵(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})+۷(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$.

تست ۵ اگر $\tan ۲۰^\circ = a$ ، مقدار $\frac{\tan ۲۰۰^\circ + \cot ۱۶۰^\circ}{\tan ۷۶۵^\circ + \cot ۳۴۰^\circ}$ برحسب a کدام است؟

۱) $a+۱$ ۲) $a-۱$ ۳) $\frac{a}{a+۱}$ ۴) $\frac{a}{a-۱}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\tan ۲۰۰^\circ = \tan(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) = \tan ۲۰^\circ = a$$

$$\cot ۱۶۰^\circ = \cot(۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ) = -\cot ۲۰^\circ = -\frac{۱}{a}$$

$$\tan ۷۶۵^\circ = \tan(۴\times ۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$\cot ۳۴۰^\circ = \cot(۳۶۰^\circ - ۲۰^\circ) = -\cot ۲۰^\circ = -\frac{۱}{a}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{a-\frac{۱}{a}}{۱-\frac{۱}{a}} = \frac{a^۲-۱}{a-۱} = a+۱$.

نکته ۹۳

اگر زاویه‌های α و β مکمل یکدیگر باشند، سینوس آن‌ها با هم برابر است و کسینوس آن‌ها قرینهٔ یکدیگر، تانژانت آن‌ها قرینهٔ یکدیگر و کتانژانت آن‌ها هم قرینهٔ یکدیگر است.

$$\alpha+\beta=\pi \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta\ ,\quad \cos\alpha = -\cos\beta$$

$$\tan\alpha = -\tan\beta\ ,\quad \cot\alpha = -\cot\beta$$

تست ۶ مقدار عبارت $A = \frac{\sin\frac{\pi}{۵} + \sin\frac{۲\pi}{۵}}{\sin\frac{۳\pi}{۵} + \sin\frac{۴\pi}{۵}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

راه‌حل توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$ ، آن‌گاه $\sin\alpha = \sin\beta$. بنابراین

$$\frac{\pi}{۵}+\frac{۴\pi}{۵}=\pi \Rightarrow \sin\frac{۴\pi}{۵} = \sin\frac{\pi}{۵}\ ,\quad \frac{۲\pi}{۵}+\frac{۳\pi}{۵}=\pi \Rightarrow \sin\frac{۳\pi}{۵} = \sin\frac{۲\pi}{۵}$$

در نتیجه

$$A = \frac{\sin\frac{\pi}{۵} + \sin\frac{۲\pi}{۵}}{\sin\frac{۲\pi}{۵} + \sin\frac{\pi}{۵}} = ۱$$

تست ۷ مقدار عبارت $A = \cos ۱^\circ + \cos ۲^\circ + \cos ۳^\circ + \cdots + \cos ۱۸۰^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸۰

راه‌حل ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$ ، آن‌گاه $\cos\beta = -\cos\alpha$ و در نتیجه $\cos\alpha+\cos\beta=۰$. بنابراین

$$\cos ۱^\circ + \cos ۱۷۹^\circ = ۰\ ,\quad \cos ۲^\circ + \cos ۱۷۸^\circ = ۰\ ,\ \ldots\ ,\quad \cos ۸۹^\circ + \cos ۹۱^\circ = ۰$$

از طرف دیگر $\cos ۹۰^\circ = ۰$ و $\cos ۱۸۰^\circ = -۱$. بنابراین $A = -۱$.

تست ۸ حاصل $A=\cos^{۳}\frac{\pi}{۱۱}+\cos^{۳}\frac{۲\pi}{۱۱}+\cdots+\cos^{۳}\frac{۱۰\pi}{۱۱}$ کدام است؟

۱) $۵\cos^{۳}\frac{\pi}{۱۱}$ ۲) $۱۰\cos^{۳}\frac{\pi}{۱۱}$ ۳) ۱ ۴) صفر

راه‌حل ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$ آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$. پس $\cos^{۳}\beta=-\cos^{۳}\alpha$ و در نتیجه $\cos^{۳}\alpha+\cos^{۳}\beta=۰$. بنابراین

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\pi}{۱۱}+\frac{۱۰\pi}{۱۱}=\pi\Rightarrow\cos^{۳}\frac{\pi}{۱۱}+\cos^{۳}\frac{۱۰\pi}{۱۱}=۰\\ \frac{۲\pi}{۱۱}+\frac{۹\pi}{۱۱}=\pi\Rightarrow\cos^{۳}\frac{۲\pi}{۱۱}+\cos^{۳}\frac{۹\pi}{۱۱}=۰\\ \vdots\\ \frac{۵\pi}{۱۱}+\frac{۶\pi}{۱۱}=\pi\Rightarrow\cos^{۳}\frac{۵\pi}{۱۱}+\cos^{۳}\frac{۶\pi}{۱۱}=۰\end{array}\right\}\Rightarrow A=۰$$

نکته ۹۴

اگر زاویه‌های α و β متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است و تانژانت یکی برابر کتانژانت دیگری است.

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\sin\alpha=\cos\beta\ ,\quad \tan\alpha=\cot\beta$$

تست ۹ مقدار $\sin^{۲}\frac{۲\pi}{۵}+\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

راه‌حل توجه کنید که $\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۱۰}+\frac{۲\pi}{۵}$، پس $\sin\frac{۲\pi}{۵}=\cos\frac{\pi}{۱۰}$، در نتیجه $\sin^{۲}\frac{۲\pi}{۵}=\cos^{۲}\frac{\pi}{۱۰}$. بنابراین $\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۰}+\sin^{۲}\frac{۲\pi}{۵}=\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۰}+\cos^{۲}\frac{\pi}{۱۰}=۱$

دست‌گرمی

-۸۱ حاصل عبارت $A=\frac{۲\sin(\pi+\alpha)-۴\sin(\pi-\alpha)}{۳\cos(\pi+\alpha)-\cos(\pi-\alpha)}$ کدام است؟

۱) $۳\tan\alpha$ ۲) $\frac{۳}{۲}\tan\alpha$ ۳) $-\tan\alpha$ ۴) $-۳\tan\alpha$

-۸۲ اگر $۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$، مقدار $\frac{\cos(\pi-\alpha)-\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)}$ برابر کدام است؟

۱) $\cot\alpha$ ۲) $-\cot\alpha$ ۳) $\cos\alpha$ ۴) $-\cos\alpha$

-۸۳ حاصل عبارت $\frac{\sin۱۳۵^\circ-\cos۱۲۰^\circ}{\sin۱۳۵^\circ+\cos۱۲۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $۱+۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲-۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

-۸۴ حاصل عبارت $A=\sin\frac{۷\pi}{۶}\tan\frac{۵\pi}{۴}+\cot\frac{۷\pi}{۴}\cos\frac{۵\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

-۸۵ مقدار $\cos^{۳}\frac{۷\pi}{۸}+\cos^{۳}\frac{۵\pi}{۸}+\cos^{۳}\frac{۳\pi}{۸}+\cos^{۳}\frac{\pi}{۸}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

آزمون ۴۸ نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۱)

۴۷۱- حاصل عبارت $A=\tan\alpha\cot(-\alpha)+\sin^{۲}(-\alpha)+\cos^{۲}\alpha$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) $-۲\sin^{۲}\alpha$

۴۷۲- حاصل $\cos(x-۹۰^\circ)\cot(-x-۱۸۰^\circ)$ کدام است؟

۱) $-\sin x$ ۲) $-\cos x$ ۳) $\sin x$ ۴) $\cos x$

۴۷۳- اگر $\tan\theta=۰/۴$، مقدار عبارت $A=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)+\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)+\sin(۳\pi-\theta)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۴۷۴- اگر $x+۳y=\frac{\pi}{۲}$، حاصل $\tan(۲x+۳y)$ کدام است؟

۱) $-\tan x$ ۲) $-\cot x$ ۳) $\tan x$ ۴) $\cot x$

۴۷۵- اگر $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۲\sin(\frac{۵\pi}{۲}+x)$، حاصل $\tan x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۴۷۶- حاصل $\cos۵۱۰^\circ$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴۷۷- حاصل $\cos\frac{۴۳\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴۷۸- حاصل $\sin\frac{۲۳\pi}{۶}\cos\frac{۱۶\pi}{۳}\tan\frac{۳۵\pi}{۴}\cot(-\frac{۴۳\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴۷۹- مقدار عبارت $A=\frac{\sin\frac{\pi}{۵}-\sin\frac{۲\pi}{۵}}{\sin\frac{۳\pi}{۵}-\sin\frac{۴\pi}{۵}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۴۸۰- مقدار عبارت $A=\cos\frac{\pi}{۵}+\cos\frac{۲\pi}{۵}+\cos\frac{۳\pi}{۵}+\cos\frac{۴\pi}{۵}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

سؤال
۴۷۱
۴۷۲
۴۷۳
۴۷۴
۴۷۵
۴۷۶
۴۷۷
۴۷۸
۴۷۹
۴۸۰

آزمون ۴۹ نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۲)

-۴۸۱ حاصل عبارت $A=3\sin(3\pi-\alpha)+4\sin(4\pi+\alpha)+5\sin(5\pi+\alpha)$ کدام است؟

۱) $4\sin\alpha$ ۲) $8\sin\alpha$ ۳) $2\sin\alpha$ ۴) $12\sin\alpha$

-۴۸۲ حاصل عبارت $A=\dfrac{3\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{2\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ کدام است؟ $(\alpha\neq\frac{k\pi}{2})$

۱) $2\cot^2\alpha$ ۲) $\frac{4}{3}\cot^2\alpha$ ۳) $2\tan^2\alpha$ ۴) $\frac{4}{3}\tan^2\alpha$

-۴۸۳ اگر $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)+2\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)-2\cos(3\pi+\alpha)}=3$، مقدار $\tan(\alpha-\frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -5 ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

-۴۸۴ اگر $\alpha-\beta=\frac{3\pi}{2}$، حاصل $\dfrac{1}{1-\cot\alpha}+\dfrac{1}{1+\cot\beta}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\tan\beta$ ۴) $\cot\alpha$

-۴۸۵ اگر $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ و $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\frac{12}{13}$، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{6}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{5}{12}$

-۴۸۶ حاصل کسر $\dfrac{\cos(-600^\circ)+\cot 675^\circ}{\tan 945^\circ-\sin(-330^\circ)}$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

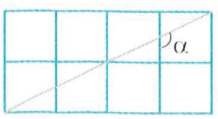
-۴۸۷ اگر $\tan 15^\circ=a$، حاصل عبارت $A=\dfrac{2\tan 75^\circ+\tan 105^\circ}{3\tan 165^\circ-\tan 255^\circ}$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{3}{3a^2+1}$ ۲) $\frac{3}{3a^2-1}$ ۳) $\frac{1}{3a^2-1}$ ۴) $\frac{-1}{3a^2+1}$

-۴۸۸ مقدار عبارت $A=4\sin^2\frac{101\pi}{3}-2\cos\frac{98\pi}{3}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $1+\sqrt{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

-۴۸۹ در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با یک واحد است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) -4 ۲) -3
۳) -2 ۴) -1

-۴۹۰ حاصل عبارت $A=\tan\frac{\pi}{14}\tan\frac{2\pi}{14}\cdots\tan\frac{6\pi}{14}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۲

سؤال	گام
۴۸۱	۹۲
۴۸۲	۸۲ ۹۲
۴۸۳	۸۲ ۹۲
۴۸۴	۸۲ ۹۲
۴۸۵	۷۵ ۸۲ ۹۲
۴۸۶	۹۲
۴۸۷	۹۲ ۲۸۴
۴۸۸	۹۲
۴۸۹	۹۳ ۹۴
۴۹۰	۹۴

آزمون ۵۰ — نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۳)

۴۹۱- حاصل عبارت $A=\frac{\tan(\pi-\alpha)+۳\tan(\pi+\alpha)}{\tan(۲\pi-\alpha)-\tan(۲\pi+\alpha)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۴۹۲- مقدار عبارت $A=\frac{۴\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})+۲\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶})}{۳\tan(\frac{۵\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳})-۶\cot(\frac{۷\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$ ۳) $-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$ ۴) $-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۴۹۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حاصل عبارت $\frac{\cos^۲\hat{A}+\cos^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{C}}{\sin^۲\hat{A}+\sin^۲\hat{B}+\sin^۲\hat{C}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۹۴- اگر $a+b=\frac{۵\pi}{۲}$، حاصل $\frac{\sin a+\tan a\tan b-۱}{\sin b-\cos^۲ a-\cos^۲ b+۱}$ کدام است؟

۱) $\tan b$ ۲) $\cot b$ ۳) $-\cot b$ ۴) $-\tan b$

۴۹۵- اگر $۳a+۲b=\pi$ و $\cos(a+b)=\frac{۳}{۵}$، مقدار $\sin\frac{a}{۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۴۹۶- حاصل عبارت $\frac{\sin^۲ ۴۱۰^\circ+\sin^۲ ۴۰۰^\circ}{\tan ۷۳۱^\circ\times\cot ۱۱^\circ}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۴۹۷- اگر $a=\cot ۲۵^\circ$، حاصل عبارت $A=\frac{\cos ۱۱۵^\circ-۳\cos ۱۵۵^\circ}{۳\cos ۲۹۵^\circ+\cos ۳۳۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳a+۱}{۳-a}$ ۲) $\frac{۳a-۱}{a-۳}$ ۳) $\frac{۳a-۱}{a+۳}$ ۴) $\frac{a+۱}{۳a-۱}$

۴۹۸- حاصل عبارت $A=\sin\frac{۱۱\pi}{۶}\tan\frac{۵\pi}{۴}-\cot\frac{۹\pi}{۴}\cos\frac{۵\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۴۹۹- حاصل عبارت $A=\cos^۲\frac{\pi}{۱۶}+\cos^۲\frac{۳\pi}{۱۶}+\cos^۲\frac{۵\pi}{۱۶}+\cos^۲\frac{۷\pi}{۱۶}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۵۰۰- مقدار عبارت $A=\frac{\cos ۱^\circ+\cos ۲^\circ+\cdots+\cos ۸۹^\circ}{\cos ۹۱^\circ+\cos ۹۲^\circ+\cdots+\cos ۱۷۹^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

سؤال	گ
۴۹۱	۲
۴۹۲	۲
۴۹۳	۲
۴۹۴	۲ ۲
۴۹۵	
۴۹۶	
۴۹۷	
۴۹۸	
۴۹۹	
۵۰۰	

درس ششم: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه

در این درس به رابطه‌هایی اشاره می‌کنیم که به کمک آن‌ها می‌توان سینوس و کسینوس مجموع یا تفاضل دو زاویه را برحسب سینوس و کسینوس این دو زاویه پیدا کرد.

نکته — نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

اگر α و β دو زاویهٔ دلخواه باشند، آن‌گاه

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,,\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,,\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

مثال:

۱) $\sin ۷۵^\circ=\sin(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ+\cos ۴۵^\circ\sin ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

۲) $\cos ۷۵^\circ=\cos(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\cos ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ-\sin ۴۵^\circ\sin ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$

۳) $\sin ۱۵^\circ=\sin(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ-\cos ۴۵^\circ\sin ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$

(البته توجه کنید که $\sin ۱۵^\circ=\sin(۹۰^\circ-۷۵^\circ)=\cos ۷۵^\circ$).

تست ۱ مقدار عبارت $\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۴}-\cos\frac{\pi}{۱۲}\sin\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

راه‌حل: عبارت مورد نظر به شکل $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ است. که در این‌جا $\alpha=\frac{\pi}{۱۲}$ و $\beta=\frac{\pi}{۴}$. در نتیجه، اگر در تساوی $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ قرار دهیم $\alpha=\frac{\pi}{۱۲}$ و $\beta=\frac{\pi}{۴}$. به‌دست می‌آید

$$\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۴}-\cos\frac{\pi}{۱۲}\sin\frac{\pi}{۴}=\sin(\frac{\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۴})=\sin(-\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

تست ۲ مقدار عبارت $\frac{\sin ۲۰^\circ\cos ۵۰^\circ+\cos ۲۰^\circ\sin ۵۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ\cos ۱۰^\circ+\sin ۳۰^\circ\sin ۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\tan ۷۰^\circ$ ۴) $\tan ۲۰^\circ$

راه‌حل: توجه کنید که

$$\cos ۳۰^\circ\cos ۱۰^\circ+\sin ۳۰^\circ\sin ۱۰^\circ=\cos(۳۰^\circ-۱۰^\circ)=\cos ۲۰^\circ\,,\quad \sin ۲۰^\circ\cos ۵۰^\circ+\cos ۲۰^\circ\sin ۵۰^\circ=\sin(۲۰^\circ+۵۰^\circ)=\sin ۷۰^\circ$$

از طرف دیگر، چون زاویه‌های ۷۰° و ۲۰° متمم یکدیگرند، پس $\sin ۷۰^\circ=\cos ۲۰^\circ$. بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر با ۱ است.

تست ۳ مقدار عبارت $\sqrt{۲}\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})-\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\cos\alpha$ ۲) $-\cos\alpha$ ۳) $\sin\alpha$ ۴) $-\sin\alpha$

راه‌حل: می‌توان نوشت

$$\sqrt{۲}\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})-\sin\alpha=\sqrt{۲}(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{۴}-\sin\frac{\pi}{۴}\cos\alpha)-\sin\alpha=\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha)-\sin\alpha$$
$$=\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha=-\cos\alpha$$

تست ۴ مقدار عبارت $\frac{\sin(\alpha-\beta)+۲\cos\alpha\sin\beta}{۲\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\tan(\alpha+\beta)$ ۴) $\cot(\alpha+\beta)$

راه‌حل صورت عبارت داده شده برابر است با

$$\sin(\alpha-\beta)+۲\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+۲\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

و مخرج عبارت داده شده برابر است با

$$۲\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)=۲\cos\alpha\cos\beta-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta)$.

تست ۵ اگر $\sin\alpha=\frac{۸}{۱۷}$، $\cos\beta=\frac{۴}{۵}$ و $۰<\alpha,\beta<\frac{\pi}{۲}$، مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۷۵}$ ۲) $\frac{۷۷}{۸۵}$ ۳) $\frac{۴۴}{۹۴۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۰۵}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که α و β هر دو زاویه‌های حاده هستند، پس $\cos\alpha=\sqrt{۱-(\frac{۸}{۱۷})^۲}=\frac{۱۵}{۱۷}$ و $\sin\beta=\sqrt{۱-(\frac{۴}{۵})^۲}=\frac{۳}{۵}$. بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{۸}{۱۷}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۱۵}{۱۷}=\frac{۳۲+۴۵}{۸۵}=\frac{۷۷}{۸۵}$$

تست ۶ اگر $\sin(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ و $\pi<\alpha<\frac{۴\pi}{۳}$، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

راه‌حل توجه کنید که

$$\sin(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{۴}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{۴}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$$
$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha-\sin\alpha)=-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}\Rightarrow\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{۱}{۵}$$

در نتیجه $\cos\alpha=\sin\alpha-\frac{۱}{۵}$. اکنون اگر در تساوی $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$، به جای $\cos\alpha$ قرار دهیم $\sin\alpha-\frac{۱}{۵}$، به‌دست می‌آید

$$\sin^۲\alpha+(\sin\alpha-\frac{۱}{۵})^۲=۱\Rightarrow\sin^۲\alpha+\sin^۲\alpha-\frac{۲}{۵}\sin\alpha+\frac{۱}{۲۵}=۱\Rightarrow\sin^۲\alpha-\frac{۱}{۵}\sin\alpha-\frac{۱۲}{۲۵}=۰\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۴}{۵},\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

اکنون توجه کنید که چون $\pi<\alpha<\frac{۴\pi}{۳}$، پس انتهای کمان نظیر α در ربع سوم است، در نتیجه $\sin\alpha$ عددی منفی است. به این ترتیب، $\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}$.

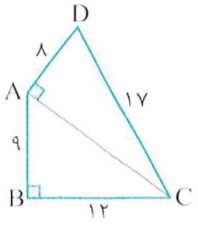
تست ۷ اگر $\sin(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۲}$ و $\sin(\alpha-\beta)=\frac{۱}{۳}$، حاصل $\tan\alpha\cot\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

راه‌حل از تساوی‌های فرض مسئله نتیجه می‌شود $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{۱}{۲}$ و $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{۱}{۳}$. با جمع و تفریق طرفین این دو تساوی معلوم می‌شود $\sin\alpha\cos\beta=\frac{۵}{۱۲}$ و $\cos\alpha\sin\beta=\frac{۱}{۱۲}$. در نتیجه

$$\tan\alpha\cot\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۱}{۱۲}}=۵$$

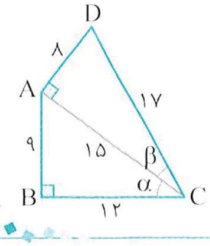
تست ۸ در شکل مقابل مقدار $\cos(\hat{BCD})$ کدام است؟



۱) $\frac{۸۴}{۸۵}$ ۲) $\frac{۷۶}{۸۵}$ ۳) $\frac{۳۶}{۸۵}$ ۴) $\frac{۳۲}{۸۵}$

راه‌حل توجه کنید که با نمادگذاری شکل مقابل $\hat{BCD}=\alpha+\beta$. از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس.

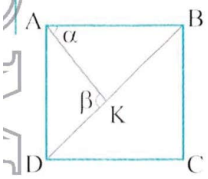
$$AC^۲=AB^۲+BC^۲=۹^۲+۱۲^۲=۲۲۵\Rightarrow AC=۱۵$$



در نتیجه

$$\cos(\hat{BCD})=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{۱۲}{۱۵}\times\frac{۱۵}{۱۷}-\frac{۹}{۱۵}\times\frac{۸}{۱۷}=\frac{۱۸۰}{۲۵۵}-\frac{۷۲}{۲۵۵}=\frac{۱۰۸}{۲۵۵}=\frac{۳۶}{۸۵}$$

تست ۹ در شکل مقابل ABCD مربع است و $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$. مقدار $\cos\beta$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$

راه‌حل چون ABCD مربع است، پس $\hat{ABD}=۴۵^\circ$. از طرف دیگر، چون $\hat{AKD}=\beta$ برای مثلث AKB زاویه‌ای خارجی است. پس $\beta=۴۵^\circ+\alpha$. به این ترتیب

$$\cos\beta=\cos(۴۵^\circ+\alpha)=\cos۴۵^\circ\cos\alpha-\sin۴۵^\circ\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha-\sin\alpha)\quad (۱)$$

توجه کنید که چون α زاویهٔ حاده است.

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$$

همین‌طور $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}$. پس $\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$. در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید $\cos\beta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۳}{۵}-\frac{۴}{۵})=-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$.

نکته ۹۶

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد،

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})=-\sqrt{۲}\cos(\alpha+\frac{\pi}{۴})\quad ,\quad \sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin(\alpha+\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\cos(\alpha-\frac{\pi}{۴})$$

تست ۱۰ اگر $\sin x=\frac{۴+۳\cos x}{۳}$ ، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۴}-x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

راه‌حل از فرض سؤال نتیجه می‌شود

$$۳\sin x-۳\cos x=۴\Rightarrow\sin x-\cos x=\frac{۴}{۳}$$

در نتیجه

$$\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{۲}-(x-\frac{\pi}{۴}))=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

بنابراین $\cos(\frac{۳\pi}{۴}-x)=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$.

تذکر عبارت $a\sin x+b\cos x$ را با فرض اینکه $\tan\theta=\frac{b}{a}$ و θ زاویه‌ای معلوم است، می‌توانیم به‌صورت $\sqrt{a^۲+b^۲}\sin(x+\theta)$ بنویسیم.

همچنین با فرض $\tan\alpha=\frac{a}{b}$ می‌توانیم آن را به‌صورت $\sqrt{a^۲+b^۲}\cos(x-\alpha)$ بنویسیم.

تست ۱۱ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{۳}\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ}{\cos ۱۴۰^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

راه‌حل توجه کنید که $\sqrt{۳}=\tan ۶۰^\circ$. بنابراین

$$\frac{\sqrt{۳}\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ}{\cos ۱۴۰^\circ}=\frac{\tan ۶۰^\circ \sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ}{\cos ۱۴۰^\circ}=\frac{\frac{\sin ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ}\sin ۲۰^\circ+\cos ۲۰^\circ}{\cos ۱۴۰^\circ}$$

$$=\frac{\sin ۶۰^\circ \sin ۲۰^\circ+\cos ۶۰^\circ \cos ۲۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ \cos ۱۴۰^\circ}=\frac{\cos(۶۰^\circ-۲۰^\circ)}{\frac{۱}{۲}\cos ۱۴۰^\circ}=\frac{۲\cos ۴۰^\circ}{\cos ۱۴۰^\circ}=\frac{۲\cos ۴۰^\circ}{-\cos ۴۰^\circ}=-۲$$

تست ۱۲ حداقل و حداکثر عبارت $\sin x+\sqrt{۳}\cos x$ به ترتیب کدام است؟

۱) -۱ و ۱ ۲) -۲ و ۲ ۳) -۳ و ۳ ۴) $-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳}$. در نتیجه

$$\sin x+\sqrt{۳}\cos x=\sin x+\tan\frac{\pi}{۳}\cos x=\sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{۳}}{\cos\frac{\pi}{۳}}\cos x=\frac{\cos\frac{\pi}{۳}\sin x+\sin\frac{\pi}{۳}\cos x}{\cos\frac{\pi}{۳}}=\frac{\sin(\frac{\pi}{۳}+x)}{\frac{۱}{۲}}=۲\sin(\frac{\pi}{۳}+x)$$

از طرف دیگر، چون $-۱\le\sin(\frac{\pi}{۳}+x)\le ۱$، پس $-۲\le ۲\sin(\frac{\pi}{۳}+x)\le ۲$، بنابراین $-۲\le\sin x+\sqrt{۳}\cos x\le ۲$. بنابراین حداقل مقدار عبارت مورد نظر برابر -۲ است (که مثلاً به ازای $x=\frac{۷\pi}{۶}$ به‌دست می‌آید) و حداکثر مقدار این عبارت برابر ۲ است (که مثلاً به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ به‌دست می‌آید).

دست‌گرمی

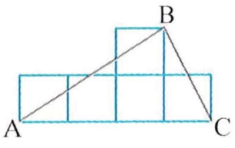
۸۶- حاصل $\frac{\cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ-\sin ۲۰^\circ \sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ+\sin ۴۰^\circ \cos ۲۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\tan ۲۰^\circ$

۸۷- مقدار $\sin ۳x\cos ۲x+\sin ۲x\cos ۳x$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۱۵}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۸۸- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر ۱ است. مقدار $\cos(\hat{ABC})$ کدام است؟



۱) $\frac{۷\sqrt{۶۵}}{۶۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۶۵}$

۳) $\frac{۴}{۶۵}$ ۴) $\frac{۵۶}{۶۵}$

۸۹- حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵^\circ+\cos ۲۵^\circ}{\cos ۲۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۹۰- حاصل عبارت $A=\sqrt{۳}\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ$ برابر است با

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

آزمون ۵۱ — سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۱)

سؤال	گام
۵۰۱	۹۵
۵۰۲	۷۵ ۹۵
۵۰۳	۹۵
۵۰۴	۹۶
۵۰۵	۷۵ ۹۵
۵۰۶	۹۴ ۹۵
۵۰۷	۹۶
۵۰۸	۹۲ ۹۶
۵۰۹	۹۵
۵۱۰	۹۵

۵۰۱- مقدار $\sin\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$

۵۰۲- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ A در ناحیهٔ اول باشد و $\sin\hat{A}=\frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ B در ناحیهٔ سوم باشد و $\cos\hat{B}=-\frac{۵}{۱۳}$، مقدار $\cos(\hat{A}+\hat{B})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۶۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۶۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۳}$

۵۰۳- اگر $\sin(\alpha+\beta)=\frac{۳}{۱۰}$ و $\sin(\alpha-\beta)=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\sin\alpha\cos\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۵۰۴- مقدار $\sin ۷۵^\circ+\cos ۷۵^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۵۰۵- اگر $\frac{۳\pi}{۴}>\alpha>\beta>\frac{\pi}{۲}$، $\cos(\alpha-\beta)=\frac{۱۲}{۱۳}$ و $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{۳}{۵}$، مقدار $\sin ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۴}{۶۵}$ ۲) $-\frac{۱۶}{۶۵}$ ۳) $-\frac{۵۶}{۶۵}$ ۴) $-\frac{۸}{۶۵}$

۵۰۶- مقدار $\frac{\sin ۶۱^\circ\sin ۳۱^\circ+\sin ۵۹^\circ\sin ۲۹^\circ}{\sin ۱۲^\circ\cos ۱۸^\circ+\sin ۱۸^\circ\cos ۱۲^\circ}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

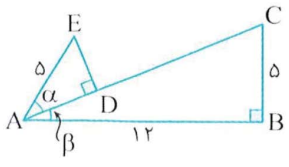
۵۰۷- مقدار عبارت $A=\sin ۱۵^\circ-\sqrt{۳}\cos ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۵۰۸- حاصل $\frac{\sin(\pi-x)-\cos(\pi+x)}{\cos(x-\frac{\pi}{۴})}$ کدام است؟

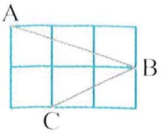
۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۵۰۹- در شکل مقابل $AD=۴$. مقدار $\cos(\alpha+\beta)$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۷}{۶۵}$ ۲) $\frac{۳۳}{۶۵}$ ۳) $\frac{۴۲}{۶۵}$ ۴) $\frac{۴۷}{۶۵}$

۵۱۰- در شکل روبه‌رو طول ضلع هر یک از مربع های کوچک برابر با ۱ است. مقدار $\cos(\hat{ABC})$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

آزمون ۵۲ سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۲)

۵۱۱- ساده شدهٔ عبارت $\sin(x+\frac{\pi}{3})-\cos(x+\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

۱) $-\cos x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $\sin x$

۵۱۲- اگر $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$، $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$، $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ و $\cos\beta=\frac{3}{5}$، مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

۱) $\frac{11}{25}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{25}$

۵۱۳- اگر $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$ و $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{4}$، مقدار $\cos\alpha\cos\beta$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $-\frac{1}{12}$

۵۱۴- مقدار $\sin 35^\circ\cos 25^\circ+\cos 65^\circ\sin 55^\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۱۵- اگر $\sin(x+\frac{\pi}{4})=3\cos(x+\frac{\pi}{4})$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

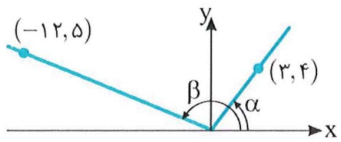
۵۱۶- اگر $3\cos x+\sqrt{3}\sin x=3$، مقدار $\cos(x-\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۵۱۷- مقدار $\frac{\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 50^\circ}$ کدام است؟

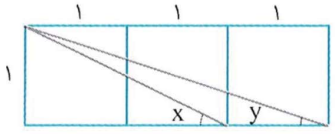
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۵۱۸- در شکل روبه‌رو مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟



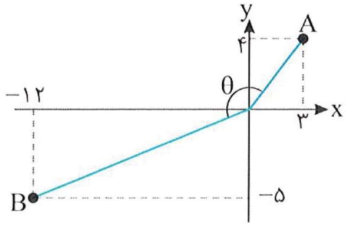
۱) $-\frac{33}{65}$ ۲) $\frac{63}{65}$
۳) $\frac{33}{65}$ ۴) $-\frac{63}{65}$

۵۱۹- در شکل مقابل سه مربع به ضلع ۱ واحد وجود دارد. مقدار $\sin(x-y)$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{\sqrt{75}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{50}}$
۳) $\frac{1}{\sqrt{50}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{75}}$

۵۲۰- در شکل مقابل مقدار $\cos\theta$ کدام است؟



۱) $-\frac{61}{65}$ ۲) $-\frac{56}{65}$
۳) $-\frac{31}{65}$ ۴) $-\frac{27}{65}$

آزمون ۵۳ سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۳)

سؤال	گام
۵۲۱	۹۵
۵۲۲	۷۵ ۹۵
۵۲۳	۹۵
۵۲۴	۹۵
۵۲۵	۹۵
۵۲۶	۷۵ ۹۵
۵۲۷	۹۲ ۹۵
۵۲۸	۹۵
۵۲۹	۹۵
۵۳۰	۹۴ ۹۵

۵۲۱- ساده شدهٔ عبارت $A=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$ کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $\cot\alpha$ ۳) $\tan\beta$ ۴) $\cot\beta$

۵۲۲- اگر $\cos\theta=-\frac{۱۲}{۱۳}$ و $\theta\in(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$، حاصل $\cos(\theta+\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲۶}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲۶}$ ۳) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۲۶}$ ۴) $-\frac{۷\sqrt{۲}}{۲۶}$

۵۲۳- اگر $\sin\alpha\sin\beta=\frac{۳}{۸}$ و $\tan\alpha\tan\beta=۴$، مقدار $\cos(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ۲) $-\frac{۹}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۳۲}$

۵۲۴- اگر $x+y=\frac{۵\pi}{۶}$، مقدار $(\sin x+\cos y)^۲+(\cos x+\sin y)^۲$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $۲+\sqrt{۳}$

۵۲۵- اگر $۸\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=۱$، حاصل $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۳۲}$ ۲) $\frac{۱۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۵۲۶- اگر α و β حاده باشند، $\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$ و $\cos(\alpha+\beta)=\frac{۳}{۵}$، مقدار $\sin\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

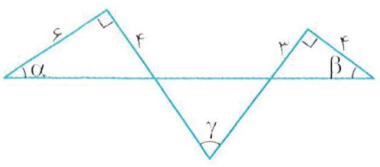
۵۲۷- در مثلث ABC، اگر $\cos\hat{A}=\frac{۳}{۵}$ و $\cos\hat{B}=\frac{۱}{۳}$، مقدار $۱۵\cos\hat{C}$ کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}-۳$ ۲) $۸\sqrt{۲}+۳$ ۳) $۳-۸\sqrt{۲}$ ۴) $-۳-۸\sqrt{۲}$

۵۲۸- اگر $\sin a=۴\sin b\sin(a+b)$ و $\cos a=-۴\cos b\cos(a+b)$، مقدار $\tan a$ کدام است؟

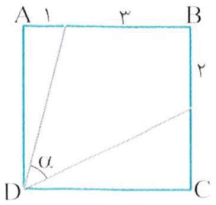
۱) ۳ ۲) ۵ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۵۲۹- در شکل مقابل مقدار $\sin\gamma$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۵\sqrt{۱۳}}$ ۲) $\frac{۲}{۵\sqrt{۱۳}}$
۳) $\frac{۱۷}{۵\sqrt{۱۳}}$ ۴) $\frac{۱۸}{۵\sqrt{۱۳}}$

۵۳۰- در شکل مقابل ABCD مربع است. مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{\sqrt{۸۵}}$ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۸۵}}$
۳) $\frac{۳}{\sqrt{۸۵}}$ ۴) $\frac{۶}{\sqrt{۸۵}}$

۵۳۱- اگر $\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{۳}{۲}$ و $\tan a=\frac{۱}{۵}$، مقدار $\cot b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) ۵ ۴) -۱

۵۳۲- اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$، حاصل $۲۴\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$

۵۳۳- اگر $\sin a-\cos b=\frac{۲}{۳}$ و $\cos a-\sin b=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$، مقدار $\sin(a+b)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۵۳۴- اگر $\cos x+\cos y=\frac{۱}{۲}$ و $\sin x+\sin y=\frac{۱}{۴}$، حاصل $\cos(x-y)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۳}{۳۲}$ ۲) $-\frac{۲۷}{۳۲}$ ۳) $\frac{۲۷}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳۲}$

۵۳۵- اگر $\sin ۲۸^\circ+\cos ۲۸^\circ=k^۳$، مقدار $\cos ۱۷^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{k}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{k}{۲}$ ۳) $\frac{k^۳}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{k^۳}{۲}$

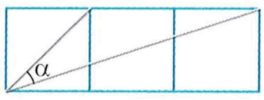
۵۳۶- در مثلث ABC می‌دانیم $\cos\hat{A}\cos\hat{B}-\sin\hat{A}\sin\hat{B}=-\frac{۱}{۲}$. مقدار $\cos\hat{C}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵۳۷- در مثلث ABC، $\sin\hat{A}\sin\hat{B}=\cos\hat{A}\cos\hat{B}$. مقدار $\frac{\cos\hat{B}}{\sin\hat{A}}+\sin\hat{C}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵۳۸- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

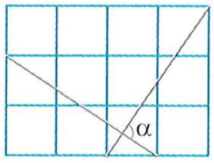


۱) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$
۳) $\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۱۵}}$

۵۳۹- حداقل و حداکثر عبارت $\sqrt{۳}\sin x-\cos x$ به ترتیب کدام است؟

۱) -۱ و ۱ ۲) -۲ و ۲ ۳) -۳ و ۳ ۴) $-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}$

۵۴۰- در شکل مقابل طول هر ضلع مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۱

سؤال
۵۳۱ ۵۳۲ ۵۳۳ ۵۳۴ ۵۳۵ ۵۳۶ ۵۳۷ ۵۳۸ ۵۳۹ ۵۴۰

درس هفتم: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α

سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α

اگر در دستور $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ قرار دهیم $\beta=\alpha$، به‌دست می‌آید

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

بنابراین $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

همین‌طور، اگر در دستور $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ قرار دهیم $\beta=\alpha$، به‌دست می‌آید

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

بنابراین $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

اگر در این اتحاد به جای $\cos^2\alpha$ قرار دهیم $1-\sin^2\alpha$، به‌دست می‌آید $\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

همین‌طور، اگر به جای $\sin^2\alpha$ قرار دهیم $1-\cos^2\alpha$، به‌دست می‌آید $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

نکته ۹۷

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ ، $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

مثال: اگر $\sin\alpha=\frac{5}{13}$، آن‌گاه $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2(\frac{5}{13})^2=\frac{119}{169}$.

تست ۱ اگر $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{24}{25}$ ۲) $\frac{24}{25}$ ۳) $\frac{12}{25}$ ۴) $-\frac{12}{25}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $\cos\alpha$ عددی منفی است. پس

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{9}{25}+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-4}{5},\quad \cos\alpha=\frac{4}{5}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}\times\frac{-4}{5}=\frac{-24}{25}$.

تست ۲ حاصل عبارت $\frac{2\cos^2 x-\cos 2x}{2\sin^2 x+\cos 2x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\tan x$ ۴) $\cot x$

راه‌حل

توجه کنید که $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$. بنابراین

$$\frac{2\cos^2 x-\cos 2x}{2\sin^2 x+\cos 2x}=\frac{2\cos^2 x-(2\cos^2 x-1)}{2\sin^2 x+(1-2\sin^2 x)}=\frac{1}{1}=1$$

تست ۳ حاصل عبارت $A=\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x-1}-\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{\sin x+\cos x}+\sqrt{2}\cos x$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $2\sqrt{2}\sin x$ ۴) $2\sqrt{2}\cos x$

راه‌حل از اتحاد $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x=۱-۲\sin^۲ x$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\cos ۲x}{\sqrt{۲}\sin x-۱}-\frac{\sqrt{۲}\cos ۲x}{\sin x+\cos x}+\sqrt{۲}\cos x=\frac{۱-۲\sin^۲ x}{\sqrt{۲}\sin x-۱}-\frac{\sqrt{۲}(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}{\sin x+\cos x}+\sqrt{۲}\cos x$$
$$=\frac{(۱-\sqrt{۲}\sin x)(۱+\sqrt{۲}\sin x)}{\sqrt{۲}\sin x-۱}-\frac{\sqrt{۲}(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}+\sqrt{۲}\cos x$$
$$=-۱-\sqrt{۲}\sin x-\sqrt{۲}\cos x+\sqrt{۲}\sin x+\sqrt{۲}\cos x=-۱$$

تست ۴ حاصل $\frac{۲\sin^۲ ۴۰^\circ-۱}{\sin ۲۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲\cos ۱۰^\circ}$ ۲) $-\frac{۱}{۲\cos ۱۰^\circ}$ ۳) $۲\cos ۱۰^\circ$ ۴) $-\frac{۱}{\cos ۱۰^\circ}$

راه‌حل توجه کنید که $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ و $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$، بنابراین

$$\frac{۲\sin^۲ ۴۰^\circ-۱}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{-\cos ۸۰^\circ}{۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}=-\frac{\cos(۹۰^\circ-۱۰^\circ)}{۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}=-\frac{\sin ۱۰^\circ}{۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}=-\frac{۱}{۲\cos ۱۰^\circ}$$

تست ۵ مقدار $\sin ۱۰۵^\circ\cos ۱۰۵^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\cos ۱۰۵^\circ=\cos(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$ ، $\sin ۱۰۵^\circ=\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=\cos ۱۵^\circ$

بنابراین $\sin ۱۰۵^\circ\cos ۱۰۵^\circ=-\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ=-\frac{۱}{۲}(۲\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ)=-\frac{۱}{۲}\sin(۲\times ۱۵^\circ)=-\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}$

تست ۶ مقدار عبارت $A=(\cos ۷۵^\circ-\frac{۱}{\sin ۷۵^\circ})(\sin ۷۵^\circ-\frac{۱}{\cos ۷۵^\circ})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۲

راه‌حل می‌توان نوشت

$$A=(\cos ۷۵^\circ-\frac{۱}{\sin ۷۵^\circ})(\sin ۷۵^\circ-\frac{۱}{\cos ۷۵^\circ})=(\frac{\cos ۷۵^\circ\sin ۷۵^\circ-۱}{\sin ۷۵^\circ})(\frac{\sin ۷۵^\circ\cos ۷۵^\circ-۱}{\cos ۷۵^\circ})$$
$$=\frac{(\frac{۱}{۲}\sin ۱۵۰^\circ-۱)(\frac{۱}{۲}\sin ۱۵۰^\circ-۱)}{\sin ۷۵^\circ\cos ۷۵^\circ}\xrightarrow{\sin ۱۵۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}}A=\frac{(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}-۱)(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}-۱)}{\frac{۱}{۲}\sin ۱۵۰^\circ}=\frac{(-\frac{۳}{۴})(-\frac{۳}{۴})}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۹}{۴}$$

تست ۷ مقدار $\frac{\sin ۷۲^\circ}{\sin ۲۴^\circ}-\frac{\cos ۷۲^\circ}{\cos ۲۴^\circ}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $۲\sin ۴۸^\circ$ ۴) $\frac{۱}{۲}\sin ۴۸^\circ$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\frac{\sin ۷۲^\circ}{\sin ۲۴^\circ}-\frac{\cos ۷۲^\circ}{\cos ۲۴^\circ}=\frac{\sin ۷۲^\circ\cos ۲۴^\circ-\cos ۷۲^\circ\sin ۲۴^\circ}{\sin ۲۴^\circ\cos ۲۴^\circ}=\frac{\sin(۷۲^\circ-۲۴^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin ۴۸^\circ}=\frac{۲\sin ۴۸^\circ}{\sin ۴۸^\circ}=۲$$

تست ۸ مقدار عبارت $A=\sin x\cos x(۱-۲\sin^۲ x)$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۲۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

راه‌حل ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$A=\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

بنابراین به‌ازای $x=\frac{\pi}{24}$ به‌دست می‌آید

$$A=\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{24}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}$$

تست ۹ مقدار عبارت $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

راه‌حل فرض کنید $A=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$. دو طرف این تساوی را در $\sin 20^\circ$ ضرب می‌کنیم و از دستور $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 20^\circ A=\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 80^\circ)\cos 80^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 160^\circ)=\frac{1}{8}\sin 160^\circ$$

اکنون توجه کنید که $\sin 160^\circ=\sin(180^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$. بنابراین $\sin 20^\circ A=\frac{1}{8}\sin 20^\circ$. پس $A=\frac{1}{8}$.

نکته ۹۸

چون نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 45° را می‌دانیم، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 15° و $22/5^\circ$ را حساب کنیم.

مثال: مقدار $\cos 15^\circ$ را حساب می‌کنیم. اگر در تساوی $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ قرار دهیم $\alpha=15^\circ$. به‌دست می‌آید

$$\cos 30^\circ=2\cos^2 15^\circ-1\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos^2 15^\circ-1\Rightarrow\cos^2 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+2}{4}\Rightarrow\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$$

تست ۱۰ اگر $\sin 22/5^\circ=\frac{\sqrt{a-\sqrt{a}}}{2}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل در اتحاد $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ قرار می‌دهیم $\alpha=22/5^\circ$. در این صورت

$$\cos 45^\circ=1-2\sin^2 22/5^\circ\Rightarrow\sin^2 22/5=\frac{1-\cos 45^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\sin 22/5^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow a=2$$

نکته ۹۹

اتحادهای $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ و $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ را می‌توانیم به‌صورت‌های زیر نیز بنویسیم:

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha\quad,\quad 2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$

تست ۱۱ مقدار $2\sin^2\frac{5\pi}{16}+\cos\frac{5\pi}{8}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

راه‌حل توجه کنید که $2\sin^2\frac{5\pi}{16}=1-\cos(2\times\frac{5\pi}{16})=1-\cos\frac{5\pi}{8}$. بنابراین $2\sin^2\frac{5\pi}{16}+\cos\frac{5\pi}{8}=1$.

عبارت‌های $1-\sin 2\alpha$ و $1+\sin 2\alpha$ را می‌توانیم به‌صورت مربع کامل بنویسیم:

$$1\pm\sin 2\alpha=1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\pm 2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$$

نکته ۱۰۰

$$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\quad,\quad 1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$$

تست ۱۲ ساده شدهٔ عبارت $A=\sqrt{1-\sin 10^\circ}+\sqrt{1+\sin 10^\circ}$ کدام است؟

۱) $2\sin 5^\circ$ ۲) $2\cos 5^\circ$ ۳) $\sin 10^\circ$ ۴) $\cos 10^\circ$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $1-\sin 10^\circ=\sin^2 5^\circ+\cos^2 5^\circ-2\sin 5^\circ\cos 5^\circ=(\sin 5^\circ-\cos 5^\circ)^2$. به همین ترتیب $1+\sin 10^\circ=(\sin 5^\circ+\cos 5^\circ)^2$.

بنابراین $A=\sqrt{(\sin 5^\circ-\cos 5^\circ)^2}+\sqrt{(\sin 5^\circ+\cos 5^\circ)^2}=|\sin 5^\circ-\cos 5^\circ|+|\sin 5^\circ+\cos 5^\circ|$

با توجه به اینکه $\cos 5^\circ>\sin 5^\circ>0$ نتیجه می‌شود $A=-\sin 5^\circ+\cos 5^\circ+\sin 5^\circ+\cos 5^\circ=2\cos 5^\circ$.

تست ۱۳ اگر $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=7-4\sqrt{3}$ ، مقدار $\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ کدام است؟

۱) $\pm\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$ ۲) $\pm\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$ ۳) $\pm(3-\sqrt{2})$ ۴) $\pm(2-\sqrt{3})$

راه‌حل توجه کنید که $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=\frac{1-2\sin x\cos x}{1+2\sin x\cos x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^2=7-4\sqrt{3}$

از طرف دیگر $(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$ ، در نتیجه $\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^2=(2-\sqrt{3})^2\Rightarrow\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\pm(2-\sqrt{3})$

مجموع و تفاضل تانژانت و کتانژانت زاویهٔ α را می‌توانیم برحسب نسبت‌های مثلثاتی 2α بنویسیم:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan\alpha-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=-2\cot 2\alpha$$

نکته ۱۰۱

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}\ ,\quad \cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$$

تست ۱۴ مقدار $\tan 75^\circ+\cot 75^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل می‌توان نوشت $\tan 75^\circ+\cot 75^\circ=\frac{2}{\sin 150^\circ}=\frac{2}{\sin(180^\circ-30^\circ)}=\frac{2}{\sin 30^\circ}=4$.

توجه کنید که

$$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$$

نکته ۱۰۲

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\ ,\quad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

تست ۱۵ اگر $\cot x=\frac{1}{2}$ ، مقدار $\frac{1+2\cos 2x}{\sin 2x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{16}$

راه‌حل توجه کنید که $\tan x=\frac{1}{\cot x}=2$. پس $\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=-\frac{3}{5}$ و $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{4}{5}$. در نتیجه، $\frac{1+2\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1-\frac{6}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{1}{4}$

توجه کنید که

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\alpha$$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3(\sin\alpha\cos\alpha)^2$$

$$=1-3\left(\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)=1-\frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha$$

نکته ۱۰۳

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\alpha\ ,\quad \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha$$

تست ۱۶ اگر $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{9}{16}$، مقدار $\frac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}{\cos 4\alpha}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{5}{8}$ ۳) $-\frac{11}{24}$ ۴) $-\frac{7}{8}$

راه‌حل توجه کنید که

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{9}{16}\Rightarrow\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\alpha=\frac{9}{16}\Rightarrow\cos 4\alpha=-\frac{3}{4}$$

بنابراین

$$\frac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}{\cos 4\alpha}=\frac{\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha}{\cos 4\alpha}=\frac{\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{3}{4}}=-\frac{11}{24}$$

دست‌گرمی

۹۱- اگر $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ و $\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۲) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۹۲- حاصل $\frac{1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x}$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $2\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $2\cos x$

۹۳- مقدار $\frac{1}{\sin^2 15^\circ}+\frac{1}{\cos^2 15^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۴

۹۴- مقدار $\cos\frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$

۹۵- مقدار $3\cos^2 105^\circ+\sin^2 105^\circ$ کدام است؟

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\sqrt{3}-1$ ۴) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

۹۶- مقدار $\tan 22/5^\circ-\cot 22/5^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۹۷- ساده شدهٔ عبارت $\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

آزمون ۵۵ — سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۱)

۵۴۱- حاصل $\frac{\cos 2x}{1-\tan^2 x}$ برابر کدام است؟

۱) $\cos^2 x$ ۲) $\sin^2 x$ ۳) $\frac{1}{\cos^2 x}$ ۴) $\frac{1}{\sin^2 x}$

۵۴۲- مقدار $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۵۴۳- مقدار $\cos 15^\circ \sin 75^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

۵۴۴- اگر $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ و $\sin\theta = \frac{4}{5}$، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟

۱) $-\frac{24}{25}$ ۲) $\frac{24}{25}$ ۳) $\frac{12}{25}$ ۴) $-\frac{12}{25}$

۵۴۵- اگر $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$، مقدار $\tan\alpha + \cot\alpha$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۵۴۶- اگر $\cot x = 3$، مقدار عبارت $A = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۹ ۴) $\frac{1}{9}$

۵۴۷- حاصل $\frac{1-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}$ برابر کدام است؟

۱) $\sin 20^\circ$ ۲) $\cos 20^\circ$ ۳) $\tan 20^\circ$ ۴) $\cot 20^\circ$

۵۴۸- مقدار $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ$ برابر کدام است؟

۱) $\sin 40^\circ$ ۲) $\cos 40^\circ$ ۳) $-\cos 40^\circ$ ۴) $-\sin 40^\circ$

۵۴۹- اگر $\sin 2x = \frac{1}{3}$، مقدار $A = \sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{9}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{17}{18}$

۵۵۰- اگر $\frac{\sin^3 x}{2\sin x - \sin 2x} = \frac{2}{3}$، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $-\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{7}{9}$

سؤال
۵۴۱
۵۴۲
۵۴۳
۵۴۴
۵۴۵
۵۴۶
۵۴۷
۵۴۸
۵۴۹
۵۵۰

آزمون ۵۶ سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (۲)

سؤال	گام
۵۵۱	۹۴ ۹۵ ۹۷
۵۵۲	۹۷
۵۵۳	۹۴ ۹۷
۵۵۴	۱۰۲
۵۵۵	۹۷
۵۵۶	۹۴ ۹۷
۵۵۷	۷۵ ۱۰۳
۵۵۸	۹۴ ۹۷
۵۵۹	۹۴ ۹۷
۵۶۰	۹۴ ۹۷ ۱۰۱

۵۵۱- مقدار $\frac{\sin ۷۸^\circ}{\sin ۸۶^\circ} - \frac{\sin ۱۲^\circ}{\sin ۴^\circ}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۵۵۲- مقدار $\sin\frac{\pi}{۱۲}(۲\cos^۲\frac{\pi}{۲۴}-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵۵۳- مقدار $\cos\frac{\pi}{۸}\sin\frac{۳\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}+۲}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}-۲}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}+۲}{۲}$

۵۵۴- اگر $\tan x=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\sin ۲x+\cos ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۵۵۵- اگر $\frac{۱}{\cos\theta}+۹\cos\theta=۱۰$، مقدار $\cos ۲\theta$ کدام است؟ $(\theta\neq ۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z})$

۱) $-\frac{۷۱}{۸۱}$ ۲) $-\frac{۷۹}{۸۱}$ ۳) $-\frac{۷}{۹}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۵۵۶- اگر $\cos ۳^\circ=a$، مقدار $\sin ۸۴^\circ$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۱-a^۲}{۲}$ ۲) $\frac{a^۲-۱}{۲}$ ۳) $۲a^۲-۱$ ۴) $۱-۲a^۲$

۵۵۷- اگر $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=\frac{۲}{۳}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، مقدار $\sin ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۵۵۸- مقدار $\frac{\sin ۵۰^\circ \sin ۴۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۵۵۹- اگر $x=\frac{\pi}{۲۴}$، مقدار $\cos ۱۰x\cos ۲x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵۶۰- مقدار $\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}$ کدام است؟

۱) $\tan ۱۰^\circ$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\cot ۱۰^\circ$

۵۶۱- ساده شدهٔ عبارت $A=\sin x\cos^3 x-\sin^3 x\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}\sin 4x$ ۲) $\frac{1}{2}\sin 2x$ ۳) $\frac{1}{4}\cos 4x$ ۴) $\frac{1}{2}\cos 2x$

۵۶۲- اگر $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۵۶۳- اگر $\sin\alpha=\frac{4}{5}$، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟ $(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$

۱) $\frac{29}{7}$ ۲) $\frac{24}{7}$ ۳) $\frac{23}{7}$ ۴) $\frac{18}{7}$

۵۶۴- اگر $2\sin x=5\cos x$، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{10}{29}$ ۳) $\frac{20}{29}$ ۴) $\frac{1}{29}$

۵۶۵- اگر $\sin x=4\sin y$ و $\cos y=3\cos x$، مقدار $\frac{\sin 2x}{\sin 2y}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۵۶۶- اگر $\sin x-\cos x=\frac{4}{3}$، مقدار عبارت $A=\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{24}$ ۲) $-\frac{25}{24}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۵۶۷- مقدار $\frac{\sin^2 110^\circ-\sin^2 20^\circ}{\sin 50^\circ}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۵۶۸- حاصل $\frac{1+\cos 40^\circ}{\cos 55^\circ\cos 35^\circ}$ کدام است؟

۱) $\cos 20^\circ$ ۲) $2\cos 20^\circ$ ۳) $4\cos 20^\circ$ ۴) $\frac{1}{2}\cos 20^\circ$

۵۶۹- اگر $\cos a\cos 2a=\frac{1}{16\sin a}$، مقدار $\cos 8a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۵۷۰- اگر $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{4}{5}$، مقدار $\cos^2 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{60}$ ۲) $\frac{59}{60}$ ۳) $\frac{13}{15}$ ۴) $\frac{11}{15}$

سؤال
۵۶۱
۵۶۲
۵۶۳
۵۶۴
۵۶۵
۵۶۶
۵۶۷
۵۶۸
۵۶۹
۵۷۰

آزمون ۵۸ سینوس و کسینوس زاویهٔ ۲α (۴)

-۵۷۱ مقدار $\tan ۷۵^\circ - \tan ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

-۵۷۲ اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ و $\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x} = ۲$، مقدار $\tan x + ۲\cot x$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-۳\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

-۵۷۳ مقدار $A = \sqrt{۲+\sqrt{۲+۲\cos\frac{\pi}{۸}}}$ کدام است؟

۱) $۲\sin\frac{\pi}{۳۲}$ ۲) $۲\cos\frac{\pi}{۳۲}$ ۳) $\sin\frac{\pi}{۳۲}$ ۴) $\cos\frac{\pi}{۳۲}$

-۵۷۴ مقدار $\sin^۴\frac{\pi}{۱۲} + \cos^۴\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

-۵۷۵ مقدار $\tan^۲\frac{\pi}{۸} + \cot^۲\frac{\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

-۵۷۶ اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\tan x = \frac{۴}{۳}$، مقدار $\tan^۲\frac{x}{۲} - \cot^۲\frac{x}{۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۱}{۴}$

-۵۷۷ حاصل $\frac{\cos ۲۰^\circ}{\sqrt{۲}\cos ۱۰^\circ + ۱} + ۱$ چند برابر $\sin ۸۰^\circ$ است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

-۵۷۸ اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - (m+۳)x + ۲m - ۱ = ۰$ باشند، مقدار $\sin ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

-۵۷۹ اگر $\tan^۲ x + \cot^۲ x = ۵$، مقدار $\sin^۲ ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

-۵۸۰ ساده شدهٔ عبارت $\frac{۱+\sin ۴۰^\circ - \cos ۴۰^\circ}{۱+\sin ۴۰^\circ + \cos ۴۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan ۲۰^\circ$ ۲) $\cot ۲۰^\circ$ ۳) $\tan ۴۰^\circ$ ۴) $\cot ۴۰^\circ$

سؤال	گام
۵۷۱	۹۵ ۹۷ ۱۰۱
۵۷۲	۷۵ ۹۹
۵۷۳	۷۵ ۹۹
۵۷۴	۱۰۳
۵۷۵	۹۷ ۱۰۱ ۲۷۵
۵۷۶	۷۵ ۱۰۱ ۲۷۶
۵۷۷	۹۴ ۹۷ ۲۷۶
۵۷۸	۸۲ ۹۷ ۱۰۳ ۲۹۶
۵۷۹	۹۷ ۱۰۱ ۲۷۵
۵۸۰	۸۲ ۹۷

درس هشتم: تانژانت مجموع دو زاویه

تانژانت مجموع دو زاویه

به کمک روابط مربوط به سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه می‌توانیم تانژانت مجموع دو زاویه را بر حسب تانژانت‌های این دو زاویه حساب کنیم (البته، به شرطی که تانژانت‌ها معنی داشته باشند). در حقیقت،

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

اگر صورت و مخرج کسر آخر را بر $\cos\alpha\cos\beta$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

اگر در این تساوی به جای β قرار دهیم $-\beta$، چون $\tan(-\beta)=-\tan\beta$، نتیجه می‌شود $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

نکته

اگر α و β دو زاویه باشند، آن‌گاه (به شرطی که عبارت‌ها بامعنی باشند)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

تست ۱ **اگر $\tan\alpha=\frac{1}{3}$ و $\tan\beta=-\frac{1}{2}$، مقدار $\tan(\alpha-\beta)$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{6}{7}$ ۴) $\frac{7}{6}$

راه‌حل با توجه به تساوی $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$، مقدار $\tan(\alpha-\beta)$ را به‌دست می‌آوریم $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{1}{3}-(-\frac{1}{2})}{1+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$.

تست ۲ **اگر $\tan a=\frac{1}{3}$ و $\tan b=\frac{1}{2}$، مقدار $a+b$ برابر کدام می‌تواند باشد؟**

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{7\pi}{4}$ ۴) $\frac{11\pi}{4}$

راه‌حل توجه کنید که

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1$$

بنابراین $a+b$ می‌تواند برابر $\frac{5\pi}{4}$ باشد، تانژانت بقیهٔ گزینه‌ها برابر -1 است.

تست ۳ **اگر $\tan(a-\frac{b}{2})=2$ و $\tan(a+\frac{b}{2})=3$، مقدار $\cot b$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

راه‌حل فرض کنید $\alpha=a-\frac{b}{2}$ و $\beta=a+\frac{b}{2}$. در این صورت $b=\beta-\alpha$ و در نتیجه

$$\tan b=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-2}{1+3\times2}=\frac{1}{7}\Rightarrow\cot b=7$$

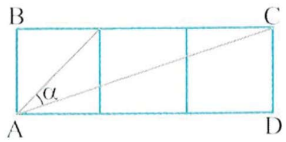
تست ۴ اگر $\tan(x+\frac{\pi}{6})=3$، مقدار $\tan(x-\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $-\frac{1}{2}$

راه‌حل توجه کنید که $x-\frac{\pi}{12}=(x+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{4}$. بنابراین

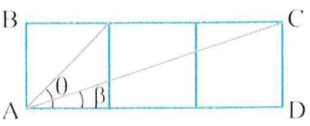
$$\tan(x-\frac{\pi}{12})=\tan((x+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan(x+\frac{\pi}{6})-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan(x+\frac{\pi}{6})\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{3-1}{1+3\times1}=\frac{1}{2}.$$

تست ۵ شکل مقابل از سه مربع به طول ضلع ۱ درست شده است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

راه‌حل توجه کنید با نمادگذاری شکل مقابل $\alpha=\theta-\beta$، $\tan\beta=\frac{1}{3}$ و $\tan\theta=1$. پس



$$\tan\alpha=\tan(\theta-\beta)=\frac{\tan\theta-\tan\beta}{1+\tan\theta\tan\beta}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

تست ۶ حاصل عبارت $A=\tan10^\circ+\tan35^\circ+\tan10^\circ\tan35^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

راه‌حل چون عبارت‌های $\tan\alpha+\tan\beta$ و $\tan\alpha\tan\beta$ در عبارت A وجود دارند. از بسط $\tan(\alpha+\beta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\xrightarrow[\beta=35^\circ]{\alpha=10^\circ}\tan45^\circ=\frac{\tan10^\circ+\tan35^\circ}{1-\tan10^\circ\tan35^\circ}$$

$$1=\frac{\tan10^\circ+\tan35^\circ}{1-\tan10^\circ\tan35^\circ}\Rightarrow1-\tan10^\circ\tan35^\circ=\tan10^\circ+\tan35^\circ\Rightarrow1=\tan10^\circ+\tan35^\circ+\tan10^\circ\tan35^\circ$$

بنابراین $A=1$.

تست ۷ مقدار عبارت $A=(1+\cot72^\circ)(1-\tan153^\circ)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که

$$A=(1+\cot(90^\circ-18^\circ))(1-\tan(180^\circ-27^\circ))=(1+\tan18^\circ)(1+\tan27^\circ)=1+\tan18^\circ+\tan27^\circ+\tan18^\circ\tan27^\circ$$

از طرف دیگر، $\tan45^\circ=\tan(18^\circ+27^\circ)=\frac{\tan18^\circ+\tan27^\circ}{1-\tan18^\circ\tan27^\circ}=1\Rightarrow\tan18^\circ+\tan27^\circ=1-\tan18^\circ\tan27^\circ$

پس $\tan18^\circ+\tan27^\circ+\tan18^\circ\tan27^\circ=1$. بنابراین $A=1+1=2$.

اگر در رابطه $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ قرار دهیم $\alpha=\beta$، به‌دست می‌آید $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

نکته

به شرطی که تانژانت‌ها بامعنی باشند، $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

تست ۸ اگر $\sin x-۲\cos x=۰$، مقدار $\tan ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\sin x-۲\cos x=۰\Rightarrow \sin x=۲\cos x\Rightarrow \tan x=۲$

بنابراین $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\frac{۲\times ۲}{۱-۴}=-\frac{۴}{۳}$.

تست ۹ اگر $\cos x=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم باشد، مقدار $\tan ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

راه‌حل مقدار $\tan x$ را حساب می‌کنیم: $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}\Rightarrow ۱+\tan^۲ x=۵\Rightarrow \tan^۲ x=۴\Rightarrow \tan x=\pm ۲$

در نتیجه، چون انتهای کمان x در ربع چهارم است، پس $\tan x=-۲$. بنابراین $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\frac{۲(-۲)}{۱-(-۲)^۲}=\frac{۴}{۳}$.

تست ۱۰ اگر α زاویه‌ای حاده باشد و $\tan ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$ و چون $\tan ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$، پس

$$\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۸\tan\alpha=۳-۳\tan^۲\alpha\Rightarrow ۳\tan^۲\alpha+۸\tan\alpha-۳=۰\Rightarrow (۳\tan\alpha-۱)(\tan\alpha+۳)=۰$$

$$\tan\alpha=\frac{۱}{۳},\ \tan\alpha=-۳\xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}}\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$$

به این ترتیب $\cot\alpha=۳$ و $\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۱+\cot^۲\alpha}=\frac{۱}{۱+۹}=\frac{۱}{۱۰}$. چون α حاده است، پس $\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$.

اگر در رابطهٔ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$ قرار دهیم $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ و $\beta=x$، چون $\tan\frac{\pi}{۴}=۱$، نتیجه می‌شود

$$\tan(\frac{\pi}{۴}+x)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan x}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}\tan x}=\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $-x$، به‌دست می‌آید $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$.

نکته به شرطی که تانژانت‌ها بامعنی باشند،

$$\tan(\frac{\pi}{۴}+x)=\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x},\quad \tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$$

تست ۱۱ حاصل عبارت $B=\frac{\cot ۷۵^\circ+۱}{\cot ۷۵^\circ-۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\cot ۷۵^\circ=\tan ۱۵^\circ$. چون $\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$، پس

$$B=-\frac{۱+\tan ۱۵^\circ}{۱-\tan ۱۵^\circ}=-\tan(۴۵^\circ+۱۵^\circ)=-\tan ۶۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

دست‌گرمی

۹۸- اگر $\tan(\frac{\pi}{۴}+x)=۷$ و x زاویهٔ حاده باشد، مقدار $\sin x$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۹۹- مقدار $\tan ۲۸۵^\circ$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $-۲-\sqrt{۳}$ ۳) $۱-\sqrt{۳}$ ۴) $-۱-\sqrt{۳}$

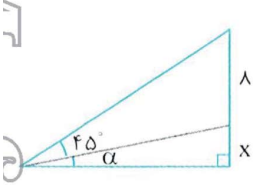
۱۰۰- اگر $\tan(a-b)=-۴$ و $\tan(a+b)=۳$، مقدار $\cot ۲b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۷}$ ۲) $-\frac{۷}{۱۱}$ ۳) $-\frac{۱}{۱۳}$ ۴) -۱۳

۱۰۱- اگر $\cot(\alpha+۳۵^\circ)=۲$، مقدار $\tan(۱۰^\circ-\alpha)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۰۲- در شکل مقابل $\tan\alpha=\frac{۱}{۲}$، مقدار x کدام است؟



۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۱/۶
۴) ۲/۵

آزمون ۵۹ تانژانت مجموع دو زاویه (۱)

۵۸۱- مقدار $\tan\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $۳-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۳+\sqrt{۲}}{۴}$

۵۸۲- اگر $\tan\alpha=\frac{۱}{۲}$ و $\tan\beta=\frac{۱}{۴}$، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۶}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۵۸۳- اگر $\tan\alpha=m$، $\tan\beta=\frac{۲}{m}$ و $\tan(\alpha+\beta)=۳-\frac{۲}{m}$، مقدار $\tan(\alpha-\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{-۷}{۹}$ ۴) $\frac{-۵}{۹}$

۵۸۴- اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۵x-۲=۰$ باشند، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۵

۵۸۵- حاصل عبارت $A=\frac{۱+\tan ۷۵^\circ}{۱-\tan ۷۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۵۸۶- اگر $\tan(۵^\circ+\alpha)=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\tan(۵۰^\circ+\alpha)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

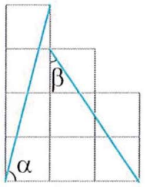
۵۸۷- مقدار $(۱+\tan ۲۵^\circ)(۱+\tan ۲۰^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸۸- در مثلث ABC، $\cot\hat{A}=۳$ و $\cot\hat{B}=\frac{۱}{۲}$. مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) -۷

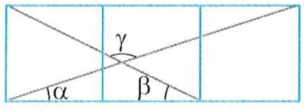
۵۸۹- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌ها برابر یک واحد است. مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۴}{۱۱}$ ۲) $\frac{-۱۴}{۵}$

۳) $\frac{۱۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{-۱۳}{۵}$

۵۹۰- شکل مقابل از سه مربع به طول ضلع ۱ درست شده است. اندازهٔ γ کدام است؟



۱) ۱۰۵° ۲) ۱۲۰°

۳) ۱۳۵° ۴) ۱۵۰°

سؤال
۵۸۱
۵۸۲
۵۸۳
۵۸۴
۵۸۵
۵۸۶
۵۸۷
۵۸۸
۵۸۹
۵۹۰

آزمون ۶۰ تانژانت مجموع دو زاویه (۲)

۵۹۱- مقدار $\tan ۱۰۵^\circ$ کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $-۲-\sqrt{۳}$ ۳) $۱-\sqrt{۳}$ ۴) $-۱-\sqrt{۳}$

۵۹۲- اگر $\tan\alpha=۲$ و $\tan(\alpha-\beta)=۳$، مقدار $\tan\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $-\frac{۱}{۷}$

۵۹۳- اگر $\tan(x-\frac{\pi}{۴})=۴$، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۵۹۴- اگر $\cot\alpha$ و $\cot\beta$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۶x-۲=۰$ باشند، مقدار $\cot(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۹۵- مقدار $\frac{\tan ۵^\circ-\cot ۵^\circ}{۱+\tan ۵^\circ\cot ۵^\circ}$ برابر کدام است؟

۱) $\tan ۱۰^\circ$ ۲) $\tan ۲۰^\circ$ ۳) $\cot ۱۰^\circ$ ۴) $\cot ۴۰^\circ$

۵۹۶- اگر $\tan\alpha\tan\beta=\frac{-۱}{۳}$ و $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۴}$، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟ (α زاویهٔ حاده‌ای است.)

۱) $\frac{۲+\sqrt{۷}}{۳}$ ۲) $\frac{۳-\sqrt{۷}}{۲}$ ۳) $\frac{۲+\sqrt{۷}}{۶}$ ۴) $\frac{۳-\sqrt{۷}}{۴}$

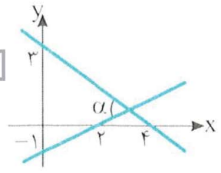
۵۹۷- اگر $\alpha+\beta=\frac{۳\pi}{۴}$، مقدار عبارت $A=(۱-\tan\alpha)(۱-\tan\beta)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۵۹۸- اگر $۲x+۳y=۹۰^\circ$، $\tan x=۲$ و $\tan y=۳$، مقدار $\tan(۵x+۷y)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۶}$

۵۹۹- در شکل مقابل مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶۰۰- اگر $\tan x-\cot x=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\tan ۴x$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $-\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۹}{۷}$

سؤال	گام
۵۹۱	۱۰۵
۵۹۲	۱۰۴
۵۹۳	۱۰۵
۵۹۴	۱۰۴ ۲۹۶
۵۹۵	۹۴ ۱۰۴
۵۹۶	۱۰۴
۵۹۷	۱۰۴
۵۹۸	۹۲ ۱۰۴
۵۹۹	۱۰۴
۶۰۰	۱۰۱ ۱۰۴

آزمون ۶۱

تانژانت مجموع دو زاویه (۳)

۶۰۱- مقدار $\tan\frac{5\pi}{12}$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $3+\sqrt{2}$ ۳) $2+\sqrt{2}$ ۴) $3+\sqrt{3}$

۶۰۲- اگر $\tan a-\tan b=2$ و $\cot a\cot b=3$، مقدار $\cot(a-b)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{3}{2}$

۶۰۳- اگر $\cos x=\frac{3}{5}$ و x زاویه‌ای حاده باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4}+x)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) -7 ۳) $\frac{1}{7}$ ۴) $-\frac{1}{7}$

۶۰۴- اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{2}<y<\pi$، $\sin x=\frac{3}{5}$ و $\sin y=\frac{5}{13}$، مقدار $\tan(x+y)$ کدام است؟

۱) $\frac{23}{63}$ ۲) $\frac{20}{63}$ ۳) $\frac{17}{63}$ ۴) $\frac{16}{63}$

۶۰۵- اگر $\tan(x+\frac{\pi}{4})=2$، مقدار $\tan(x+\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

۱) $\frac{6-5\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{6+5\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{6+5\sqrt{3}}{13}$ ۴) $\frac{6-5\sqrt{3}}{13}$

۶۰۶- اگر $\alpha-\beta=\frac{7\pi}{4}$ و $\tan\alpha\tan\beta=-6$، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) ۲ یا -3 ۲) -2 یا ۳ ۳) ۲ یا ۳ ۴) ۱ یا ۴

۶۰۷- حاصل $\tan 25^\circ\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

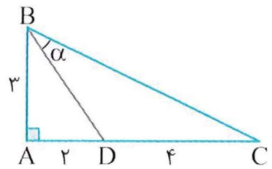
۶۰۸- اگر $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$ و $\tan\alpha\tan\beta=-3$، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۶۰۹- اگر $\tan\alpha=3$ و $\tan(\alpha+\beta)=-1$، مقدار $\tan 2\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۶۱۰- در شکل مقابل مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

سؤال
۶۰۱
۶۰۲
۶۰۳
۶۰۴
۶۰۵
۶۰۶
۶۰۷
۶۰۸
۶۰۹
۶۱۰

آزمون ۶۲ تانژانت مجموع دو زاویه (۴)

۶۱۱- کدام یک برابر $\cot(\alpha+\beta)$ است؟

۱) $\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}$ ۲) $\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$ ۳) $\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha-\cot\beta}$ ۴) $\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\alpha+\cot\beta}$

۶۱۲- اگر $\cot a-\cot b=2$ و $\tan a\tan b=3$، مقدار $\tan(a-b)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۶۱۳- اگر $\tan(\alpha+\beta)=-2$ و $\tan(\alpha-\beta)=3$، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{5}{7}$ ۳) $\frac{-1}{7}$ ۴) $\frac{-5}{7}$

۶۱۴- مقدار $\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})+\tan(x-\frac{\pi}{4})}{\cot(x+\frac{\pi}{4})+\cot(x-\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -2 ۴) -1

۶۱۵- اگر $\tan(\alpha+\frac{5\pi}{36})=\frac{1}{2}$، مقدار $\tan(\frac{\pi}{9}-\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۶۱۶- مقدار $\tan 40^\circ+2\tan 10^\circ$ کدام است؟

۱) $\tan 50^\circ$ ۲) $2\tan 50^\circ$ ۳) $\frac{\tan 50^\circ}{2}$ ۴) $\frac{\tan 50^\circ}{3}$

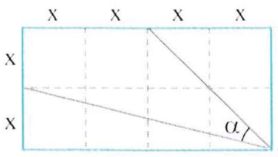
۶۱۷- مقدار $\tan 20^\circ\tan 80^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ-\tan 80^\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۶۱۸- اگر $\frac{1}{2}\le\tan\alpha<1$، حداقل مقدار $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

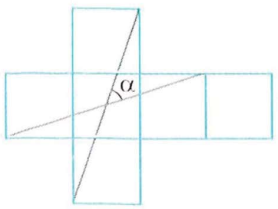
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۱۹- در شکل مقابل مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{4}$

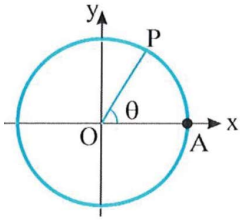
۶۲۰- شکل مقابل از شش مربع به طول ضلع ۱ درست شده است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

سؤال	گام
۶۱۱	۱۰۴
۶۱۲	۱۰۴
۶۱۳	۱۰۴
۶۱۴	۱۰۵
۶۱۵	۱۰۵
۶۱۶	۱۰۴
۶۱۷	۱۰۴
۶۱۸	۱۰۵
۶۱۹	۱۰۴
۶۲۰	۹۴ ۱۰۴

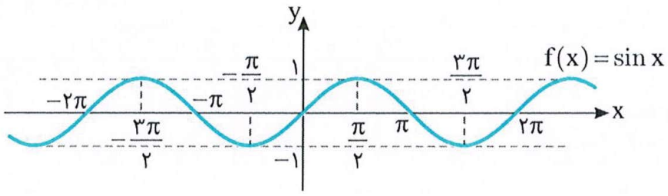
درس نهم: توابع مثلثاتی



فرض کنید در دایرهٔ مثلثاتی شعاع OA را به اندازهٔ θ رادیان دوران دهیم. در این صورت، مسافتی را که نقطهٔ A روی دایره طی کرده است (طول $\overset{\frown}{AP}$) با در نظر گرفتن علامت θ با x نشان می‌دهیم، یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد، x را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد، x را منفی می‌گیریم. در این صورت $x=\theta$، که در این‌جا x عددی حقیقی است (معلوم است که اگر $\theta=0$، آن‌گاه $x=0$). به این ترتیب می‌توانیم سینوس عدد حقیقی x را برابر با $\sin\theta$ تعریف کنیم. به همین ترتیب می‌توانیم کسینوس عدد حقیقی x را برابر با $\cos\theta$ تعریف کنیم. به تابعی که به عدد حقیقی x سینوس آن را نسبت می‌دهد **تابع سینوس** و به تابعی که به عدد حقیقی x کسینوس آن را نسبت می‌دهد **تابع کسینوس** می‌گویند. این تابع‌ها را به ترتیب با sin و cos نشان می‌دهیم. توجه کنید که دامنهٔ این تابع‌ها مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

ویژگی‌های تابع سینوس

نمودار تابع سینوس در شکل زیر رسم شده است.



۱) از روی نمودار معلوم است که $R_f=[-1,1]$.

۲) صفرهای تابع f نقطه‌های با طول $x=k\pi$ هستند، که در این‌جا k هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

۳) کمترین مقدار تابع f برابر با -1 است که در نقطه‌های با طول $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ پیش می‌آید ($k\in\mathbb{Z}$).

۴) بیشترین مقدار تابع f برابر با ۱ است که در نقطه‌های با طول $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ پیش می‌آید ($k\in\mathbb{Z}$).

۵) از روی نمودار معلوم است که تابع f غیریکنواست، ولی روی هر بازه به‌صورت $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و روی هر بازه به صورت $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است ($k\in\mathbb{Z}$).

تست ۱ **اگر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=2a-b\sin x$ محور عرض‌ها را در نقطهٔ به عرض ۴ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{6}$ قطع کند، مقدار $a+b$ کدام است؟**

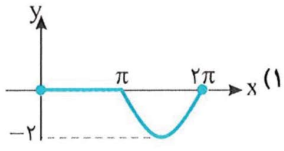
۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

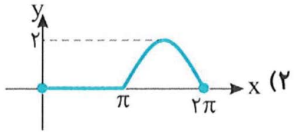
راه‌حل نمودار تابع از نقاط $(0,4)$ و $(\frac{\pi}{6},0)$ عبور می‌کند. پس

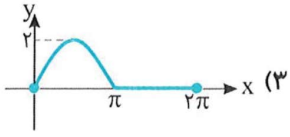
$$f(0)=4\Rightarrow 2a-b\sin 0=4\Rightarrow a=2\ ,\quad f(\frac{\pi}{6})=0\Rightarrow 2a-b\sin\frac{\pi}{6}=0\Rightarrow 2a-\frac{b}{2}=0\Rightarrow b=4a=8$$

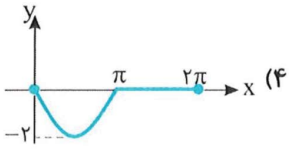
بنابراین $a+b=10$.

تست ۲ **نمودار تابع $f(x)=\sin x+|\sin x|$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟**

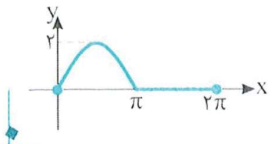
۱) 

۲) 

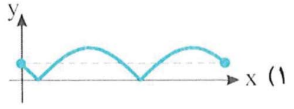
۳) 

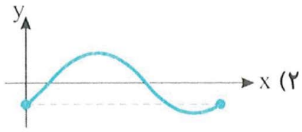
۴) 

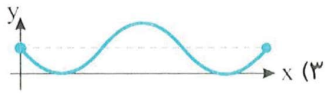
راه‌حل توجه کنید که اگر $\pi \le x \le 2\pi$، آن‌گاه $\sin x \le 0$، پس $f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$. از طرف دیگر، اگر $0 \le x < \pi$، آن‌گاه $\sin x \ge 0$، در نتیجه $f(x)=\sin x-\sin x=0$. بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است.

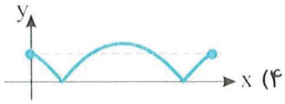


تست ۳ نمودار تابع $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

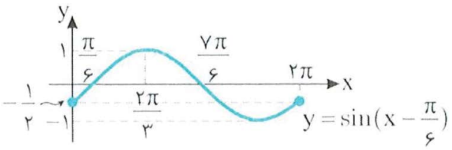
۱) 

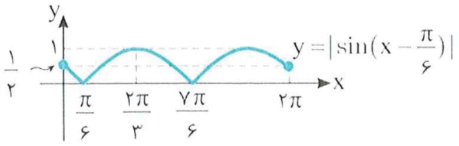
۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ به دست آید. سپس قرینهٔ قسمت‌هایی را که پایین محور x هاست، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که پایین محور x است، حذف می‌کنیم، تا نمودار تابع $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|$ به‌دست آید.



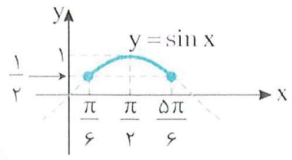


تست ۴ برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{\sin x+2}$ و دامنهٔ $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ کدام است؟

۱) $\left[\frac{1}{3},1\right]$ ۲) $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]$ ۳) $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ ۴) $\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right]$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع $y=\sin x$ معلوم می‌شود که

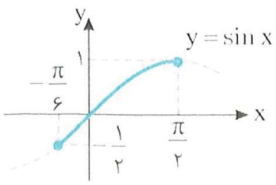
$$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin x \le 1 \Rightarrow \frac{5}{2} \le \sin x+2 \le 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{\sin x+2} \le \frac{2}{5} \Rightarrow R_f=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]$$



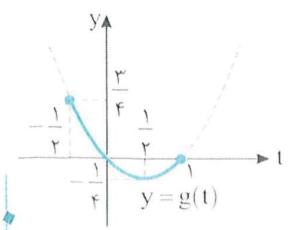
تست ۵ برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ و دامنهٔ $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $\left[-\frac{1}{4},0\right]$ ۳) $\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ ۴) $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

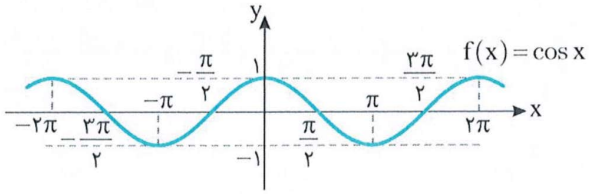
راه‌حل ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع $y=\sin x$ معلوم می‌شود که $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$ در نتیجه $-\frac{1}{2} \le \sin x \le 1$.



بنابراین اگر فرض کنیم $\sin x=t$، باید برد تابع $g(t)=t^2-t$ را با دامنهٔ $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ پیدا کنیم. از روی نمودار این تابع معلوم می‌شود که $R_g=\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.



نمودار تابع کسینوس در شکل زیر رسم شده است:



۱) از روی نمودار معلوم است که $R_f=[-1,1]$.

۲) صفرهای تابع f نقطه‌های با طول $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ هستند، که در این‌جا k هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

۳) کمترین مقدار تابع f برابر با -1 است که در نقطه‌های با طول $x=(2k+1)\pi$ پیش می‌آید ($k\in\mathbb{Z}$).

۴) بیشترین مقدار تابع f برابر با ۱ است که در نقطه‌های با طول $x=2k\pi$ پیش می‌آید ($k\in\mathbb{Z}$).

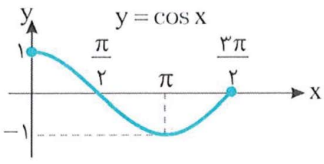
۵) از روی نمودار معلوم است که تابع f غیریکنواست، ولی روی هر بازه به صورت $[2k\pi-\pi\ ,\ 2k\pi]$ اکیداً صعودی و روی هر بازه به‌صورت $[2k\pi\ ,\ 2k\pi+\pi]$ اکیداً نزولی است ($k\in\mathbb{Z}$).

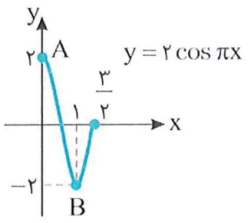
تست ۶ **اگر A و B به‌ترتیب نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=2\cos\pi x$ روی بازهٔ $[0,\frac{3}{2}]$ باشند، طول پاره‌خط AB کدام است؟**

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{17}$

راه‌حل اگر در نمودار تابع $y=\cos x$ روی بازهٔ $[0,\frac{3\pi}{2}]$ طول نقطه‌ها را بر π تقسیم کنیم و عرض نقطه‌ها را در ۲ ضرب کنیم، نمودار تابع f مانند شکل زیر به دست می‌آید. بنابراین A نقطهٔ $(0,2)$ و B نقطهٔ $(1,-2)$ است، پس

$$AB=\sqrt{(0-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{17}$$





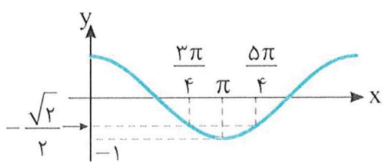
تست ۷ **اگر $\cos x=\frac{2m+1}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟**

۱) $[\frac{-2\sqrt{2}-1}{2},\frac{2\sqrt{2}-1}{2}]$ ۲) $[-\frac{5}{2},-\frac{2\sqrt{2}+1}{2})$ ۳) $[-\frac{5}{2},\frac{3}{2})$ ۴) $[-\frac{5}{2},\frac{2\sqrt{2}-1}{2})$

راه‌حل از روی نمودار تابع $y=\cos x$ در شکل زیر معلوم است که اگر $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$، آن‌گاه $-1\le\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$. بنابراین

$$-1\le\frac{2m+1}{4}<-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow-4\le2m+1<-2\sqrt{2}$$

$$-5\le2m<-2\sqrt{2}-1\Rightarrow-\frac{5}{2}\le m<-\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$$



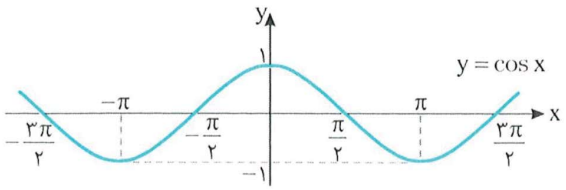
تست ۸

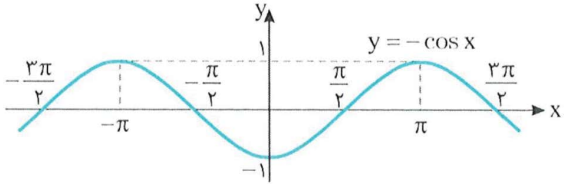
تابع $f(x)=-\cos 2x$ روی بازهٔ $[a,0]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

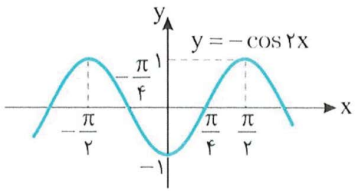
۱) $-\frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{3}$ ۳) $-\frac{\pi}{2}$ ۴) $-\pi$

راه‌حل

اگر نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-\cos x$ به‌دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=-\cos 2x$ به‌دست می‌آید (شکل‌ها را ببینید). تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},0]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{2}$ است.

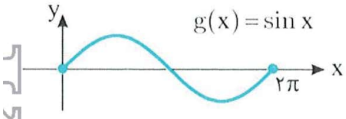




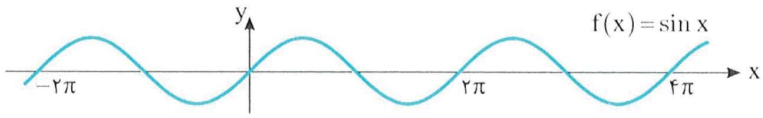


تابع متناوب

نمودار تابع $g(x)=\sin x$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$ به شکل مقابل است.



نمودار تابع $f(x)=\sin x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به شکل زیر است:



از روی این نمودار معلوم است که نمودار تابع f روی بازه‌های $[0,-2\pi]$، $[2\pi,0]$ و $[4\pi,2\pi]$ مانند هم است. در حقیقت، نمودار تابع f از تکرار نمودار تابع g به‌دست آمده است. اگر نمودار تابعی از تکرار قسمتی از آن به‌دست بیاید، می‌گوییم این تابع متناوب است. نمودار تابع f از تکرار نمودار تابع g به‌دست آمده و چون نمودار تابع g روی بازه‌ای به طول 2π رسم شده است، پس می‌گوییم دورهٔ تناوب تابع f برابر 2π است.

تعریف ۱۰۸

فرض کنید عددی حقیقی و غیر صفر مانند T وجود دارد که به‌ازای هر $x\in D_f$، $x\pm T\in D_f$ ۱) و $f(x\pm T)=f(x)$ ۲)

در این صورت می‌گوییم f تابعی متناوب است. کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که در شرایط فوق صدق می‌کند، دورهٔ تناوب تابع f می‌نامیم.

- تابع‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ متناوب‌اند و دورهٔ تناوب آن‌ها برابر 2π است، زیرا دامنهٔ آن‌ها $\mathbb{R}$ است و

$$\cos(x\pm 2\pi)=\cos x \quad , \quad \sin(x\pm 2\pi)=\sin x$$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع $y=a\sin(x+b)+c$ از روی نمودار تابع $y=\sin x$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

۱) عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ را a برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=a\sin x$ به‌دست بیاید.

۲) نمودار تابع $y=a\sin x$ را b واحد در راستای محور x انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=a\sin(x+b)$ به‌دست بیاید.

۳) نمودار تابع $y=a\sin(x+b)$ را c واحد در راستای محور y انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=a\sin(x+b)+c$ به‌دست بیاید.

معلوم است که در هیچ یک از این مراحل دورهٔ تناوب تابع عوض نمی‌شود. بنابراین دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin(x+b)+c$ هم برابر 2π است.

از طرف دیگر، برای رسم تابع $y=\sin kx$ ، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب می کنیم، پس نمودار تابع $y=\sin x$ در راستای محور x منقبض یا منبسط می‌شود، پس دورهٔ تناوب تابع $y=\sin kx$ نیز از ضرب کردن $\frac{1}{|k|}$ در دورهٔ تناوب تابع $y=\sin x$ به‌دست می‌آید (توجه کنید که چون دورهٔ تناوب تابع عددی مثبت است و k می‌تواند منفی باشد، برای k قدر مطلق گذاشته‌ایم).



$y=\sin kx \quad , \quad k<0$

$y=\sin kx \quad , \quad k>0$

به این ترتیب، در مورد توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ دورهٔ تناوب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

نکته ۱۰۹

اگر a ، b ، c و d عددهایی حقیقی باشند که $a,b\neq 0$ ، آن‌گاه تابع‌های $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ متناوب‌اند و دورهٔ تناوب آن‌ها برابر با $\frac{2\pi}{|b|}$ است. ماکزیمم مقدار این توابع برابر $|a|+d$ و مینیمم مقدار آن‌ها برابر $-|a|+d$ است.

تست ۹ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2\cos(1-2x)+5$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) $\frac{\pi}{4}$

راه‌حل دورهٔ تناوب تابع $y=a\cos(bx+c)+d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|-2|}=\pi$.

تست ۱۰ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=-3\sin\frac{\pi x}{4}$ دو برابر دورهٔ تناوب تابع $g(x)=2\cos(\frac{\pi}{4}-ax)$ است. مقدار a کدام است؟

۱) فقط $\frac{\pi}{2}$ ۲) فقط -2π ۳) $\pm\frac{\pi}{2}$ ۴) $\pm 2\pi$

راه‌حل می‌دانیم دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)$ و $y=a\cos(bx+c)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است. پس $T_g=\frac{2\pi}{|-a|}=\frac{2\pi}{|a|}$ ، $T_f=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|}=8$

بنابراین $T_f=2T_g\Rightarrow 8=\frac{4\pi}{|a|}\Rightarrow|a|=\frac{\pi}{2}\Rightarrow a=\pm\frac{\pi}{2}$

تست ۱۱ **اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2-a^2\sin ax$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، بیشترین مقدار تابع f کدام است؟**

۱) ۶۲ ۲) ۶۴ ۳) ۶۶ ۴) ۶۸

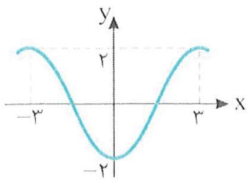
راه‌حل دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس $\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{4}$ در نتیجه $|a|=8$. اگر $\sin ax=-1$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع f اتفاق می‌افتد که برابر $2+a^2=66$ است.

تست ۱۲ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin^2 2x-\cos^2 2x$ کدام است؟

۱) 4π ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) 2π ۴) $\frac{\pi}{2}$

راه‌حل توجه کنید که $f(x)=-\cos 4x$ ، بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$.

تست ۱۳ بخشی از نمودار تابع $f(x)=a\cos bx$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام می‌تواند باشد؟



۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $-\frac{\pi}{۳}$

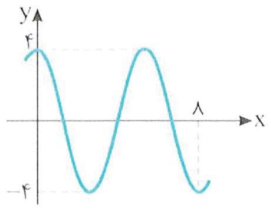
۳) $-\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $-\frac{\pi}{۶}$

راه‌حل با توجه به شکل $f(۰)=-۲$. پس $-۲=a\cos ۰$ در نتیجه $a=-۲$. از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع برابر ۶ است. پس

$$\frac{۲\pi}{|b|}=۶\Rightarrow|b|=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow b=\pm\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین مقدار ab می‌تواند $\frac{۲\pi}{۳}$ یا $-\frac{۲\pi}{۳}$ باشد.

تست ۱۴ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\sin((\frac{۵}{۲}+bx)\pi)$ به‌صورت مقابل است. مقدار ab کدام است؟ $(b>۰)$



۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

راه‌حل توجه کنید که

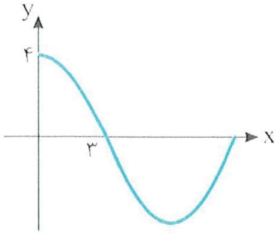
$$f(x)=a\sin(\pi bx+\frac{۵\pi}{۲})=a\cos\pi bx$$

از طرف دیگر، $f(۰)=۴$. پس $a\times۱=۴$. در نتیجه $a=۴$. همچنین، دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۴\cos\pi bx$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|\pi b|}=\frac{۲}{|b|}$. از روی نمودار معلوم می‌شود که ۱/۵ برابر دورهٔ تناوب تابع f برابر ۸ است. بنابراین

$$۱/۵T=۸\Rightarrow T=\frac{۱۶}{۳}\Rightarrow\frac{۱۶}{۳}=\frac{۲}{|b|}\Rightarrow|b|=\frac{۳}{۸}\Rightarrow b=\pm\frac{۳}{۸}$$

b باید مثبت باشد. در نتیجه مقدار ab برابر است با $\frac{۳}{۲}\times۴=\frac{۳}{۸}$.

تست ۱۵ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۴\cos\frac{\pi x}{a}+b$ به شکل مقابل است. دورهٔ تناوب تابع f کدام است؟ $(a>۰)$



۱) ۳ ۲) ۶

۳) ۹ ۴) ۱۲

راه‌حل با توجه به نمودار،

$$f(۰)=۴\Rightarrow۴+b=۴\Rightarrow b=۰,\quad f(۳)=۰\Rightarrow۴\cos\frac{۳\pi}{a}+۰=۰\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{a}=۰$$

کوچک‌ترین زاویهٔ مثبتی که کسینوس آن صفر می‌شود، زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است. پس $\frac{۳\pi}{a}=\frac{\pi}{۲}$ در نتیجه $a=۶$. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با

$$\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{a}|}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۶}}=۱۲$$

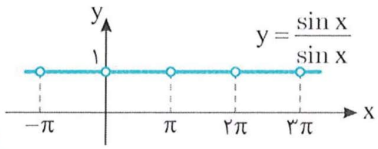
نکته

دورهٔ تناوب برخی تابع‌ها را می‌توان از روی نمودار آن‌ها پیدا کرد.

تست ۱۶ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) ۲π ۴) ۴π

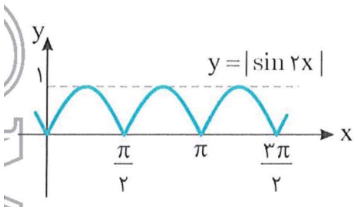
راه‌حل تابع f به‌ازای هر x که مضرب صحیح π باشد، تعریف نشده و به‌ازای بقیهٔ xهای حقیقی برابر تابع $y=۱$ است. بنابراین نمودار آن به شکل روبه‌رو است. واضح است که دورهٔ تناوب تابع f برابر π است.



تست ۱۷ دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\sin ۲x|$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

راه‌حل با توجه به نمودار تابع f، دورهٔ تناوب آن $\frac{\pi}{۲}$ است.



نکته

دورهٔ تناوب توابع $f(x)=|a\sin(bx+c)|$ و $g(x)=|a\cos(bx+c)|$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۸ اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\sin ۳x|$ با دورهٔ تناوب تابع $g(x)=|\cos\frac{ax}{۲}|$ برابر باشد، مقدار $|a|$ کدام است؟

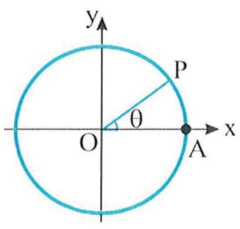
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{\pi}{۳}$ و دورهٔ تناوب تابع g برابر $\frac{\pi}{|\frac{a}{۲}|}$ است. بنابراین

$$\frac{\pi}{|\frac{a}{۲}|}=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow|\frac{a}{۲}|=۳\Rightarrow|a|=۶$$

تابع تانژانت

فرض کنید در دایرهٔ مثلثاتی شعاع OA را به اندازهٔ θ رادیان دوران دهیم. در این صورت مسافتی را که نقطهٔ A روی دایره طی کرده است (طول $\overset{\frown}{AP}$) با در نظر گرفتن علامت θ با x نمایش می‌دهیم، یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد، x را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد، x را منفی می‌گیریم. در این صورت $x=\theta$، که در اینجا x عددی حقیقی است (معلوم است که اگر $\theta=۰$، آن‌گاه $x=۰$). به این ترتیب می‌توانیم تانژانت عدد حقیقی x را که $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$، برابر تانژانت θ تعریف کنیم. اگر $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$، تانژانت x تعریف نمی‌شود.

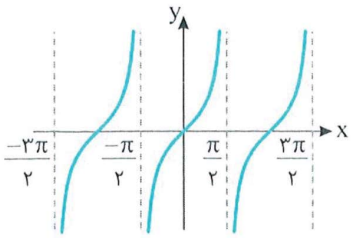


اگر x عددی حقیقی باشد و $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$، تابعی که به عدد x تانژانت آن را نسبت می‌دهد **تابع تانژانت** نامیده می‌شود. اگر $f(x)=\tan x$

آن‌گاه $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}\}$ ، $R_f=\mathbb{R}$

نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع تانژانت تابعی متناوب با دورهٔ تناوب π است و روی هر بازه به‌صورت $(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$ که $k\in\mathbb{Z}$، اکیداً صعودی است.

این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست.



نکته

اگر a، b، c و d عددهایی حقیقی باشند و $a,b\neq 0$، آن‌گاه دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\tan(bx+c)+d$ برابر با $\frac{\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۹

دامنهٔ تابع $f(x)=\tan\frac{\pi x}{4}$ کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 2k+1, k\in\mathbb{Z}\}$
۲) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 2k, k\in\mathbb{Z}\}$
۳) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 4k+1, k\in\mathbb{Z}\}$
۴) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 4k+2, k\in\mathbb{Z}\}$

راه‌حل

هر x که در تساوی $\frac{\pi x}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=4k+2,\ k\in\mathbb{Z}$ صدق نکند، در دامنهٔ این تابع قرار دارد:

بنابراین $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 4k+2, k\in\mathbb{Z}\}$.

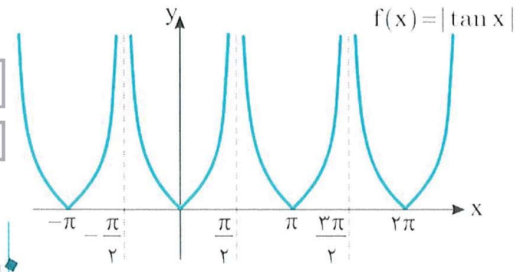
تست ۲۰

دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\tan x|$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$
۲) π
۳) 2π
۴) $\frac{3\pi}{2}$

راه‌حل

برای اینکه نمودار تابع $f(x)=|\tan x|$ را رسم کنیم، قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار تابع $y=\tan x$ را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است، حذف می‌کنیم. از روی این نمودار معلوم است که دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\tan x|$ برابر π است.



تست ۲۱

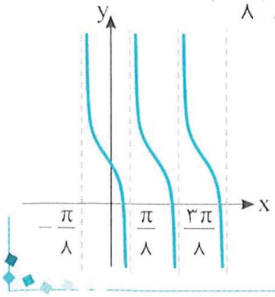
تابع $f(x)=1-\tan 4x$ روی کدام‌یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$
۲) $(0, \frac{\pi}{4})$
۳) $(-\frac{\pi}{4}, 0)$
۴) $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$

راه‌حل

تابع $f(x)=1-\tan 4x$ روی بازه‌های به‌صورت $(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8})$ که $k\in\mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین

تابع f روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



تست ۲۲

اگر $-\frac{\pi}{8}<x<\frac{\pi}{8}$ و $\tan 2x=\frac{2m+3}{4}$، حدود m کدام است؟

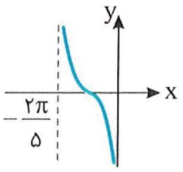
۱) $-\frac{7}{2}<m<-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}<m<\frac{7}{2}$
۳) $-\frac{7}{2}<m<\frac{1}{2}$
۴) $-\frac{1}{2}<m<\frac{7}{2}$

راه‌حل

توجه کنید که $-\frac{\pi}{4}<2x<\frac{\pi}{4}$ و تابع تانژانت روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است. پس

$$-\frac{\pi}{4}<2x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan(-\frac{\pi}{4})<\tan 2x<\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow -1<\tan 2x<1\Rightarrow -1<\frac{2m+3}{4}<1\Rightarrow -\frac{7}{2}<m<\frac{1}{2}$$

تست ۲۳ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\tan(ax+b)$ به‌صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) $-\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

راه‌حل توجه کنید که دورهٔ تناوب تابع f برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است. از روی نمودار مشخص است که دورهٔ تناوب تابع $\frac{2\pi}{5}$ است، پس

$$\frac{\pi}{|a|}=\frac{2\pi}{5}\Rightarrow|a|=\frac{5}{2}\Rightarrow a=\pm\frac{5}{2}$$

چون تابع f روی بازهٔ $(-\frac{2\pi}{5},0)$ نزولی است، پس a منفی است و جواب $a=\frac{5}{2}$ غیر قابل قبول است.

تست ۲۴ برد تابع $f(x)=1-\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ با دامنهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $(1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(-1,+\infty)$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

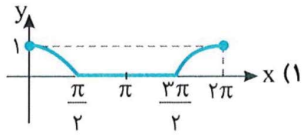
$$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi$$

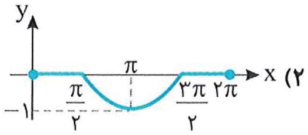
اکنون از روی نمودار تابع تانژانت و اکیداً صعودی بودن آن روی بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\pi)$ نتیجه می‌شود

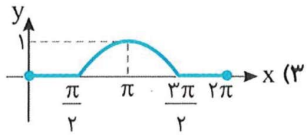
$$\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})<0\Rightarrow-\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})>0\Rightarrow1-\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})>1\Rightarrow f(x)>1\Rightarrow R_f=(1,+\infty)$$

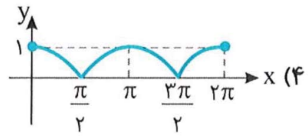
دست‌گرمی

۱۰۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{\cos x-|\cos x|}{2}$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۰۴- اگر $\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{3}$ و $\sin x=\frac{m-1}{4}$، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۵- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=-2\sin\frac{\pi x}{2}$ دو برابر دورهٔ تناوب تابع $g(x)=3\cos(\frac{\pi}{2}-ax)$ است. مقدار a کدام است؟

۱) π ۲) -2π ۳) $\pm\pi$ ۴) $\pm2\pi$

۱۰۶- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin^2 x+12$ چقدر است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۰۷- تابع $f(x)=-\tan 2x$ روی کدام‌یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

۱) $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ ۲) $(0,\frac{\pi}{2})$ ۳) $(-\frac{\pi}{2},0)$ ۴) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

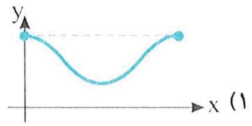
۱۰۸- اگر $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ و $\tan x=\frac{2m-3}{5}$، حدود m کدام است؟

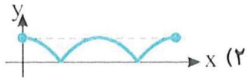
۱) $-4<m<1$ ۲) $-1<m<4$ ۳) $-1<m<2$ ۴) $-1<m<1$

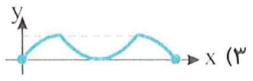
آزمون ۶۳ توابع مثلثاتی (۱)

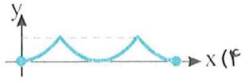
سؤال	گام
۶۲۱	۳۱ ۳۳ ۳۸ ۱۰۷
۶۲۲	۱۰۷
۶۲۳	۱۰۷
۶۲۴	۱۰۹
۶۲۵	۱۱۰
۶۲۶	۹۶ ۱۰۶
۶۲۷	۱۰۶ ۱۰۹
۶۲۸	۱۱۱
۶۲۹	۱۱۱
۶۳۰	۳۲ ۴۷ ۱۱۱

۶۲۱- نمودار تابع $y=۱-|\cos x|$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۲۲- نمودار تابع $f(x)=a\cos x-b$ از نقطهٔ $(\frac{\pi}{۴},\sqrt{۲}-۱)$ عبور می‌کند و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{۳}$ قطع می‌کند. حاصل ab کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۶۲۳- اگر $\cos x=\sqrt{۳}m$ و $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۵\pi}{۶}$، حدود m کدام است؟

۱) $۰<m<۱$ ۲) $۰<m<\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}<m<\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}<m<\frac{۱}{۲}$

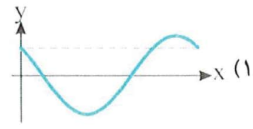
۶۲۴- اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=-۳\cos kx$ برابر $\frac{\pi}{۲k+۱}$ باشد، مقدار k کدام است؟

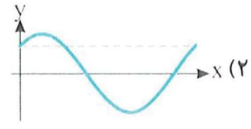
۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $-\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

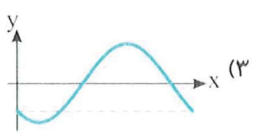
۶۲۵- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\cos ۴x|$ چقدر است؟

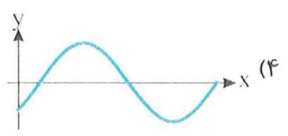
۱) ۲π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۶۲۶- نمودار تابع $y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x+\cos x)$ کدام است؟

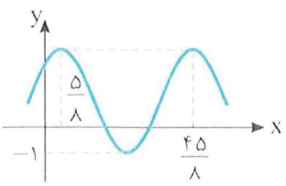
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۲۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+۲\sin(\frac{۲\pi}{b}x+\frac{\pi}{۴})$ به صورت مقابل است. مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) -۴ ۴) -۶

۶۲۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\tan\frac{\pi x}{۲}$ کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}|x\neq k\ ,k\in\mathbb{Z}\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}|x\neq ۲k\ ,k\in\mathbb{Z}\}$

۳) $\{x\in\mathbb{R}|x\neq ۲k+۱\ ,k\in\mathbb{Z}\}$ ۴) $\mathbb{Z}$

۶۲۹- اگر $-\frac{\pi}{۳}\leq x<\frac{\pi}{۲}$ و $\tan x=\frac{۲-m}{\sqrt{۳}}$، حداکثر مقدار m کدام است؟

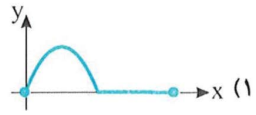
۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) صفر

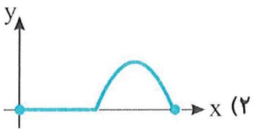
۶۳۰- تابع $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{۳})$ روی بازهٔ $(a\ ,\frac{۱۱\pi}{۶})$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

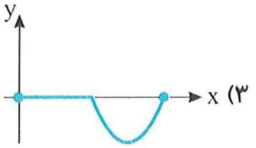
۱) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $-\frac{\pi}{۶}$

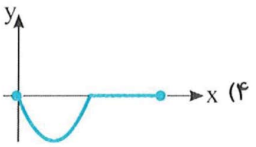
آزمون ۶۴ — توابع مثلثاتی (۲)

۶۳۱- نمودار تابع $f(x)=\sin x-|\sin x|$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

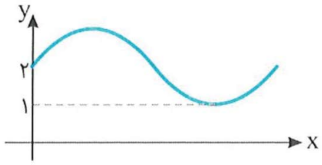
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۳۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=(a+b)\sin x+2a-b$ به شکل مقابل است. بیشترین مقدار تابع کدام است؟



۱) ۴

۲) ۳

۳) $\frac{7}{2}$

۴) $\frac{5}{2}$

۶۳۳- اگر $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$ و $\sin x=\frac{m+1}{2m}$، حدود m کدام است؟

۱) $m>\frac{1}{2}$

۲) $-\frac{3}{2}<m<-\frac{1}{2}$

۳) $m>-\frac{1}{2}$

۴) $m<-\frac{1}{2}$

۶۳۴- برد تابع $f(x)=\sin^2 x+3\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $[0,3]$

۲) $[0,4]$

۳) $[1,3]$

۴) $[1,4]$

۶۳۵- اگر کمترین مقدار تابع $f(x)=3a+a^2\cos ax$ برابر ۲ باشد، دورهٔ تناوب آن کدام است؟

۱) π یا 2π

۲) $\frac{\pi}{2}$ یا π

۳) 2π یا 4π

۴) $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$

۶۳۶- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos 4x+\cos^2 2x$ کدام است؟

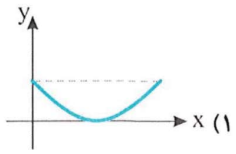
۱) $\frac{\pi}{2}$

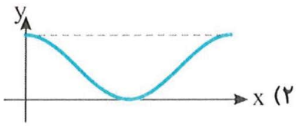
۲) π

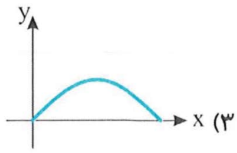
۳) 2π

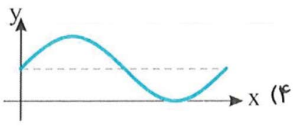
۴) $\frac{\pi}{4}$

۶۳۷- نمودار تابع $f(x)=2\sin^2(\frac{\pi+x}{2})$ در یک دورهٔ تناوب خود کدام است؟

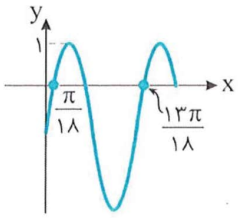
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۳۸- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+2\cos(\frac{\pi}{2}-bx)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۶۳۹- برد تابع f با دامنهٔ $[0,\frac{\pi}{4}]$ و ضابطهٔ $f(x)=\frac{3-\tan x}{2}$ کدام است؟

۱) $[\frac{3}{2},2]$

۲) $[0,1]$

۳) $[1,\frac{3}{2}]$

۴) $[1,2]$

۶۴۰- اگر $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})-\{\frac{\pi}{2}\}$ و $\tan x=\frac{m-1}{2}$، کدام‌یک درست است؟

۱) $m>3$

۲) $m>3$ یا $m<-1$

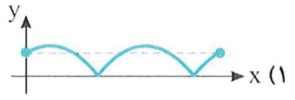
۳) $m>1$ یا $m<-3$

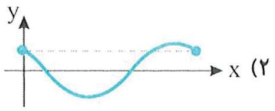
۴) $-1<m<3$

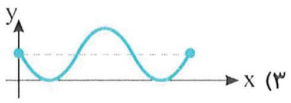
آزمون ۶۵ — توابع مثلثاتی (۳)

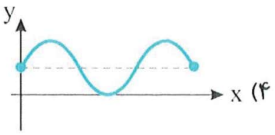
سؤال	گام
۶۴۱	۳۲، ۳۶، ۳۸، ۱۰۷
۶۴۲	۱۰۶، ۱۰۹
۶۴۳	۱۰۶
۶۴۴	۲۳، ۱۰۶، ۲۷۵
۶۴۵	۱۰۹
۶۴۶	۸۲، ۹۷، ۱۰۹
۶۴۷	۹۷، ۱۰۶، ۱۱۰
۶۴۸	۱۰۶، ۱۰۹
۶۴۹	۲۳، ۱۱۱
۶۵۰	۳۶، ۴۷، ۱۱۱

۶۴۱- نمودار تابع $f(x)=|\cos(2x-\frac{\pi}{4})|$ روی بازهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

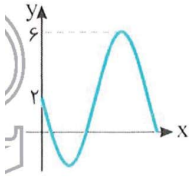
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۴۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a-2b\sin x$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟



۱) -4
۲) 4
۳) 2
۴) -2

۶۴۳- اگر $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$ و $\cos x=\frac{m^2+1}{4}$، کدام‌یک درست است؟

۱) $\frac{3}{2}<|m|\leq\sqrt{3}$
۲) $1<|m|\leq\sqrt{3}$
۳) $1<|m|\leq\frac{3}{2}$
۴) $0<|m|\leq\sqrt{3}$

۶۴۴- برد تابع $f(x)=\sin^4 x+2\sin^2 x$ کدام است؟

۱) $[0,3]$
۲) $[0,2]$
۳) $[0,4]$
۴) $[0,\frac{3}{2}]$

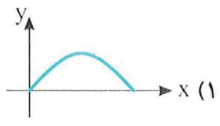
۶۴۵- اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|a|+b\cos a\pi x$ برابر ۴ و کمترین مقدار آن برابر -3 باشد، بیشترین مقدار آن کدام است؟

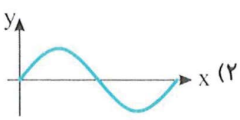
۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{9}{2}$
۴) ۴

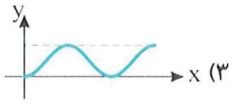
۶۴۶- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos^2 ax-\cos^4 ax$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است. مقدار a کدام است؟

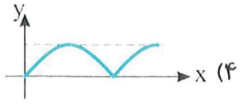
۱) ±1
۲) ±2
۳) ±3
۴) ±4

۶۴۷- نمودار تابع $f(x)=4|\sin x\cos x|$ در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

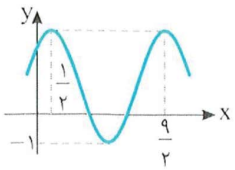
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۴۸- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=1+a\sin(\frac{\pi}{b}x+\frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۴
۲) -4
۳) ±4
۴) صفر

۶۴۹- برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=-\tan(\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{3})$ و دامنهٔ $[0,2]$ کدام است؟

۱) $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$
۲) $[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$
۳) $[-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$
۴) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

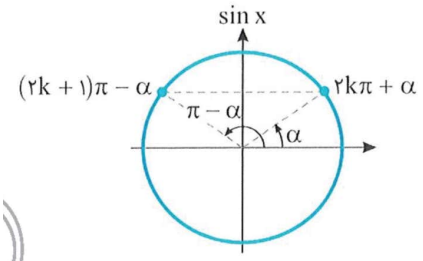
۶۵۰- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\tan\frac{\pi x}{4}$ و دامنهٔ $(2,a)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

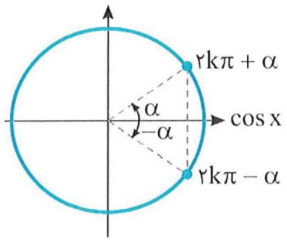
درس دهم: معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی ساده

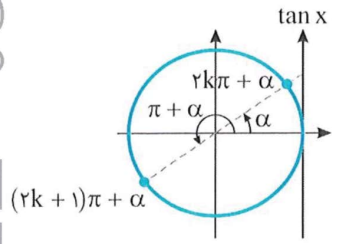
فرض کنید α زاویه‌ای حاده باشد. معادلهٔ مثلثاتی $\sin x=\sin\alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x=\alpha$ و $x=\pi-\alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادلهٔ مورد نظر جواب دیگری در بازهٔ $[0,2\pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k، $\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$، پس $x=2k\pi+\alpha$ نیز جواب است. همین طور $x=2k\pi+\pi-\alpha$، یعنی $x=(2k+1)\pi-\alpha$ نیز برای هر عدد صحیح k جواب این معادله است. این نتیجه در مورد هر زاویهٔ دلخواهی مانند α نیز درست است.



اکنون معادلهٔ مثلثاتی $\cos x=\cos\alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x=\alpha$ و $x=-\alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادلهٔ مورد نظر جواب دیگری در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k، $\cos(2k\pi\pm\alpha)=\cos\alpha$، پس $x=2k\pi+\alpha$ و $x=2k\pi-\alpha$ نیز جواب معادلهٔ مورد نظر هستند. این نتیجه در مورد هر زاویهٔ دلخواهی مانند α نیز درست است.



اکنون معادلهٔ $\tan x=\tan\alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x=\alpha$ و $x=\pi+\alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادلهٔ مورد نظر جواب دیگری در بازهٔ $[0,2\pi)$ ندارد. البته، چون اگر k عددی صحیح باشد، $\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha$، پس $x=k\pi+\alpha$ نیز جواب معادلهٔ مورد نظر است. این نتیجه در مورد هر زاویهٔ دلخواهی مانند α نیز درست است.



نکته

- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت مقابل هستند: $x=2k\pi+\alpha,\quad x=(2k+1)\pi-\alpha,\quad k\in\mathbb{Z}$
- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت مقابل هستند: $x=2k\pi\pm\alpha,\quad k\in\mathbb{Z}$
- جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan x=\tan\alpha$ به‌صورت مقابل هستند: $x=k\pi+\alpha,\quad k\in\mathbb{Z}$

مثال:

۱) $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

۲) $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

۳) $\tan x=\tan\frac{\pi}{8}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8},\quad k\in\mathbb{Z}$

تست ۱ جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x=\sin 5x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi,\frac{(2k+1)\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{3},\frac{(2k+1)\pi}{6}$ ۳) $\frac{2k\pi}{5},\frac{(2k+1)\pi}{5}$ ۴) $-\frac{k\pi}{2},\frac{2k+1}{6}\pi$

راه‌حل: توجه کنید که

$$\sin x=\sin 5x\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+5x\\x=(2k+1)\pi-5x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\x=\frac{2k+1}{6}\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

تست ۲ جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 4x=\cos x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $2k\pi$ ۲) $2k\pi+\frac{2\pi}{5}\,,\,2k\pi-\frac{2\pi}{5}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}\,,\,\frac{2k\pi}{5}$ ۴) $2k\pi-\frac{2\pi}{3}\,,\,2k\pi+\frac{2\pi}{3}$

راه‌حل معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 4x=\cos x\Rightarrow\begin{cases}4x=2k\pi+x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\,,\ k\in\mathbb{Z}\\ 4x=2k\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}\,,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

تست ۳ جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan 4x=\tan 2x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $2k\pi$ ۲) $k\pi$ ۳) $\frac{k\pi}{2}$ ۴) $\frac{k\pi}{4}$

راه‌حل توجه کنید که

$$\tan 4x=\tan 2x\Rightarrow 4x=k\pi+2x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

تذکر برای پیدا کردن جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی در یک بازه می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

۱) به ازای $k=0$ جواب را به دست می‌آوریم و اگر در بازهٔ مورد نظر بود، آن را قبول می‌کنیم.

۲) به ازای $k=1\,,\,k=2\,,\ldots$ جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازهٔ مورد نظر قرار داشته باشند.

۳) به ازای $k=-1\,,\,k=-2\,,\ldots$ جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازهٔ مورد نظر قرار داشته باشند.

تست ۴ معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{3})-\sin x=0$ چند جواب در بازهٔ $(0\,,2\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل معادله را به صورت $\sin(x+\frac{\pi}{3})=\sin x$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-x\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}\,,\ k\in\mathbb{Z}\quad(\text{غ.ق.ق.})\,.\quad x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+x\Rightarrow\frac{\pi}{3}=2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0\,,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)

پس معادله دو جواب در این بازه دارد.

نکته

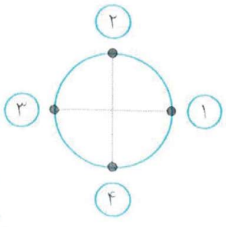
در معادلات مثلثاتی که نسبت مثلثاتی در مخرج وجود دارد، جواب‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند قابل قبول نیستند. توجه کنید که در معادلاتی که شامل تانژانت و کتانژانت هستند، نسبت مثلثاتی در مخرج وجود دارد.

تست ۵ جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan 3x=\tan x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $k\pi$ ۳) $2k\pi$ ۴) $2k\pi+\pi$

راه‌حل جواب‌های کلی معادله به‌صورت روبه‌رو به‌دست می‌آیند:

$$3x=k\pi+x\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$



توجه کنید که نقاط انتهایی کمان زاویه‌های متناظر $\frac{k\pi}{2}$ روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت مقابل هستند که چهار نقطه هستند و تانژانت زاویه‌هایی که نقاط انتهایی کمان متناظر آنها روی نقاط (۲) و (۴) قرار می‌گیرد تعریف شده نیست. این نقاط به‌صورت $k\pi+\frac{\pi}{2}$ هستند $(k\in\mathbb{Z})$. بنابراین جواب‌های معادله متناظر با نقاط (۱) و (۳) هستند که به‌صورت $x=k\pi$ هستند.

۱۱۴ **نکته**

گاهی ممکن است چند مجموعهٔ جواب کلی برای معادلهٔ مثلثاتی به دست بیاید که یکی از آن‌ها زیر مجموعهٔ دیگری باشد.

تست ۶ معادلهٔ $\cos 3x=\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۲

راه‌حل معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 3x=\cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+x \Rightarrow x=k\pi \ , k\in\mathbb{Z} \\ 3x=2k\pi-x \Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب $\frac{k\pi}{2}$ شامل مجموعهٔ جواب $k\pi$ نیز هست. پس جواب‌های معادله به صورت $x=\frac{k\pi}{2}\ , \ k\in\mathbb{Z}$ هستند که در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از $x=0$ ، $x=\frac{\pi}{2}$ ، $x=\pi$ ، $x=\frac{3\pi}{2}$ و $x=2\pi$.

۱۱۵ **نکته**

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توان با استفاده از روابط میان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم یا مکمل به معادله‌های سادهٔ مثلثاتی تبدیل کرد.

تست ۷ معادلهٔ $\cos 4x+\cos x=0$ چند جواب در بازهٔ $[0,\pi]$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos 4x=-\cos x \Rightarrow \cos 4x=\cos(\pi-x) \Rightarrow \begin{cases} 4x=2k\pi+\pi-x \Rightarrow x=\dfrac{(2k+1)\pi}{5} \ , k\in\mathbb{Z} \\ 4x=2k\pi-(\pi-x) \Rightarrow x=\dfrac{(2k-1)\pi}{3} \ , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف k جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱	۲
$\frac{(2k+1)\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	π

k	۱	۲
$\frac{(2k-1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π

با توجه به مشترک بودن $x=\pi$ در این جواب‌ها، معادله در بازهٔ $[0,\pi]$ چهار جواب دارد: $x=\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\pi,\frac{\pi}{3}$.

تست ۸ معادلهٔ $\cos 4x+\sin x=0$ چند جواب در بازهٔ $[0,\pi]$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos 4x=-\sin x \Rightarrow \cos 4x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}+x \Rightarrow x=(4k+1)\dfrac{\pi}{6} \ , \ k\in\mathbb{Z} \\ 4x=2k\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) \Rightarrow x=(4k-1)\dfrac{\pi}{10} \ , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف k جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱
$\frac{(4k+1)\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

k	۱	۲
$\frac{(4k-1)\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10}$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر چهار جواب در بازهٔ $[0,\pi]$ دارد.

تست ۹ جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan x=\cot 3x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

راه‌حل معادله را به‌صورت $\tan x=\tan(\frac{\pi}{2}-3x)$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}-3x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

نکته ۱۱۶

۱) برای حل کردن معادلهٔ $\sin x=m$ که $-1\le m\le 1$، کافی است زاویهٔ α را طوری پیدا کنیم که $\sin\alpha=m$، سپس جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ را پیدا می‌کنیم.

۲) برای حل کردن معادلهٔ $\cos x=m$ که $-1\le m\le 1$، کافی است زاویهٔ α را طوری پیدا کنیم که $\cos\alpha=m$، سپس جواب‌های معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ را پیدا می‌کنیم.

۳) برای حل کردن معادلهٔ $\tan x=m$، کافی است زاویهٔ α را طوری پیدا کنیم که $\tan\alpha=m$، سپس جواب‌های معادلهٔ $\tan x=\tan\alpha$ را پیدا می‌کنیم.

تست ۱۰ جواب‌های کلی معادلهٔ $\sqrt{2}\sin 2x-1=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi+\frac{5\pi}{8}, k\pi+\frac{\pi}{8}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{8}, k\pi-\frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi+\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi+\frac{3\pi}{8}, k\pi-\frac{\pi}{8}$

راه‌حل معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\sqrt{2}\sin 2x=1\Rightarrow\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sin 2x=\sin\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}\ ,\quad 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{3\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}$$

نکته ۱۱۷

برای پیدا کردن جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی در بازهٔ $[a,b]$ می‌توانیم پس از پیدا کردن جواب‌های کلی x، نامعادلهٔ $a\le x\le b$ را حل کنیم و مقادیر k را پیدا کنیم. در مورد بازه‌های دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

تست ۱۱ معادلهٔ $\cos(x-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ چند جواب در بازهٔ $[-\frac{5\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل ابتدا جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که $-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x-\frac{\pi}{3}=2k\pi\pm\frac{5\pi}{6},\quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌ها عبارت‌اند از

$$x=2k\pi-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}\ ,\quad x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{7\pi}{6},\quad k\in\mathbb{Z}$$

اکنون از این جواب‌ها، آن‌هایی را پیدا می‌کنیم که در بازهٔ $[-\frac{5\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ هستند. توجه کنید که

$$-\frac{5\pi}{2}\le 2k\pi-\frac{\pi}{2}\le\frac{3\pi}{2}\Rightarrow-2\pi\le 2k\pi\le 2\pi\Rightarrow-1\le k\le 1,\ k\in\mathbb{Z}$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $-2\pi-\frac{\pi}{2}$، $-\frac{\pi}{2}$ و $2\pi-\frac{\pi}{2}$.

همچنین، $-\frac{\Delta\pi}{۲}\le ۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\le\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow -\frac{۱۱\pi}{۳}\le ۲k\pi\le\frac{\pi}{۳}\Rightarrow -\frac{۱۱}{۶}\le k\le\frac{۱}{۶}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=-۱,۰$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $-۲\pi+\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{۷\pi}{۶}$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $[-\frac{\Delta\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ پنج جواب دارد.

تذکر واضح است که معادله‌های $\sin x=m$ و $\cos x=m$ به‌ازای m هایی که در بازهٔ $[-۱,۱]$ نیستند، جواب ندارند، ولی معادلهٔ $\tan x=m$ به ازای هر عدد حقیقی m جواب دارد.

تست ۱۲ **به‌ازای چه مقادیری از k معادلهٔ $۲\cos x+۳k=۱$ جواب دارد؟**

۱) $۰\le k\le\frac{۴}{۳}$ ۲) $-۱\le k\le ۱$ ۳) $-۱\le k\le\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}\le k\le ۱$

راه‌حل توجه کنید که $۲\cos x+۳k=۱$ در نتیجه $\cos x=\frac{۱-۳k}{۲}$ و چون $-۱\le\cos x\le ۱$، پس

$$-۱\le\frac{۱-۳k}{۲}\le ۱\Rightarrow -۲\le ۱-۳k\le ۲\Rightarrow -۳\le -۳k\le ۱\Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le k\le ۱$$

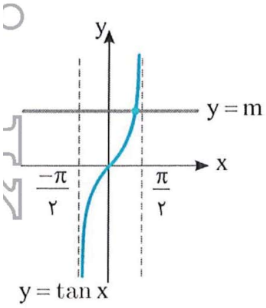
تست ۱۳ **معادلهٔ $\sin x=m\cos x$ چند جواب در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بستگی به مقدار m دارد.

راه‌حل معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin x=m\cos x\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=m\Rightarrow\tan x=m$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، به‌ازای هر مقدار m، معادله دقیقاً یک جواب دارد.



تست ۱۴ **معادلهٔ $\tan^۲ x+۴\tan x+k=۰$ جواب دارد. حدود k کدام است؟**

۱) $k\le ۴$ ۲) $۰<k\le ۴$ ۳) $-۴<k<۴$ ۴) $۰\le k\le ۴$

راه‌حل اگر فرض کنیم $t=\tan x$، آن‌گاه معادله به‌صورت $t^۲+۴t+k=۰$ درمی‌آید. شرط وجود جواب برای این معادله این است که

$$\Delta=۱۶-۴k\ge ۰\Rightarrow k\le ۴$$

از طرف دیگر اگر این معادلهٔ درجهٔ دوم جوابی مانند $t_۱$ داشته باشد، آن‌گاه معادلهٔ $\tan x=t_۱$ قطعاً جواب دارد، پس معادلهٔ اصلی هم جواب خواهد داشت. بنابراین تنها شرط جواب داشتن معادله، $k\le ۴$ است.

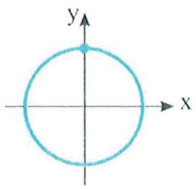
معادلات خاص مثلثاتی

در برخی معادلات مثلثاتی، جواب‌های کلی را می‌توان به‌صورت یک دسته جواب نوشت. مثلاً، معادلهٔ مثلثاتی $\sin x=۱$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که

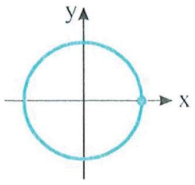
$$\sin x=۱=\sin\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z},\quad x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۲}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های کلی این معادله به‌صورت $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$, $k\in\mathbb{Z}$ هستند. جواب‌های کلی معادلات خاص را در نکتهٔ بعد آورده‌ایم.

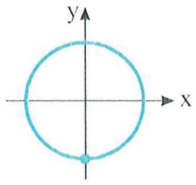
۱۱۹ **نکته** معادلات خاص مثلثاتی



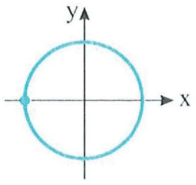
$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$



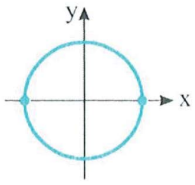
$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



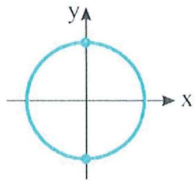
$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$



$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$



$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$



$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

تست ۱۵ جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x \cos 2x = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2k\pi$ ۴) $k\pi, k\pi - \frac{\pi}{4}$

راه‌حل توجه کنید که $\sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ، $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

تست ۱۶ نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازهٔ $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل جایی که نمودار محور x را قطع می‌کند، $y = 0$. پس

$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ عبارت‌اند از

k	0	1	2	-1	-2
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

۱۲۰ **نکته**

گاهی می‌توان چند مجموعهٔ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت یک مجموعهٔ جواب کلی نوشت.

مثال: مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $\sin\frac{x}{2}(\cos x + 1) = 0$ به‌صورت زیر است:

$\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ، $\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

چون مضارب زوج π و مضارب فرد π جواب‌های این معادله هستند، مجموعهٔ جواب‌های این معادله را می‌توان به‌صورت مضارب صحیح π نوشت، که می‌شود $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

تست ۱۷ جواب‌های کلی معادلهٔ $2\sin^2 x - 1 = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۲) $(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

راه‌حل **راه‌حل اول** توجه کنید که

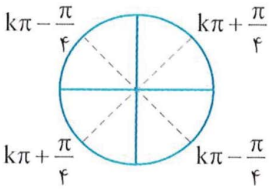
$$۲\sin^۲ x-۱=۰\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین

$$\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}\quad(۱),\qquad x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}\quad(۲)$$

همین‌طور،

$$\sin x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}\quad(۳),\qquad x=(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۴},k\in\mathbb{Z}\quad(۴)$$



اکنون توجه کنید که اجتماع جواب‌های (۱) و (۴) را می‌توان به‌صورت $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ نوشت. همین طور، اجتماع جواب‌های (۲) و (۳) به‌صورت $k\pi-\frac{\pi}{۴}$ است. بنابراین جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ است که می‌توان با توجه به شکل روبه‌رو آن‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ نوشت $(k\in\mathbb{Z})$.

راه‌حل دوم چون $\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x$، معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به صورت $\cos ۲x=۰$ نوشت، که مجموعهٔ جواب‌های آن به صورت زیر است:

$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

تست ۱۸ **جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos^۳ x-\cos x=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$**

۱) $k\pi$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

راه‌حل **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\cos^۳ x-\cos x=۰\Rightarrow \cos x(\cos^۲ x-۱)=۰\Rightarrow \cos x(\cos x-۱)(\cos x+۱)=۰$$

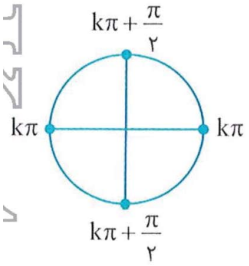
بنابراین

$$\cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z},\quad \cos x=۱\Rightarrow x=۲k\pi,k\in\mathbb{Z},\quad \cos x=-۱\Rightarrow x=(۲k+۱)\pi,k\in\mathbb{Z}$$

توجه کنید که اجتماع دو جواب آخر را می‌توان به‌صورت $k\pi$ نوشت $(k\in\mathbb{Z})$.

بنابراین جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر عبارت‌اند از

$$k\pi,\quad k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$



که با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان آن‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{۲}$ نوشت $(k\in\mathbb{Z})$.

راه‌حل دوم معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\cos x(\cos^۲ x-۱)=۰\Rightarrow -\cos x\sin^۲ x=۰$$

بنابراین

$$\cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,k\in\mathbb{Z},\qquad \sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

که مشابه راه‌حل اول می‌توان مجموعهٔ جواب‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{۲}$ نوشت $(k\in\mathbb{Z})$.

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توانیم با استفاده از اتحادها به معادله‌های سادهٔ مثلثاتی تبدیل و حل کنیم.

تست ۱۹ **معادلهٔ $۲\cos^۲ x=\cos x+۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

راه‌حل توجه کنید که

$$۲\cos^۲ x-\cos x-۱=۰\Rightarrow(\cos x-۱)(۲\cos x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\cos x=۱\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]}x=۰,۲\pi\\ \cos x=\frac{-۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[۰,۲\pi]}x=\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}\Rightarrow$$

معادلهٔ مورد نظر چهار جواب در بازهٔ $[۰\ ,۲\pi]$ دارد.

تست ۲۰ جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos^۲ x+\sin x-\frac{۱}{۴}=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $۲k\pi-\frac{\pi}{۶}, ۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi-\frac{\pi}{۶}, ۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi-\frac{۷\pi}{۶}, ۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x$. در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۱-\sin^۲x+\sin x-\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow\sin^۲x-\sin x-\frac{۳}{۴}=۰$$

$$(\sin x+\frac{۱}{۲})(\sin x-\frac{۳}{۲})=۰\Rightarrow\sin x=-\frac{۱}{۲}, \sin x=\frac{۳}{۲}(\text{غ.ق.ق})$$

از طرف دیگر، $\sin x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}, k\in\mathbb{Z}$ ، $x=(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}, k\in\mathbb{Z}$

تست ۲۱ جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin ۶x=۲\sin ۳x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{k\pi}{۳}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$. در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$۲\sin ۳x\cos ۳x=۲\sin ۳x\Rightarrow ۲\sin ۳x(\cos ۳x-۱)=۰$$

بنابراین $\sin ۳x=۰\Rightarrow ۳x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}, k\in\mathbb{Z}$ ، $\cos ۳x=۱\Rightarrow ۳x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}, k\in\mathbb{Z}$

توجه کنید که $\frac{۲k\pi}{۳}$ مضارب زوج $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{k\pi}{۳}$ همهٔ مضارب صحیح $\frac{\pi}{۳}$ هستند. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر $\frac{k\pi}{۳}$ است $(k\in\mathbb{Z})$.

تست ۲۲ جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos ۲x=۱+\sin x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۶}, k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$

۳) $k\pi, ۲k\pi-\frac{\pi}{۶}, (۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi-\frac{\pi}{۶}, ۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود $۱-۲\sin^۲ x=۱+\sin x\Rightarrow\sin x(۱+۲\sin x)=۰$

در نتیجه

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ ۱+۲\sin x=۰\Rightarrow\sin x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}, k\in\mathbb{Z}, \quad x=(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۶}, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

تست ۲۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sin ۵x\cos ۲x-\cos ۵x\sin ۲x=-\frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶})$ چند تاست؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

راه‌حل با استفاده از دستور سینوس تفاضل دو زاویه می‌توان معادلهٔ مورد نظر را به‌صورت روبه‌رو نوشت: $\sin(۵x-۲x)=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin ۳x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$

جواب‌های کلی این معادله به‌صورت زیر است:

$$۳x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۸}, k\in\mathbb{Z}, \quad ۳x=(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۸}, k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶})$ را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{۶}<\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۸}<\frac{۱۱\pi}{۶}\Rightarrow-\frac{۱}{۶}<k<\frac{۱۷}{۶}\Rightarrow k=۰, ۱, ۲$$

$$-\frac{\pi}{۶}<(۲k+۱)\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۸}<\frac{۱۱\pi}{۶}\Rightarrow-\frac{۵}{۶}<k<\frac{۱۳}{۶}\Rightarrow k=۰, ۱, ۲$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶})$ شش جواب دارد.

تست ۲۴ جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin(\frac{\pi}{6}+x)+\sin(\frac{\pi}{6}-x)=\frac{1}{2}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

راه‌حل اگر از دستورهای سینوس مجموع و تفاضل دو زاویه استفاده کنیم، معلوم می‌شود که

$$\sin(\frac{\pi}{6}+x)=\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{6}-x)=\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود $\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$

تست ۲۵ معادلهٔ $\sin^4 x-\sin x=\cos^4 x$ در بازهٔ $[-\pi,0]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\sin x\Rightarrow(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin x\Rightarrow-\cos 2x=\sin x\Rightarrow\cos 2x=\sin(-x)$$

$$\cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}+x)\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+x\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,0]$ عبارت‌اند از $x=-\frac{\pi}{6}$ و $x=-\frac{5\pi}{6}$. بنابراین معادله در بازهٔ $[-\pi,0]$ دو جواب دارد.

تست ۲۶ جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{k\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

راه‌حل معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-2(\sin x\cos x)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=\frac{-1}{2}\Rightarrow\frac{1-\cos 4x}{2}=1\Rightarrow\cos 4x=-1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت مقابل هستند: $4x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

تست ۲۷ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin x+\cos x=1$ که در بازهٔ $[0,2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

۱) 2π ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) 4π ۴) 5π

راه‌حل اول اگر طرفین معادله را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت روبه‌رو هستند: $x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi\ ,\quad x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

راه‌حل دوم طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به‌صورت روبه‌رو می‌نویسیم: $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1\Rightarrow 2\sin x\cos x=0$

بنابراین جواب‌هایی که در بازهٔ $[0,2\pi]$ قرار دارند، به‌صورت روبه‌رو هستند: $\sin x=0\Rightarrow x=0,\pi,2\pi\ ,\quad \cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

در نتیجه جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از ۰، 2π و $\frac{\pi}{2}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

توجه کنید که جواب‌های π و $\frac{۳\pi}{۲}$ قابل قبول نیستند. زیرا در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کنند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده‌اند. بنابراین مجموع جواب‌هایی که در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ قرار دارند برابر $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

راه‌حل سوم با استفاده از اتحادهای $\sin x=۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}$ و $۱-\cos x=۲\sin^۲\frac{x}{۲}$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x=۱-\cos x\Rightarrow ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}=۲\sin^۲\frac{x}{۲}\Rightarrow\sin\frac{x}{۲}(\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲})=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ قرار دارند، به‌صورت زیر هستند:

$$\sin\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}=۰\ ,\ \frac{x}{۲}=\pi\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲\pi\ ,\quad \cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}=۱\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

راه‌حل چهارم اگر از دستورهای $\sin x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$ و $\cos x=\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$ استفاده کنیم و فرض کنیم $\tan\frac{x}{۲}=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$\frac{۲t}{۱+t^۲}+\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}=۱\Rightarrow ۱+t^۲=۲t+۱-t^۲\Rightarrow ۲t^۲-۲t=۰\Rightarrow t(t-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۰\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\\ t=۱\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}=۱\Rightarrow\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

در نتیجه جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارت‌اند از ۰، ۲π و $\frac{\pi}{۲}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۵\pi}{۲}$ است.

تست ۲۸ معادلهٔ $\tan ۳x-\tan ۵x=۱+\tan ۳x\tan ۵x$ چند جواب در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶})$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل

اگر دو طرف معادلهٔ داده شده را بر سمت راست آن تقسیم کنیم. نتیجه می‌شود

$$\frac{\tan ۳x-\tan ۵x}{۱+\tan ۳x\tan ۵x}=۱\Rightarrow\tan(۳x-۵x)=۱\Rightarrow\tan(-۲x)=۱\Rightarrow-\tan ۲x=۱\Rightarrow\tan ۲x=-۱=\tan(-\frac{\pi}{۴})$$

بنابراین $۲x=k\pi-\frac{\pi}{۴}$. پس $x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}\ (k\in\mathbb{Z})$. اکنون توجه کنید که

$$-\frac{\pi}{۶}<\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}<\frac{۱۱\pi}{۶}\Rightarrow-\frac{۱}{۱۲}<k<\frac{۴۷}{۱۲}\Rightarrow k=۰,۱,۲,۳$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر چهار جواب در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶})$ دارد.

تست ۲۹ جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan(\frac{\pi}{۴}+x)+\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=۲$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $\frac{k\pi}{۴}$ ۳) $k\pi$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$

راه‌حل

معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan x}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}\tan x}+\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan x}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan x}=۲\Rightarrow\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}+\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=۲$$

$$(۱+\tan x)^۲+(۱-\tan x)^۲=۲(۱-\tan^۲ x)$$

$$۲+۲\tan^۲ x=۲-۲\tan^۲ x\Rightarrow ۴\tan^۲ x=۰\Rightarrow\tan x=۰$$

بنابراین جواب کلی معادله به‌صورت $x=k\pi$ است.

۱۲۲

نکته

تعداد جواب‌های برخی معادلات مثلثاتی را می‌توانیم به کمک رسم نمودار پیدا کنیم.

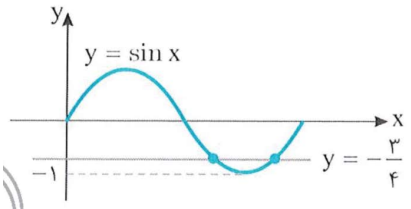
تست ۳۰ تعداد جواب‌های معادلهٔ $(\sin x+\frac{۳}{۴})(\cos x-\frac{۱}{۵})=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

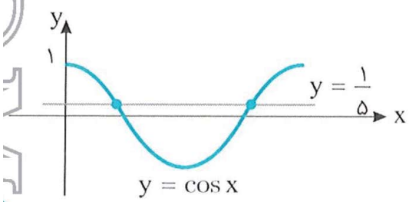
راه‌حل توجه کنید که

$$(\sin x+\frac{۳}{۴})(\cos x-\frac{۱}{۵})=۰\Rightarrow \sin x=-\frac{۳}{۴}\ ,\ \cos x=\frac{۱}{۵}$$

از طرف دیگر، جواب‌های معادلهٔ $\sin x=-\frac{۳}{۴}$ طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع $y=\sin x$ و خط $y=-\frac{۳}{۴}$ هستند. بنابراین از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که معادلهٔ $\sin x=-\frac{۳}{۴}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد.



به همین ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که معادلهٔ $\cos x=\frac{۱}{۵}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دو جواب دارد. بنابراین معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چهار جواب دارد.



تست ۳۱ معادلهٔ $\frac{\sin ۲x}{۱+\cos x}=۱-\cos x$ چند جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin ۲x=(۱+\cos x)(۱-\cos x)\ ,\ \cos x\neq -۱$$

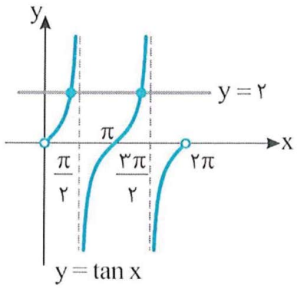
$$۲\sin x\cos x=۱-\cos^۲ x\Rightarrow ۲\sin x\cos x=\sin^۲ x\Rightarrow \sin x(۲\cos x-\sin x)=۰$$

جواب معادلهٔ $\sin x=۰$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت است از $x=\pi$ که قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادلهٔ اصلی می‌شود.

معادلهٔ $۲\cos x-\sin x=۰$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin x=۲\cos x\Rightarrow \tan x=۲$$

با توجه به نمودار زیر، معادله دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



دست‌گرمی

۱۰۹- معادلهٔ $\cos(x-\frac{\pi}{۴})-\cos x=۰$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۰- معادلهٔ $\tan(x-\frac{\pi}{۶})-\tan ۲x=۰$ چند جواب در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۱- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin(\frac{\pi}{۶}-۲x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $-k\pi-\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{-(۲k+۱)\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$

۲) $-k\pi+\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{-(۲k+۱)\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}$

۳) $-k\pi-\frac{\pi}{۴}$ و $(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۱۲}$

۴) $(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۱۲}$ و $k\pi+\frac{\pi}{۴}$

۱۱۲- جواب‌های کلی معادلهٔ $۳\tan^۲x-۱=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$

۱۱۳- نمودار تابع $f(x)=\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)-۱$ روی بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ در چند نقطه خط $y=-۱$ را قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۴- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^۳x-\sin x=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $x=k\pi$ ۲) $x=\frac{k\pi}{۲}$ ۳) $x=\frac{k\pi}{۴}$ ۴) $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

۱۱۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲\sin^۲x+۵\cos x=۴$ که در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

۱۱۶- معادلهٔ $\sin ۲x=\tan x$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

آزمون ۶۶ — معادلات مثلثاتی (۱)

۶۵۱- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos ۳x=\cos ۲x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۵}$ ۳) $\frac{k\pi}{۵}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۵}$

۶۵۲- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۴}-۱=۰$ کدام‌اند؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $۸k\pi+\pi$ یا $۸k\pi-\pi$ ۲) $۸k\pi-\pi$ یا $۸k\pi+۲\pi$

۳) $۸k\pi-\pi$ یا $۸k\pi+۳\pi$ ۴) $۸k\pi+\pi$ یا $۸k\pi+۳\pi$

۶۵۳- نمودار تابع $f(x)=\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۵۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\tan ۴x=\tan(۲x-\frac{\pi}{۳})$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲۰\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۹\pi}{۲}$

۶۵۵- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x+\cos(x+\frac{\pi}{۵})=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi+\frac{۷\pi}{۲۰}$ ۲) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲۰}$ ۳) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲۰}$ ۴) $k\pi-\frac{۷\pi}{۲۰}$

۶۵۶- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin ۲x\cos ۲x-\sin ۲x=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۴}$

۶۵۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $۲\sin^۲ ۲x-۷\sin ۲x+۵=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$

۶۵۸- معادلهٔ $\sin ۴x=\sqrt{۲}\sin ۲x$ چند جواب در بازهٔ $[۰,\pi]$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۵۹- معادلهٔ $\cos ۲x=\cos x-۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۶۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos ۲x-\sin ۲x+۲\sin^۲ x=۰$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}$

سؤال	گا
۶۵۱	۱۲ ۱۴
۶۵۲	۱۲ ۱۶
۶۵۳	۱۷ ۱۹
۶۵۴	۱۲ ۱۳
۶۵۵	۱۲ ۱۵
۶۵۶	۱۲ ۱۴ ۲۱
۶۵۷	۱۹ ۲۱
۶۵۸	۱۲ ۱۶ ۱۹ ۲۱
۶۵۹	۲ ۶ ۹ ۲۱
۶۶۰	۹ ۲۱

آزمون ۶۷ معادلات مثلثاتی (۲)

سؤال	گام
۶۶۱	۱۱۲ ۱۱۴
۶۶۲	۱۱۲ ۱۱۶
۶۶۳	۱۱۳ ۱۱۹
۶۶۴	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۶۶۵	۱۱۲ ۱۱۵
۶۶۶	۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹
۶۶۷	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۶۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۶۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۷۰	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۲۱

۶۶۱- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 5x=\cos 4x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{2k\pi}{9}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{9}$ ۳) $\frac{k\pi}{9}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{9}$

۶۶۲- جواب‌های کلی معادلهٔ $2\sin x+\sqrt{3}=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۳) $2k\pi+\frac{4\pi}{3}, 2k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi+\frac{2\pi}{3}, 2k\pi+\frac{\pi}{3}$

۶۶۳- تابع $f(x)=2\sin 3x+1$ در بازهٔ $[-\pi, 2\pi]$ چند بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۶۴- معادلهٔ $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{2x}{3}=0$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۶۵- جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan(\frac{\pi}{4}+x)+\cot(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi+\frac{\pi}{12}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{24}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{12}$

۶۶۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{2}\sin^2 x=\sin x$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۶۶۷- معادلهٔ $2\cos^2 x-3\sin x-3=0$ چند جواب در بازهٔ $(-\pi, 0)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۶۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{1}{\cos 2x}-\frac{1}{\sin 4x}=0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{6}$

۶۶۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\tan 2x=3\tan x$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) 4π ۲) 5π ۳) 6π ۴) 7π

۶۷۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{16}{3}$ در بازهٔ $(0, \pi)$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

آزمون ۶۸ معادلات مثلثاتی (۳)

-۶۷۱ جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin 5x=\sin 3x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}$

۲) $2k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}$

۳) $k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

۴) $2k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

-۶۷۲ معادلهٔ $2\cos\frac{x}{2}+1=0$ در بازهٔ $(-\pi,2\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۶۷۳ تابع $f(x)=-2\cos 4x$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

-۶۷۴ جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos(2x-\frac{\pi}{9})=-\sin 2x$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{36}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}-\frac{7\pi}{36}$ ۳) $\frac{k\pi}{2}-\frac{7\pi}{72}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{7\pi}{72}$

-۶۷۵ معادلهٔ $2\cos^3 x-\cos x=0$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

-۶۷۶ جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^2(\pi+x)-\sin x-2=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

-۶۷۷ معادلهٔ $1-\cos 2x=\sin^2 x$ چند جواب در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۶۷۸ مجموع جواب‌های معادلهٔ $3\tan x-3\cot x=2\sqrt{3}$ در بازهٔ $(\pi,2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{19\pi}{6}$ ۲) $\frac{17\pi}{6}$ ۳) $\frac{13\pi}{6}$ ۴) $\frac{7\pi}{6}$

-۶۷۹ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos(3\pi-x)=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2})+1$ که در بازهٔ $(0,2\pi)$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) π ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{7\pi}{3}$

-۶۸۰ چند جواب معادلهٔ $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=1$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ قرار دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

سؤال	گا
۶۷۱	۱۲
۶۷۲	۱۲ ۱۳ ۱۶
۶۷۳	
۶۷۴	۲ ۵
۶۷۵	۲ ۳ ۶ ۹
۶۷۶	۸ ۹ ۱
۶۷۷	۳ ۹ ۱۰ ۱
۶۷۸	۲ ۱
۶۷۹	۲ ۳ ۹ ۱
۶۸۰	۱ ۱

آزمون ۶۹ معادلات مثلثاتی (۴)

-۶۸۱ معادلهٔ $\sin(3x-\frac{\pi}{3})=\sin(x-\frac{\pi}{9})$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

-۶۸۲ مجموع جواب‌های معادلهٔ $2\cos 3x-1=0$ که در بازهٔ $(0,\pi)$ قرار دارند، چقدر است؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) $\frac{13\pi}{9}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{8\pi}{9}$

-۶۸۳ جواب‌های کلی معادلهٔ $2\cos^2(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4})-1=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

-۶۸۴ معادلهٔ $\frac{\sin 3x}{\cos(x-\frac{\pi}{6})}=-1$ در بازهٔ $(0,\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۶۸۵ معادلهٔ $(4\cos x+1)(5\cos x-3)=0$ چند جواب در بازهٔ $[0,\frac{3\pi}{2}]$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۶۸۶ جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan x+\cot x=2$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{k\pi}{4}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

-۶۸۷ جواب‌های کلی معادلهٔ $3\tan^2 x+4\sqrt{3}\tan x+3=0$ به‌صورت $x=k\pi-\frac{n\pi}{6}$ هستند. n چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ $(k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}, n<6)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۶۸۸ معادلهٔ $\sin^2 x+\sin^2 4x=1$ چند جواب در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۶۸۹ مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos^4 x-1=\sin^4 x$ در بازهٔ $(0,3\pi)$ کدام است؟

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

-۶۹۰ تعداد جواب‌های معادلهٔ $(2-\sqrt{2})\sin^2 x+\cos x-1=0$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال	گام
۶۸۱	۱۱۲ ۱۱۷
۶۸۲	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶
۶۸۳	۱۱۹ ۱۲۱
۶۸۴	۱۱۲ ۱۱۵ ۱۱۷
۶۸۵	۱۲۲
۶۸۶	۱۱۲ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۸۷	۱۱۲ ۱۲۱
۶۸۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵ ۱۲۱
۶۸۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۶۹۰	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱ ۲۸۵

آزمون ۷۰ — معادلات مثلثاتی (۵)

۶۹۱- معادلهٔ $\sin(x-\frac{\pi}{۳})-\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۰$ چند جواب در بازهٔ $(-\pi,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۹۲- جواب‌های کلی معادلهٔ $۲\sin(x+\frac{۵\pi}{۳۶})=\sqrt{۲}$ به صورت $x=۲k\pi+\frac{i\pi}{۱۸}$ است. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟

$(k\in\mathbb{Z}\ ,\ i\in\mathbb{N}\ ,\ i<۱۸)$

۱) $\{۱,۴\}$ ۲) $\{۳,۸\}$ ۳) $\{۲,۱۱\}$ ۴) $\{۳,۱۰\}$

۶۹۳- جواب‌های کلی معادلهٔ $۱-۴\sin^۲(۵x-\frac{\pi}{۳})=۰$ به صورت $x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{i\pi}{۳۰}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای i کدام است؟

$(۰<i<۵\ ,i\in\mathbb{N}\ ,k\in\mathbb{Z})$

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۶۹۴- معادلهٔ $\frac{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos ۲x}=۱$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۶۹۵- معادلهٔ $(۴\cos x-\sqrt{۱۳})(۴\sin x-\sqrt{۳})=۰$ چند جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۶۹۶- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^۲ x-\cos^۲ x=\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$

۶۹۷- معادلهٔ $\tan ۲x\tan ۴x=۱$ چند جواب در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۹۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos ۲x=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

۶۹۹- معادلهٔ $\sin^۳ x+\cos^۳ x=\sin x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۷۰۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $۲\sin^۲ x+\tan^۲ x=۲$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{۴}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{k\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$

سؤال
۶۹۱
۶۹۲
۶۹۳
۶۹۴
۶۹۵
۶۹۶
۶۹۷
۶۹۸
۶۹۹
۷۰۰

آزمون ۷۱ معادلات مثلثاتی (۶)

۷۰۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin x-\sin^۳ x=\cos x-\cos^۳ x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۲) ۵π ۳) $\frac{۱۱\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۳\pi}{۲}$

۷۰۲- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^۲(x+\frac{\pi}{۹})+۲\sin^۲(x-\frac{۷\pi}{۱۸})=۲$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۹}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{۹}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{۳}$

۷۰۳- معادلهٔ $\cos^۳ x-\sin^۳ x=\cos ۲x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۰۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{۲}(\sin x+\cos x)=\sqrt{۳}$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۳π ۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

۷۰۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos(۲\pi\sin x)=-۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۳π ۲) ۴π ۳) ۵π ۴) ۶π

۷۰۶- معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{۱۲})=۳\sin(x-\frac{\pi}{۱۲})$ چند جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۰۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})=-\frac{۱}{۴}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۷۰۸- معادلهٔ $\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=\tan ۲x$ چند جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷۰۹- معادلهٔ $\frac{\tan ۳x-\tan x}{\tan ۵x+\tan x}=\frac{۱+\tan x\tan ۳x}{۱-\tan x\tan ۵x}$ چند جواب در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۷۱۰- معادلهٔ $۳\tan x+k\cot x=۲$ جواب دارد. حدود k کدام است؟

۱) $k>\frac{۱}{۳}$ ۲) $۰\le k\le\frac{۱}{۳}$ ۳) $k\le\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}\le k\le\frac{۱}{۳}$

سؤال	گام
۷۰۱	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱
۷۰۲	۱۱۲ ۱۱۵ ۱۱۹
۷۰۳	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱ ۲۷۶ ۲۷۹
۷۰۴	۱۱۳ ۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۱
۷۰۵	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۸ ۱۱۹
۷۰۶	۱۱۸ ۱۲۱ ۳۲۳
۷۰۷	۱۱۲ ۱۲۱
۷۰۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۷۰۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۷۱۰	۱۱۸ ۱۲۱

آزمون ۷۲

آزمون فصل دوم (۱)

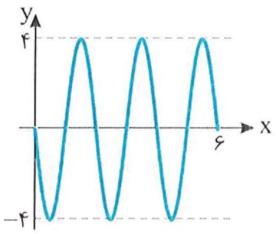
۷۱۱- اگر انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم باشد و $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\sin\alpha-\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $-\frac{۸}{۹}$

۷۱۲- اندازهٔ یک زاویه برحسب درجه از $\frac{۲۰۰}{\pi}$ برابر اندازهٔ آن برحسب رادیان ۵ واحد کمتر است. اندازهٔ این زاویه برحسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۸}$

۷۱۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟



۱) -۶
۲) ۴
۳) -۴
۴) ۶

۷۱۴- حاصل $\frac{۱}{۱+\cot ۱۱۰^\circ}+\frac{۱}{۱-\cot ۳۸۰^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\tan ۲۰^\circ$ ۴) $\cot ۱۰^\circ$

۷۱۵- حاصل $\frac{۱}{\cos ۱۵^\circ}+\frac{۱}{\sin ۱۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۶}$

۷۱۶- اگر $\sin x+\cos x=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\cos ۴x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۶}$

۷۱۷- اگر $\cos ۴x=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\sin^۴ x+\cos^۴ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۸}$

۷۱۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos ۲x-\cos(x+\frac{\pi}{۴})=۰$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

۷۱۹- معادلهٔ $۱+\sin ۲x=\cos x+\sin x$ چند جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۲۰- معادلهٔ $\tan(x+\frac{\pi}{۳})=\frac{۳+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}\tan x-۳}$ چند جواب در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

آزمون ۷۳

آزمون فصل دوم (۲)

۷۲۱- مقدار عبارت $A=\frac{(1+\cot\frac{\pi}{5})(1-\tan\frac{\pi}{5})}{(1-\cot\frac{\pi}{5})(1+\tan\frac{\pi}{5})}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -1

۷۲۲- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x}=\frac{7}{25}$، مقدار $\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۷۲۳- اگر $\sin x\cos x=\sin x+\cos x$، حاصل $\sin x+\cos x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

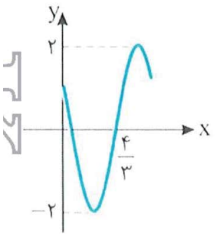
۷۲۴- حاصل عبارت $A=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 180^\circ$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۵/۵ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۷۲۵- اگر $-\frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{2}$ و $\tan x=m+2\sqrt{3}$، حداقل مقدار m کدام است؟

۱) $-3\sqrt{3}$ ۲) $-4\sqrt{3}$ ۳) $-2\sqrt{3}$ ۴) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

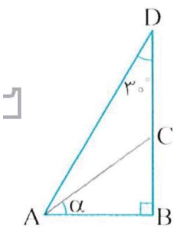
۷۲۶- بخشی از نمودار تابع $f(x)=a\sin(\pi(b-x))$ به شکل مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟ $(2<b<3)$



۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$

۳) $-\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{13}{3}$

۷۲۷- در شکل روبه‌رو $BC=3$ و $AD=8$، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{12}{25}$ ۲) $\frac{24}{25}$

۳) $\frac{7}{15}$ ۴) $\frac{14}{15}$

۷۲۸- اگر $\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۷۲۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=-1$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{11\pi}{4}$ ۲) $\frac{21\pi}{8}$ ۳) $\frac{23\pi}{16}$ ۴) $\frac{21\pi}{16}$

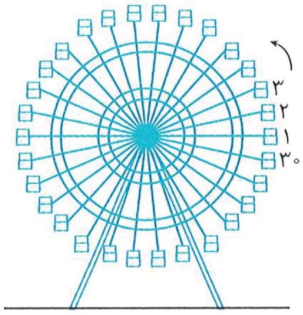
۷۳۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $1+2\sin 3x\cos 4x=2\sin 4x\cos 3x$ در بازهٔ $(0,\pi)$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{5\pi}{3}$ ۳) $\frac{5\pi}{6}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

سؤال	گام
۷۲۱	۸۲
۷۲۲	۷۵ ۸۲
۷۲۳	۷۷ ۸۲ ۲۷۵
۷۲۴	۸۲ ۹۳
۷۲۵	۱۱۱
۷۲۶	۱۰۶ ۱۰۹
۷۲۷	۷۰ ۹۷
۷۲۸	۹۷ ۱۰۵
۷۲۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۷۳۰	۹۵ ۱۱۲

آزمون ۷۴

۷۳۱- چرخ‌وفلکی مطابق شکل ۳۰ کابین دارد که از شمارهٔ ۱ تا ۳۰ شماره‌گذاری شده‌اند. این چرخ‌وفلک در هر دقیقه ۲ دور می‌چرخد. اگر چرخ‌وفلک ۱۸۴ ثانیه در جهت مثبت مثلثاتی بچرخد، کابین شمارهٔ یک به محل کدام کابین منتقل می‌شود؟



۱) کابین سوم
۲) کابین پنجم
۳) کابین هفتم
۴) کابین نهم

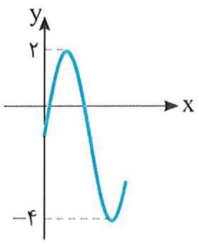
۷۳۲- حاصل عبارت $A=\frac{\sin ۲۵^\circ-\sin^۳ ۲۵^\circ}{\cos ۲۵^\circ-\cos^۳ ۲۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\tan^۲ ۲۵^\circ$ ۲) $\tan ۲۵^\circ$ ۳) $\cot ۲۵^\circ$ ۴) $\cot^۲ ۲۵^\circ$

۷۳۳- اگر $a=\frac{\pi}{۳۲}$، مقدار $\frac{\sin ۷a\cos ۲۷a}{\sin ۲۱a\cos ۹a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۷۳۴- در شکل مقابل، قسمتی از نمودار کدام تابع رسم شده است؟



۱) $y=۳\cos(۲x)-۴$
۲) $y=۳\sin(۲x)-۱$
۳) $y=-۳\sin(۳x)-۱$
۴) $y=-۲\cos(۳x)+۱$

۷۳۵- اگر $\tan(x+۱۰^\circ)=\frac{۲}{۳}$ و $\tan(y+۳۵^\circ)=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\tan(x+y)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۷۳۶- اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۲}{۳}$، مقدار $\sin^۲ ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۲) $\frac{۲۵}{۸۱}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۴۹}{۸۱}$

۷۳۷- مقدار عبارت $A=(\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x})^۲$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۱۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$

۷۳۸- نمودار تابع $f(x)=۱-\sin(۲x)$ در بازهٔ $(۰,۴\pi)$ چندبار بر محور طول‌ها مماس می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۳۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲\cos^۲ ۲x+۳\cos ۲x+۱=۰$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

۷۴۰- معادلهٔ $\sin x+\sqrt{۳}\cos x=\sqrt{۲}$ چند جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۷۵ آزمون فصل دوم (۴) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

سؤال	گام
۷۴۱	۸۲ ۹۲
۷۴۲	۸۲ ۹۲ ۹۷
۷۴۳	۱۰۶ ۱۰۹
۷۴۴	۱۰۱
۷۴۵	۹۵ ۹۷
۷۴۶	۱۰۲ ۱۰۵
۷۴۷	۹۲ ۱۱۲
۷۴۸	۱۱۲ ۱۱۵
۷۴۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵ ۱۱۶
۷۵۰	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵

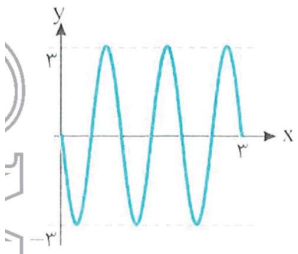
۷۴۱- اگر $\tan\theta=0/2$، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ کدام است؟ ریاضی - ۹۱

۱) -2 ۲) $1/2$ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۴۲- ساده شدهٔ کسر $\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta\cos^4\theta}$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱) $8\cos^{-2}2\theta$ ۲) $8\sin^{-2}2\theta$ ۳) $16\cos^{-4}2\theta$ ۴) $16\sin^{-4}2\theta$

۷۴۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۲



۱) -6
۲) -3
۳) ۴/۵
۴) ۶

۷۴۴- اگر $\tan x=\frac{4}{3}$، مقدار $\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}$ کدام است؟ تجربی - ۹۶

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۷۴۵- اگر $\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{2}{3}$، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟ تجربی - ۹۳

۱) $-\frac{2}{9}$ ۲) $-\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۷۴۶- اگر $\tan\beta=\frac{1}{2}$ و $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟ تجربی - ۹۴

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

۷۴۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}=1$ به کدام صورت است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

۷۴۸- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 3x+\cos x=0$، با شرط $\cos x\neq 0$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

۷۴۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۷۵۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π

آزمون ۷۶ آزمون فصل دوم (۵) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

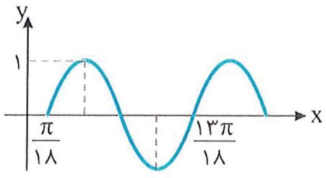
۷۵۱- اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)$ کدام است؟ تجربی - ۹۵

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۷۵۲- حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵۰^\circ+\sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ-\cos ۱۱۰^\circ}$ با فرض $\tan ۲۰^\circ=۰/۴$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۷۵۳- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟ ریاضی - ۹۵



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۷۵۴- حاصل $\frac{۱}{\sin ۱۵^\circ}-\frac{۱}{\cos ۱۵^\circ}$ کدام است؟ ریاضی - ۹۶

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۷۵۵- اگر $\tan\alpha=۲$ و $\tan\beta=\frac{۱}{۳}$، مقدار $\tan(۲\alpha-\beta)$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳

۷۵۶- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^۴ x-\cos^۴ x=\sin^۲\frac{۵\pi}{۴}$ به کدام صورت است؟ تجربی - ۹۲

۱) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۷۵۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $۲\cos ۲x=\cot x(۴\sin x+\tan x)$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۷۵۸- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin^۲ x-\cos^۲ x=\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)$ به کدام صورت است؟ تجربی - ۹۱

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$

۷۵۹- جواب‌های کلی معادلهٔ $۲\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=۱$ به کدام صورت است؟ تجربی - ۹۴

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۸}$

۷۶۰- نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x\cos x}{۱-\cos x}=۱+\cos x$ روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی هستند؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۱

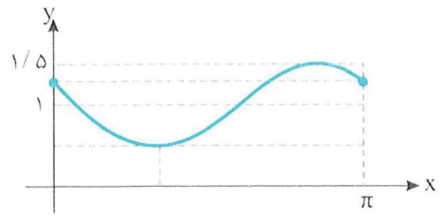
۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث متساوی‌الساقین

سؤال	گا
۷۵۱	۱۲ ۱۷ ۷۵
۷۵۲	۱۲ ۲
۷۵۳	۲ ۶ ۹
۷۵۴	۶ ۷
۷۵۵	۵
۷۵۶	۲ ۱ ۶
۷۵۷	۷ ۲ ۶ ۸ ۱
۷۵۸	۲ ۴ ۱
۷۵۹	۲ ۵ ۱
۷۶۰	۲ ۹ ۱

آزمون ۷۷ آزمون فصل دوم (۶) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

سؤال	گام
۷۶۱	۱۰۹
۷۶۲	۹۴ ۹۵
۷۶۳	۱۰۵ ۱۱۲
۷۶۴	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۸ ۱۲۱
۷۶۵	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۲۱
۷۶۶	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۷۶۷	۹۶ ۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۷۶۸	۱۰۶ ۱۱۲
۷۶۹	۹۵ ۱۱۲ ۱۲۱
۷۷۰	۱۱۲ ۱۲۱

۷۶۱- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=1+a\sin(bx-\frac{\pi}{6})$ است.



مقدار $a+b$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۵

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۷۶۲- ساده شدهٔ عبارت $\cos 50^\circ(\tan 70^\circ+\tan 10^\circ)$ برابر کدام است؟ ریاضی ۸۵

۱) $\sin 20^\circ$ ۲) $\cos 20^\circ$ ۳) $2\sin 20^\circ$ ۴) $2\cos 20^\circ$

۷۶۳- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟ خارج از کشور تجربی ۹۱

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{6}$

۷۶۴- جواب‌های کلی معادلهٔ $2\sin^2 x+3\cos x=0$ کدام است؟ تجربی ۹۵

۱) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{3}$

۷۶۵- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 2x+2\cos^2 x=0$ کدام است؟ تجربی ۹۶

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۷۶۶- جواب‌های کلی معادلهٔ $\tan x\tan 3x=1$ کدام است؟ تجربی ۹۷

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

۷۶۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sin x+\cos x$ کدام است؟ ریاضی ۹۲

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

۷۶۸- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan 3x$ به کدام صورت است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۴

۱) $\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{16}$ ۲) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{16}$ ۳) $\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

۷۶۹- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۵

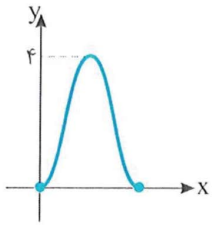
۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۷۷۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ با شرط $x\neq\frac{k\pi}{2}$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۶

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

آزمون ۷۸ آزمون فصل دوم (۷) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۷۷۱- شکل زیر نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ در بازهٔ $[۰,۴]$ است. مقدار b کدام است؟ ریاضی - ۹۷



۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۷۷۲- اگر $\cos\alpha=\frac{\sqrt{۷}}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۷۷۳- اگر $\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{۱}{۵}$، مقدار $\tan۲\alpha$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱) ۱/۵ ۲) ۱/۸ ۳) ۲/۴ ۴) ۲/۵

۷۷۴- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin۳x+\sin۲x}{۱+\cos x}=۰$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱) $\frac{k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۵}$ ۴) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۵}$

۷۷۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin۴x=\sin^۴x-\cos^۴x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ برابر کدام است؟ ریاضی - ۹۵

۱) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

۷۷۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin۲x(\sin x+\cos x)=\cos۲x(\cos x-\sin x)$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟ تجربی - ۹۳

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

۷۷۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin۳x}{\sin x}=۲\cos^۲x$ کدام است؟ ریاضی - ۹۳

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$

۷۷۸- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin x+\sin۲x}{\cos x+\cos۲x}=\cot x$ کدام است؟ ریاضی - ۹۴

۱) $\frac{k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۳k\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}(۲k+۱)\pi$

۷۷۹- جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\sin۳x=\cos۲x$ کدام است؟ ریاضی - ۹۶

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{k\pi}{۳}$

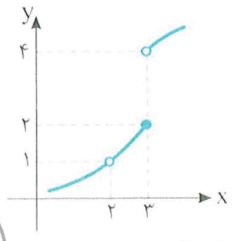
۷۸۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin۲x\sin۴x+\sin^۲x=۱$ کدام است؟ ریاضی - ۹۷

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۶}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{k\pi}{۶}$

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: مفهوم حد و قضایای حد

مفهوم حد



نمودار تابع f در شکل مقابل را در نظر بگیرید. از روی این نمودار معلوم است که وقتی مقادیر x از ۲ کوچک‌ترند و به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، مقادیر $f(x)$ از ۱ کوچک‌ترند و به ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. همین‌طور، وقتی مقادیر x از ۲ بزرگ‌ترند و به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، مقادیر $f(x)$ از ۱ بزرگ‌ترند و به ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. در این صورت می‌گوییم حد تابع f در نقطهٔ $x=2$ برابر با ۱ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to 2} f(x)=1$. از طرف دیگر، وقتی که مقادیر x از ۳ کوچک‌ترند و به ۳ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، مقادیر $f(x)$ از ۲ کوچک‌ترند و به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. همین‌طور، وقتی مقادیر x از ۳ بزرگ‌ترند و به ۳ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، مقادیر $f(x)$ از ۴ بزرگ‌ترند و به ۴ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. توجه کنید که در این صورت مقادیر f به عددی ثابت نزدیک نمی‌شوند. در این صورت می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=3$ برابر ۲ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$. همین‌طور، می‌گوییم حد راست تابع f در نقطهٔ $x=3$ برابر ۴ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to 3^+} f(x)=4$.

توجه کنید که حد تابع f در نقطهٔ $x=3$ وجود ندارد.

تعریف

اگر x_0 عددی حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل x_0 را یک **همسایگی** x_0 می‌نامیم. اگر x_0 را از همسایگی x_0 حذف کنیم، به آن **همسایگی محذوف** x_0 می‌گوییم.

(a,b) یک همسایگی x_0 است.



$(a,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 است.



اگر r عددی حقیقی و مثبت باشد، بازهٔ (x_0, x_0+r) را یک **همسایگی راست** x_0 و بازهٔ (x_0-r, x_0) را یک **همسایگی چپ** x_0 می‌نامیم.

(x_0-r, x_0) یک همسایگی چپ x_0 است.



(x_0, x_0+r) یک همسایگی راست x_0 است.



مثال: بازه‌های $(-1,2)$، $(0,3)$ و $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ همگی همسایگی ۱ هستند. همین‌طور، اگر n عددی طبیعی باشد، بازهٔ $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ همسایگی صفر است. بازهٔ $(0,1)$ همسایگی ۱ نیست ولی همسایگی چپ ۱ است. $(0,2)-\{1\}$ یک همسایگی محذوف ۱ است. همچنین $(1,2)$ یک همسایگی چپ ۲ و یک همسایگی راست ۱ است.

تست ۱ اگر بازهٔ $(a-3,2a+1)$ یک همسایگی نقطهٔ $x=1$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $1<a<2$ ۲) $0<a<2$ ۳) $1<a<3$ ۴) $0<a<4$

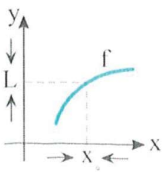
راه‌حل چون ۱ متعلق به بازهٔ $(a-3,2a+1)$ است، پس

$$a-3<1<2a+1 \Rightarrow \begin{cases} a-3<1 \Rightarrow a<4 \\ 1<2a+1 \Rightarrow a>0 \end{cases} \Rightarrow 0<a<4$$

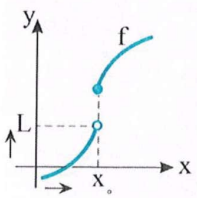
تعریف

می‌گوییم حد تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ برابر عدد L است، هرگاه تابع f در اطراف نقطهٔ x_0 (به جز احتمالاً در خود x_0) تعریف شده باشد و بتوان مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه به L نزدیک کرد، به شرط آنکه x (هم از چپ، هم از راست) به اندازهٔ کافی به x_0 نزدیک شده باشد. در این صورت می‌نویسیم

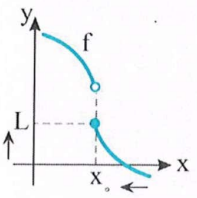
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$



تعریف



می‌گوییم **حد چپ** تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ برابر عدد L است، هرگاه تابع f در سمت چپ نقطهٔ x_0 تعریف شده باشد و بتوان مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه به L نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به اندازهٔ کافی به x_0 نزدیک شده باشد. در این صورت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$



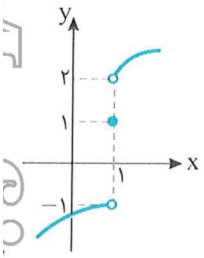
می‌گوییم **حد راست** تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ برابر عدد L است، هرگاه تابع f در سمت راست نقطهٔ x_0 تعریف شده باشد و بتوان مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه به L نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به اندازهٔ کافی به x_0 نزدیک شده باشد. در این صورت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

نکته ۱۲۴

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ اگر و فقط اگر $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$. به عبارت دیگر، حد تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ برابر L است اگر و فقط اگر حد چپ و حد راست تابع f در نقطهٔ $x=x_0$ هر دو برابر L باشند.

تست ۲

با توجه به نمودار تابع f، حاصل عبارت $A=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)-f(1)$ کدام است؟

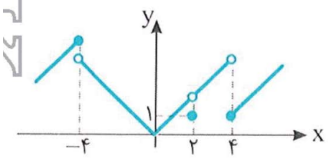


۱) ۴
۲) −۳
۳) −۴
۴) صفر

راه‌حل از روی نمودار معلوم می‌شود که $f(1)=1$، $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$. در نتیجه $A=-1-2-1=-4$.

تست ۳

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. مجموع طول نقطه‌هایی که تابع f در آن‌ها حد ندارد، کدام است؟

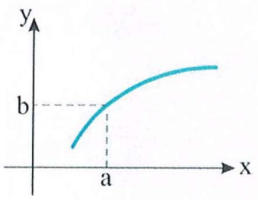


۱) صفر
۲) −۲
۳) ۵
۴) ۳

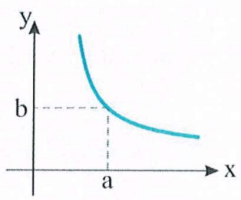
راه‌حل با توجه به نمودار، تابع f فقط در نقطه‌های $x=4$ و $x=-4$ حد ندارد. مجموع طول این نقطه‌ها صفر است.

تذکر ۱۲۵

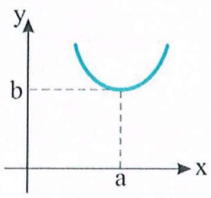
اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$ و مقادیر تابع f در همسایگی راست نقطهٔ $x=a$ از b بزرگ‌تر باشند، آن‌گاه $f(x)\to b^+$ و برعکس. همین‌طور $f(x)\to b^-$ یعنی مقادیر تابع f در همسایگی راست نقطهٔ $x=a$ از b کمتر هستند و برعکس. همین‌طور اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$، از $f(x)\to b^+$ و $f(x)\to b^-$ به‌طور مشابه استفاده می‌کنیم.



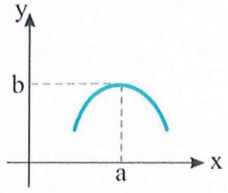
$x\to a^+\Rightarrow f(x)\to b^+$
$x\to a^-\Rightarrow f(x)\to b^-$
(تابع f در دو طرف a اکیداً صعودی است.)



$x\to a^+\Rightarrow f(x)\to b^-$
$x\to a^-\Rightarrow f(x)\to b^+$
(تابع f در دو طرف a اکیداً نزولی است.)



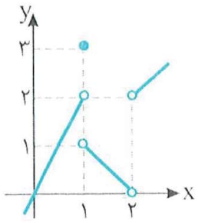
$x\to a^+\Rightarrow f(x)\to b^+$
$x\to a^-\Rightarrow f(x)\to b^+$
(تابع f در سمت چپ a اکیداً نزولی و در سمت راست a اکیداً صعودی است.)



$x\to a^+\Rightarrow f(x)\to b^-$
$x\to a^-\Rightarrow f(x)\to b^-$
(تابع f در سمت چپ a اکیداً صعودی و در سمت راست a اکیداً نزولی است.)

تست ۴

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to 1^-} f(f(x))$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

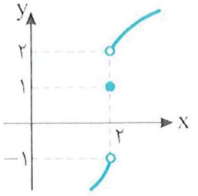
راه‌حل با توجه به نمودار تابع f، وقتی $x\to 1^-$، $f(x)$ با مقادیر کمتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود. یعنی اگر $t=f(x)$، آن‌گاه $t\to 2^-$. پس $\lim\limits_{x\to 1^-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to 2^-} f(t)=0$.

نکته ۱۲۶

- فرض کنید دو تابع f و g در همسایگی راست نقطه‌ای مانند $x=a$ با هم برابر باشند و حد راست یکی از آن‌ها در نقطهٔ $x=a$ وجود داشته باشد. در این صورت حد راست تابع دیگر هم در نقطهٔ $x=a$ وجود دارد و مقدار این دو حد برابر است.
- فرض کنید دو تابع f و g در همسایگی چپ نقطه‌ای مانند $x=a$ با هم برابر باشند و حد چپ یکی از آن‌ها در نقطهٔ $x=a$ وجود داشته باشد. در این صورت حد چپ تابع دیگر هم در نقطهٔ $x=a$ وجود دارد و مقدار این دو حد برابر است.

تست ۵

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to 2^+} f([x])$ کدام است؟

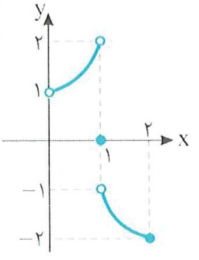


۱) ۱
۲) ۲
۳) -1
۴) -2

راه‌حل توجه کنید که در یک همسایگی راست نقطهٔ ۲، $[x]=2$. بنابراین $\lim\limits_{x\to 2^+} f([x])=\lim\limits_{x\to 2^+} f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} 1=1$

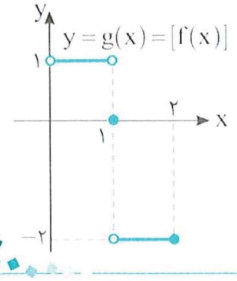
تست ۶

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)]-2\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)]$ کدام است؟



۱) -2
۲) -5
۳) -4
۴) -6

راه‌حل اول توجه کنید که اگر $0<x<1$، آن‌گاه $1<f(x)<2$ و در نتیجه $[f(x)]=1$ و اگر $1\le x<2$، آن‌گاه $-2\le f(x)<-1$ و در نتیجه $[f(x)]=-2$. بنابراین نمودار تابع $g(x)=[f(x)]$ به‌صورت زیر است و با توجه به نمودار،



$\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)]-2\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)]=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)-2\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=-2-2\times 1=-4$

راه‌حل دوم با توجه به نمودار، اگر $x\to 1^+$، آن‌گاه $f(x)\to(-1)^-$، بنابراین $[f(x)]=-2$ و اگر $x\to 1^-$، آن‌گاه $f(x)\to 2^-$، بنابراین $[f(x)]=1$. در نتیجه

$\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)]-2\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)]=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2)-2\lim\limits_{x\to 1^-} 1=-2-2\times 1=-4$

قضایای حد

قضیه ۱

۱) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است، یعنی $\lim\limits_{x\to a} c=c$.

۲) حد تابع همانی در هر عدد دلخواه a برابر a است، یعنی $\lim\limits_{x\to a} x=a$.

قضیه ۲

فرض کنید تابع‌های f و g در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشند، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$. در این صورت

۱) **حد مجموع:** مجموع این دو تابع در نقطهٔ $x=a$ حد دارد و $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=L_1+L_2$.

۲) **حد تفاضل:** تفاضل این دو تابع در نقطهٔ $x=a$ حد دارد و $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=L_1-L_2$.

۳) **حد حاصل‌ضرب:** حاصل‌ضرب این دو تابع در نقطهٔ $x=a$ حد دارد و $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=L_1\times L_2$.

۴) **حد خارج‌قسمت:** اگر $L_2\neq 0$، آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ $x=a$ حد دارد و $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$.

نکته

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ، $n\in\mathbb{N}$ و c عددی حقیقی باشد، آن‌گاه

۱) $\lim_{x\to a}(cf(x))=cL$ ۲) $\lim_{x\to a}(f(x))^n=L^n$

تست ۷

اگر $\lim_{x\to -۲} f(x)=۳$ و $\lim_{x\to -۲} g(x)=-۱$ ، مقدار $\lim_{x\to -۲}\frac{x+f(x)}{x-g(x)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+f(x)}{x-g(x)}=\frac{\lim_{x\to -۲}(x+f(x))}{\lim_{x\to -۲}(x-g(x))}=\frac{\lim_{x\to -۲}x+\lim_{x\to -۲}f(x)}{\lim_{x\to -۲}x-\lim_{x\to -۲}g(x)}=\frac{-۲+۳}{-۲-(-۱)}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

تست ۸

اگر تابع‌های f و g در نقطهٔ ۱ حد داشته باشند و $\lim_{x\to ۱}(f(x)+g(x))=۳$ و $\lim_{x\to ۱}(f(x)-g(x))=۱$، مقدار $\lim_{x\to ۱}(f(x)\times g(x))$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۴

راه‌حل فرض می‌کنیم $\lim_{x\to ۱} f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to ۱} g(x)=L_۲$، در این صورت

$$\lim_{x\to ۱}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to ۱}f(x)+\lim_{x\to ۱}g(x)=L_۱+L_۲$$

$$\lim_{x\to ۱}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to ۱}f(x)-\lim_{x\to ۱}g(x)=L_۱-L_۲$$

بنابراین، طبق فرض‌های مسئله، $\begin{cases}L_۱+L_۲=۳\\ L_۱-L_۲=۱\end{cases}$. اگر این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم، به‌دست می‌آید $L_۱=۲$ و $L_۲=۱$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to ۱}f(x)\times\lim_{x\to ۱}g(x)=L_۱\times L_۲=۲\times ۱=۲$$

قضیه ۳

- اگر $P(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$ چندجمله‌ای و a عددی دلخواه باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}P(x)=P(a)$.
- اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشد و $\sqrt[n]{f(x)}$ در اطراف نقطهٔ $x=a$ تعریف شده باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}\ ,\ n\in\mathbb{N}$$

- اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}|f(x)|=|L|$.
- اگر a عددی حقیقی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a\ ,\quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

$$\lim_{x\to a}\tan x=\tan a\ ,\quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

تست ۹

اگر $f(x)=\begin{cases}-x^۲+ax+۲b & x\leq ۲\\ x^۲+ax+۶ & x>۲\end{cases}$ و $\lim_{x\to ۲} f(x)=۲$، مقدار b کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۵ ۳) ۶ ۴) ۷

راه‌حل توجه کنید که باید $\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=۲$. در نتیجه

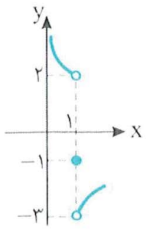
$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-x^۲+ax+۲b)=-۲^۲+a\times ۲+۲b=-۴+۲a+۲b=۲$$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲+ax+۶)=۲^۲+a\times ۲+۶=۴+۲a+۶=۲$$

از تساوی دوم به‌دست می‌آید $a=-۴$ و در نتیجه، بنابر تساوی اول، $-۴+۲(-۴)+۲b=۲$. پس $b=۷$.

تست ۱۰

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to 1^-} f(\frac{1}{x}) - \lim_{x\to 1^+} f(\frac{1}{x})$ کدام است؟



۱) ۵
۲) −۵
۳) ۳
۴) −۳

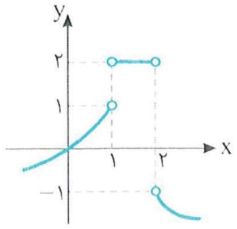
راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $x\to 1^+ \Rightarrow \frac{1}{x}\to 1^-$ ، $x\to 1^- \Rightarrow \frac{1}{x}\to 1^+$

بنابراین $\lim_{x\to 1^-} f(\frac{1}{x}) - \lim_{x\to 1^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{t\to 1^+} f(t) - \lim_{t\to 1^-} f(t) = -3-2 = -5$

تست ۱۱

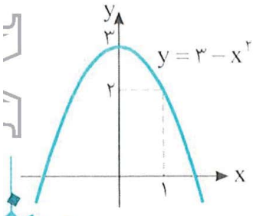
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to 1^-} f(3-x^2)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) −۱
۴) صفر

راه‌حل

ابتدا به نمودار تابع $y=3-x^2$ توجه کنید. از روی این نمودار معلوم می‌شود که اگر $x\to 1^-$ ، آن‌گاه $y=3-x^2\to 2^+$.



یعنی مقادیر y بیشتر از ۲ هستند. بنابراین

$$\lim_{x\to 1^-} f(3-x^2) = \lim_{y\to 2^+} f(y) = -1$$

تست ۱۲

اگر $f(x)=3x^3+5$ ، مقدار $\lim_{x\to 4} \frac{f(x-2)}{f(4-x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{29}{2}$
۲) $\frac{29}{5}$
۳) $\frac{22}{5}$
۴) $\frac{21}{5}$

راه‌حل

توجه کنید که

$$\begin{cases} \lim_{x\to 4} f(x-2) = \lim_{t\to 2} f(t) = \lim_{t\to 2}(3t^3+5) = 3\times 2^3+5 = 29 \\ \lim_{x\to 4} f(4-x) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0}(3t^3+5) = 3\times 0^3+5 = 5 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{f(x-2)}{f(4-x)} = \frac{\lim_{x\to 4} f(x-2)}{\lim_{x\to 4} f(4-x)} = \frac{29}{5}$$

نکته ۱۲۸

- اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ حد نداشته باشد و تابع g در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشد، آن‌گاه تابع‌های $f+g$ ، $f-g$ و $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ $x=a$ حد ندارند.

  البته ممکن است که تابع‌های $f\times g$ و $\frac{g}{f}$ در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشند.

- اگر تابع‌های f و g در نقطهٔ $x=a$ حد نداشته باشند، ممکن است تابع‌های $f+g$ ، $f-g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشند.

تست ۱۳

اگر تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد نداشته باشد، کدام‌یک از توابع زیر در این نقطه ممکن است حد داشته باشد؟

۱) $y=x+f(x)$
۲) $y=x-f(x)$
۳) $y=xf(x)$
۴) $y=\frac{f(x)}{x}$

راه‌حل

مجموع و تفاضل دو تابع که یکی در نقطهٔ $x=0$ حد دارد و دیگری در این نقطه حد ندارد، در نقطهٔ $x=0$ حد ندارد. پس توابع $y=x+f(x)$ و $y=x-f(x)$ در این نقطه حد ندارند. تابع $y=\frac{f(x)}{x}$ هم در نقطهٔ $x=0$ حد ندارد زیرا اگر این تابع در نقطهٔ $x=0$ حد داشته باشد، تابع $y=\frac{f(x)}{x}\times x=f(x)$ باید در این نقطه حد داشته باشد که این طور نیست. ولی تابع $y=xf(x)$ می‌تواند در نقطهٔ $x=0$ حد داشته باشد.

مثلاً تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ حد ندارد ولی تابع $y=xf(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ حد دارد.

تست ۱۴

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشد و تابع g در نقطهٔ $x=a$ حد نداشته باشد، کدام تابع در نقطهٔ $x=a$ حتماً حد ندارد؟

۱) $\frac{g}{f}+f$ ۲) $\frac{g}{f}+g$ ۳) $\frac{f}{g}+f$ ۴) $\frac{f}{g}+g$

راه‌حل تابع $\frac{g}{f}$ حتماً در نقطهٔ $x=a$ حد ندارد و چون تابع f در نقطهٔ $x=a$ حد دارد، پس مجموع آن‌ها، یعنی تابع $\frac{g}{f}+f$ حتماً در نقطهٔ $x=a$ حد ندارد.

نکته عامل صفرکننده ۱۲۹

فرض کنید تابع f در نقطهٔ $x=a$ حد چپ و حد راست داشته باشد، اما در این نقطه حد نداشته باشد و تابع g در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشد. در این صورت،

- اگر $\lim_{x\to a} g(x)=0$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=0$. در این حالت، تابع g را **عامل صفرکننده** می‌نامیم.
- اگر $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$، تابع $f\times g$ در نقطهٔ $x=a$ حد ندارد.

تست ۱۵

فرض کنید $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & x\geq 2\\ x-x^2 & x<2\end{cases}$ و $g(x)=x^2+mx-1$. اگر تابع $f\times g$ در نقطهٔ $x=2$ حد داشته باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) صفر

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x^2+1)=9$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-x^2)=-2$. در نتیجه تابع f در نقطهٔ $x=2$ حد ندارد.

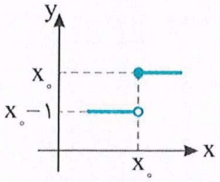
پس برای اینکه تابع $f\times g$ در نقطهٔ $x=2$ حد داشته باشد، باید $\lim_{x\to 2} g(x)=0$.

از طرف دیگر، $\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+mx-1)=4+2m-1=2m+3$. بنابراین $2m+3=0$، پس $m=-\frac{3}{2}$.

قضیه ۴ ۱۳۰

تابع $f(x)=[x]$ را در نظر بگیرید.

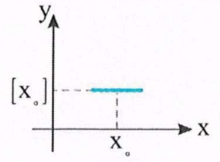
الف) اگر x_0 عددی صحیح باشد، آن‌گاه



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=x_0-1$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=x_0$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ x_0 حد ندارد.

ب) اگر x_0 عددی صحیح نباشد، آن‌گاه



$$\lim_{x\to x_0} f(x)=[x_0]$$

تست ۱۶

تابع $f(x)=\begin{cases}[x] & 0<x<2\\ |x| & 2\leq x<3\end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش حد ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل تابع $[x]$ در هیچ نقطهٔ صحیح از دامنه‌اش حد ندارد. پس در محدودهٔ $0<x<2$ تابع f در نقطهٔ $x=1$ حد ندارد. حد چپ و حد راست تابع را در نقطهٔ تغییر ضابطه $(x=2)$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}[x]=1\ ,\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}|x|=2$$

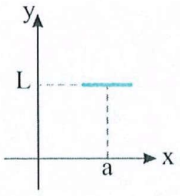
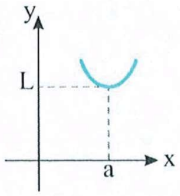
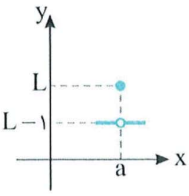
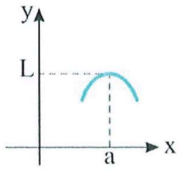
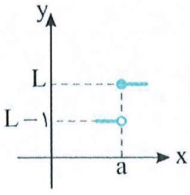
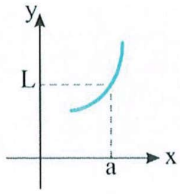
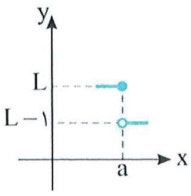
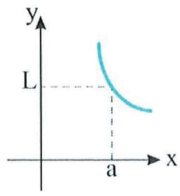
پس تابع در نقطهٔ $x=2$ نیز حد ندارد. در سایر نقطه‌های دامنه، تابع حد دارد.

نکته

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، آن‌گاه

۱) اگر L عددی صحیح نباشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=[L]$.

۲) اگر L عددی صحیح باشد، آن‌گاه

	$y=[f(x)]$	$y=f(x)$
الف) اگر مقدارهای تابع f در اطراف a از L بیشتر یا با L مساوی باشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=L$.		
ب) اگر مقدارهای تابع f در اطراف a از L کمتر باشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=L-1$.		
پ) در بقیهٔ حالت‌های ممکن، تابع $y=[f(x)]$ در نقطهٔ $x=a$ حد ندارد.		
		

تست ۱۷

مقدار $\lim\limits_{x\to 2^-}(x[-x]+2x[-2x])$ کدام است؟

۱) -20 ۲) -18 ۳) -16 ۴) -14

راه‌حل

وقتی که x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، $-x$ و $-2x$ به‌ترتیب از سمت راست به -2 و -4 نزدیک می‌شوند. بنابراین

$$\lim_{x\to 2^-}(x[-x]+2x[-2x])=2\times(-2)+2\times 2\times(-4)=-20$$

تست ۱۸

مقدار a کدام باشد تا تابع $f(x)=a[\frac{x}{3}]+2ax[\frac{-x}{3}]-[x^2]$ در نقطهٔ $x=3$ حد داشته باشد؟

۱) $\frac{1}{19}$ ۲) $-\frac{1}{17}$ ۳) $\frac{1}{17}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که

$$x\to 3^+\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{3}\to 1^+\Rightarrow[\frac{x}{3}]=1\\ -\frac{x}{3}\to(-1)^-\Rightarrow[-\frac{x}{3}]=-2\\ x^2\to 9^+\Rightarrow[x^2]=9\end{cases}\quad , \quad x\to 3^-\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{3}\to 1^-\Rightarrow[\frac{x}{3}]=0\\ -\frac{x}{3}\to(-1)^+\Rightarrow[-\frac{x}{3}]=-1\\ x^2\to 9^-\Rightarrow[x^2]=8\end{cases}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(0-2ax-8)=-6a-8$ و $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(a-4ax-9)=-11a-9$. برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=3$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$-6a-8=-11a-9\Rightarrow 5a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{5}$$

تست ۱۹ تابع $f(x)=[\frac{۱}{x}]$ در چند نقطه از بازهٔ $(۱,۲)$ حد ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) نامتناهی

راه‌حل **راه‌حل اول** در نقاطی که مقدار $\frac{۱}{x}$ عددی صحیح نشود، تابع $f(x)=[\frac{۱}{x}]$ حد دارد. در نقاطی که مقدار $\frac{۱}{x}$ عددی صحیح شود، تابع $f(x)=[\frac{۱}{x}]$ حد ندارد. ولی در بازهٔ $(۱,۲)$ هیچ‌گاه مقدار $\frac{۱}{x}$ عددی صحیح نمی‌شود. پس تابع f در تمام نقاط این بازه حد دارد.

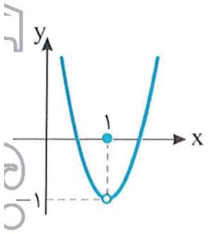
راه‌حل دوم اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{x}<۱$. بنابراین مقدار تابع f در بازهٔ $(۱,۲)$ همواره برابر صفر است. در نتیجه

$$\lim_{x\to a}[\frac{۱}{x}]=\lim_{x\to a}۰=۰,\quad a\in(۱,۲)$$

پس تابع در همهٔ نقاط بازهٔ $(۱,۲)$ حد دارد.

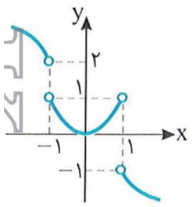
دست‌گرمی

۱۱۷- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{|f(x)|}$ کدام است؟



۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

۱۱۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to ۱^+} f(f(x))$ کدام است؟



۱) ۱
۲) -۱
۳) -۲
۴) ۲

۱۱۹- مقدار حد راست تابع $f(x)=\begin{cases}x^۳+۲x & x>۲\\ x^۲-۳x & x<۲\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۲$ چقدر از حد چپ آن در این نقطه بیشتر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۲۰- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{۳x+a}{۲x-۳} & x<۲\\ x^۲+ax+b & x\geq ۲\end{cases}$ و $\lim_{x\to ۲}f(x)=۴$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۱- اگر $\lim_{x\to -۱}(x^۲-x+۱-xf(x))=۶$، مقدار $\lim_{x\to -۱}f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۲- مقدار $\lim_{x\to ۲^+}(x[\sqrt{۲x}])$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

آزمون ۷۹ مفهوم حد و قضایای حد (۱)

سؤال	گام
۷۸۱	۱۲۳
۷۸۲	۲۲ ۱۲۳ ۳۳۴
۷۸۳	۱۲۳
۷۸۴	۱۲۳ ۱۲۵
۷۸۵	۱۲۳ ۱۲۶
۷۸۶	۱۲۳ ۱۲۵
۷۸۷	۱۲۳ ۱۲۴ ۳۳۷
۷۸۸	۱۲۴ ۱۲۶ ۱۲۷
۷۸۹	۱۲۵ ۱۲۷
۷۹۰	۱۲۶ ۱۲۷

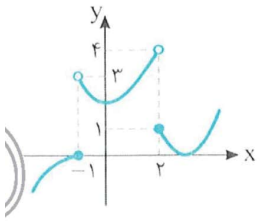
۷۸۱- اگر بازهٔ $(a-۲, ۲a)$ همسایگی نقطهٔ $x=۲$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $۲<a<۳$ ۲) $۲<a<۴$ ۳) $۱<a<۳$ ۴) $۱<a<۴$

۷۸۲- یک همسایگی چپ کدام نقطه در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{[x]-۲}$ قرار ندارد؟

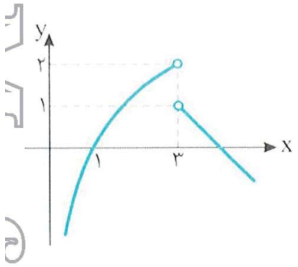
۱) $x=۱$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=۴$

۷۸۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)+\lim_{x\to۲^-} f(x)$ کدام است؟



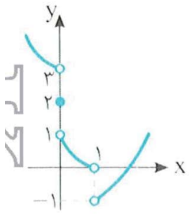
۱) ۱
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۷

۷۸۴- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to۰} f(x+۱)+\lim_{x\to۹^+} f(\frac{x}{۳})$ کدام است؟



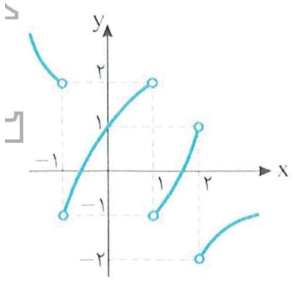
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۷۸۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to۱^-} f(x[x])$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) -۱

۷۸۶- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x\to(-۱)^-} f(f(x))$ کدام است؟



۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

۷۸۷- تابع $f(x)=x-[x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(-۲, ۲)$ حد ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸۸- اگر $f(x)=\begin{cases} ۲ax-۳ & x\le ۵ \\ x^۲-ax+b & x>۵ \end{cases}$ و $\lim_{x\to۵} f(x)=۱۷$، مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۸۹- اگر $\lim_{x\to۳} \frac{x+۴}{f(x)}=\frac{۷}{۶}$، حاصل $\lim_{x\to۱} \frac{f(۲x+۱)}{x+۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۷۹۰- مجموع حد چپ و حد راست تابع $f(x)=۳x^۲[x]-x^۳$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟

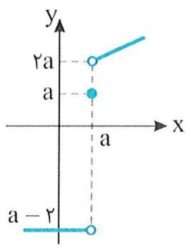
۱) ۸ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

آزمون ۸۰ — مفهوم حد و قضایای حد (۲)

۷۹۱- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-۱|<۲$ همسایگی کدام نقطه نیست؟

۱) $x=۰$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=۱$ ۴) $x=-۲$

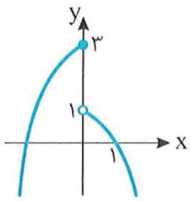
۷۹۲- در شکل مقابل نمودار تابع f رسم شده است. اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)=۳f(a)+۱$، مقدار a کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

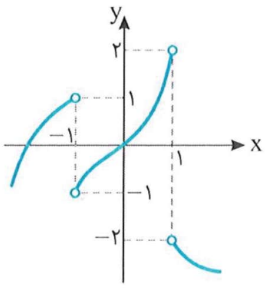
۷۹۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to ۱^+} f(۱-x^۲)-\lim_{x\to ۱^-} f(۱-x^۲)$ کدام است؟



۱) ۳ ۲) -۳

۳) ۲ ۴) -۲

۷۹۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to(-۱)^+} f(\frac{|x|}{[x]})$ کدام است؟



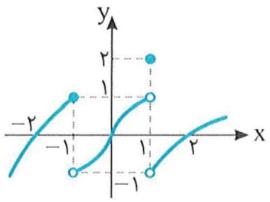
۱) ۱

۲) ۲

۳) -۱

۴) -۲

۷۹۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to ۱^+}(fof)(x)-\lim_{x\to(-۱)^-}(fof)(x)$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۲

۳) ۱

۴) -۲

۷۹۶- تابع $f(x)=[x]+[-x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(-۳,۳)$ حد ندارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) صفر

۷۹۷- تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۳+x^۲ & |x|<۲ \\ x+b & |x|\geq ۲ \end{cases}$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۷۹۸- اگر تابع f در نقطهٔ $x=۲$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۲}\frac{۲f(x)}{f(x)+۱}=۳$، مقدار $\lim_{x\to ۲}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۷۹۹- مجموع حد چپ و حد راست تابع $f(x)=ax[۳x]+x$ درنقطهٔ $x=-۲$ برابر ۱۱ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲۶}$ ۲) $\frac{۲۶}{۵}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۶}$ ۴) $\frac{۲۶}{۱۵}$

۸۰۰- برای کدام مقدار m تابع $f(x)=[۲x]+(m+۱)[-x]$ در نقطهٔ $x=۱$ حد دارد؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) -۲

سؤال
۷۹۱
۷۹۲
۷۹۳
۷۹۴
۷۹۵
۷۹۶
۷۹۷
۷۹۸
۷۹۹
۸۰۰

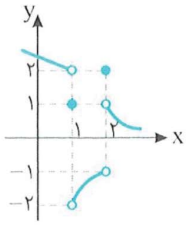
آزمون ۸۱ مفهوم حد و قضایای حد (۳)

سؤال	گام
۸۰۱	۲۲ ۱۲۳ ۳۳۳ ۳۳۵
۸۰۲	۱۲۳ ۱۲۵
۸۰۳	۱۲۳ ۱۲۶
۸۰۴	۱۲۳ ۳۳۶
۸۰۵	۱۲۳ ۱۲۵ ۱۲۷
۸۰۶	۱۲۷
۸۰۷	۱۲۳ ۱۲۴ ۱۲۶ ۱۲۷
۸۰۸	۱۲۷ ۱۳۱
۸۰۹	۱۲۷
۸۱۰	۱۳۱

۸۰۱- چند نقطه وجود دارد که در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{x-[x]}$ قرار ندارد ولی یک همسایگی محذوف آن در دامنهٔ تابع است؟

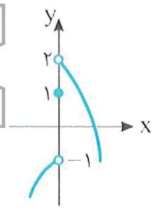
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۸۰۲- نمودار تابع f در شکل مقابل آمده است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x-۱)+\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x+۱)$ کدام است؟



۱) -۳
۲) ۳
۳) ۴
۴) -۴

۸۰۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}[f(x)]-\lim\limits_{x\to ۰^-}[f(x)]$ ۲ کدام است؟

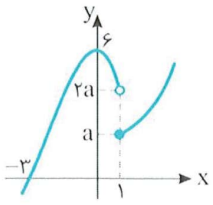


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۰۴- تابع $f(x)=x[x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(-۱,۲)$ حد ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۰۵- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{f(۲-x)}{f(x)}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۴
۳) ۱
۴) ۲

۸۰۶- اگر تابع‌های f و g در نقطهٔ a حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-۲g(x))=۲$ و $\lim\limits_{x\to a}(۲f(x)-۳g(x))=۶$، مقدار $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۶

۸۰۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x[x]+۲a & x>۲ \\ b[-x]+۳x & x<۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ حد داشته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۸۰۸- مقدار $\lim\limits_{x\to(-۳)^-}[x^۲+۲x-۳]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) وجود ندارد.

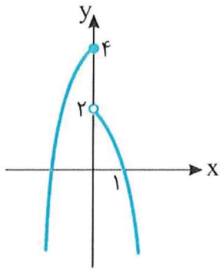
۸۰۹- اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشد، کدام تابع قطعاً در این نقطه حد دارد؟

۱) $y=\frac{x}{f(x)-۱}$ ۲) $y=\frac{f(x)}{x}$ ۳) $y=\frac{f(x)}{۱+f^۲(x)}$ ۴) $y=\frac{۱-f^۲(x)}{f(x)}$

۸۱۰- تابع $y=[۲x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(۰,۳)$ حد ندارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۱۱- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to 1^+} f(1-x^3)+\lim_{x\to 1^-} f(1-x^3)$ کدام است؟



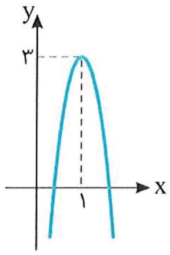
۱) ۴

۲) ۲

۳) ۶

۴) ۸

۸۱۲- نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $\frac{\lim_{x\to 1}[f(x)]}{[\lim_{x\to 1} f(x)]}$ کدام است؟



۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۱

۴) وجود ندارد.

۸۱۳- تابع $f(x)=\frac{x^2}{|x|}+\frac{|x-1|}{x-1}$ در چند نقطه حد ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-2x & |x|<2 \\ x^2 & |x|\geq 2 \end{cases}$ در چند نقطه حد ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۱۵- اگر $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+4} & x<0 \\ \sqrt{x+9} & x>0 \end{cases}$، حاصل $\lim_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۸۱۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & x<2 \\ x^2+3a & x>2 \end{cases}$ در $x=2$ حد داشته باشد، مقدار $\lim_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۸۱۷- اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to a}\frac{3f(x)}{4f(x)+2}=1$، مقدار $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x)-3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۸۱۸- تابع $f(x)=x(x-[x])$ در چند نقطه از بازهٔ $(-2,2)$ حد ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۱۹- مجموع حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{a[2x]}{x^2}+x^2$ در $x=2$ برابر ۱۰ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{8}{7}$ ۴) $\frac{7}{8}$

۸۲۰- اگر تابع f در $x=a$ حد نداشته باشد، کدام‌یک از تابع‌های زیر قطعاً در این نقطه حد ندارد؟

۱) $y=|f(x)|$ ۲) $y=[f(x)]$ ۳) $y=\frac{|x|}{f(x)}$ ۴) $y=|x|+f(x)$

سؤال
۸۱۱
۸۱۲
۸۱۳
۸۱۴
۸۱۵
۸۱۶
۸۱۷
۸۱۸
۸۱۹
۸۲۰

درس دوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا و گنگ

به یاد دارید که اگر تابع‌های f و g در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشند و حد تابع g در این نقطه برابر صفر نباشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

معلوم است که اگر $\lim_{x\to a} g(x)=0$، نمی‌توانیم به شیوهٔ قبل عمل کنیم. با این حال، اگر حد تابع‌های f و g در نقطهٔ $x=a$ برابر صفر باشد و این تابع‌ها در یک همسایگی نقطهٔ $x=a$ تابع ثابت صفر نباشند، ممکن است $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ وجود داشته باشد یا نداشته باشد. این حالت را **حالت مبهم** $\frac{0}{0}$ می‌نامیم. اگر بتوانیم تابعی پیدا کنیم که با تابع $\frac{f}{g}$ در یک همسایگی نقطهٔ $x=a$ برابر باشد و محاسبهٔ حد آن ممکن باشد، به این روش **رفع ابهام** از حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌گوییم.

مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. همچنین $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$. اکنون توجه کنید که تابع‌های $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ و $x+1$ در یک همسایگی نقطهٔ ۱ (به‌جز خود نقطهٔ ۱) برابرند و $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$. بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

توجه کنید که $x-1$ عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج است.

رفع ابهام در تابع‌های گویا

در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا می‌توانیم با استفاده از تجزیه، عامل صفرکننده (یعنی $x-a$) را حذف کنیم. توجه کنید که اگر $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$، آن‌گاه $f(a)=g(a)=0$. پس چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند. یعنی می‌توان نوشت $f(x)=(x-a)F(x)$ و $g(x)=(x-a)G(x)$. پس $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)F(x)}{(x-a)G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$.

تست ۱ مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x}{x^2-2x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -3 ۳) -7 ۴) وجود ندارد.

راه‌حل حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. پس می‌توان نوشت $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+6)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+6}{x-2}=\frac{0+6}{0-2}=-3$.

تست ۲ مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-3}=\frac{1+2}{1-3}=-\frac{3}{2}$$

تست ۳ مقدار $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x^۳+x+۱۰}{x^۳-۳x^۲-۱۲x-۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

راه‌حل توجه کنید که

$$x^۳+x+۱۰=(x^۳+۸)+x+۲=(x+۲)(x^۲-۲x+۴)+x+۲=(x+۲)(x^۲-۲x+۵)$$

$$x^۳-۳x^۲-۱۲x-۴=x^۳+۲x^۲-(۵x^۲+۱۲x+۴)=x^۲(x+۲)-(x+۲)(۵x+۲)=(x+۲)(x^۲-۵x-۲)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۳+x+۱۰}{x^۳-۳x^۲-۱۲x-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۵)}{(x+۲)(x^۲-۵x-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۲x+۵}{x^۲-۵x-۲}=\frac{(-۲)^۲-۲(-۲)+۵}{(-۲)^۲-۵(-۲)-۲}=\frac{۱۳}{۱۲}$$

تست ۴ اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-۱}{x^۳+ax-۸}=\frac{۱}{۱۰}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

راه‌حل ابتدا توجه کنید که چون حد صورت کسر داده شده برابر صفر است و حد مورد نظر برابر صفر نیست، پس حد مخرج هم باید برابر صفر باشد (زیرا اگر عددی غیر از صفر باشد، حد کسر مورد نظر صفر می‌شود). بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}(x^۳+ax-۸)=۰\Rightarrow ۱+a-۸=۰\Rightarrow a=۷$$

تست ۵ مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۵-۱}{x^۷-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

راه‌حل صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم و $x-۱$ را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۵-۱}{x^۷-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x^۶+x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+x^۳+\cdots+۱}{x^۶+x^۵+\cdots+۱}=\frac{۵}{۷}$$

تست ۶ اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{۲x^۲+ax+۴}=\frac{۱}{b}$ مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۷ ۳) -۸ ۴) -۱۰

راه‌حل توجه کنید که حد صورت کسر $\frac{x^۲-۱}{۲x^۲+ax+۴}$ در نقطهٔ $x=۱$ برابر صفر است. بنابراین اگر حد مخرج آن در این نقطه صفر نباشد، حد کسر در این نقطه برابر صفر خواهد بود. با توجه به اینکه $\frac{۱}{b}$ نمی‌تواند صفر باشد، بنابراین باید حد مخرج کسر در $x=۱$ برابر صفر باشد.

$$\lim_{x\to ۱}(۲x^۲+ax+۴)=۲+a+۴=۰\Rightarrow a=-۶$$

اکنون مقدار حد را به‌دست می‌آوریم: $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{۲x^۲-۶x+۴}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{۲(x-۱)(x-۲)}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x+۱}{۲(x-۲)}=-۱$. پس $\frac{۱}{b}=-۱\Rightarrow b=-۱$

بنابراین $a+b=-۷$.

نکته

برای رفع ابهام در حد تابع‌هایی که شامل قدرمطلق یا جزء صحیح هستند، باید ابتدا تکلیف قدرمطلق و جزء صحیح را مشخص کنیم.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۳x+|x|}{۲x+[x]}$ را حساب کنیم. ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=۰$،

$$|x|=x,\quad [x]=۰$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۳x+|x|}{۲x+[x]}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۳x+x}{۲x+۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۴x}{۲x}=۲$$

تست ۷ مقدار $\lim\limits_{x\to ۳^-}(x-\frac{|x-۳|}{x-۳})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که اگر $x\to ۳^-$، آن‌گاه $x-۳<۰$، پس $|x-۳|=-(x-۳)$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۳^-}(x-\frac{|x-۳|}{x-۳})=\lim_{x\to ۳^-}(x+\frac{x-۳}{x-۳})=\lim_{x\to ۳^-}(x+۱)=۳+۱=۴$$

تست ۸ مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x[x]-۴}{x^۲-۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

راه‌حل در سمت راست $x=۲$ تساوی $[x]=۲$ برقرار است. پس

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x[x]-۴}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x(۲)-۴}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲}{x+۲}=\frac{۲}{۲+۲}=\frac{۱}{۲}.$$

رفع ابهام در تابع‌های گنگ

در حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ برای تابع‌هایی که شامل عبارت‌های رادیکالی هستند، می‌توانیم با استفاده از اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر عامل صفرکننده را حذف کنیم.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}$ را حساب کنیم.

روش اول

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱})=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

تست ۹ مقدار $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{۲x-۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

راه‌حل صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم تا عامل $x-۳$ ایجاد شود

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{۲x-۶}=\lim_{x\to ۳}(\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{۲x-۶}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲})=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۱-۴}{۲(x-۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}=\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{۲(\sqrt{x+۱}+۲)}=\frac{۱}{۸}$$

تست ۱۰ مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{\sqrt{۲x-۱}-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

راه‌حل صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{\sqrt{۲x-۱}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x+۳}-۲)(\sqrt{x+۳}+۲)(\sqrt{۲x-۱}+۱)}{(\sqrt{۲x-۱}-۱)(\sqrt{۲x-۱}+۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x+۳-۴)(\sqrt{۲x-۱}+۱)}{(۲x-۱-۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(\sqrt{۲x-۱}+۱)}{۲(x-۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x-۱}+۱}{۲(\sqrt{x+۳}+۲)}=\frac{۱+۱}{۲(۲+۲)}=\frac{۱}{۴}$$

تست ۱۱ مقدار $\lim\limits_{x\to ۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{x-۲۷}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر $x-۲۷=(\sqrt[۳]{x})^۳-۳^۳=(\sqrt[۳]{x}-۳)(\sqrt[۳]{x^۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{x-۲۷}=\lim_{x\to ۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{(\sqrt[۳]{x}-۳)(\sqrt[۳]{x^۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}=\lim_{x\to ۲۷}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹}=\frac{۱}{۹+۳\times ۳+۹}=\frac{۱}{۲۷}$$

تست ۱۲ مقدار $\lim\limits_{x\to -۸}\frac{\sqrt{۱-x}-۳}{۲+\sqrt[۳]{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) -۲

راه‌حل صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت و چاق مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۸}\frac{\sqrt{۱-x}-۳}{۲+\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to -۸}\frac{(\sqrt{۱-x}-۳)(\sqrt{۱-x}+۳)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{(۲+\sqrt[۳]{x})(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})(\sqrt{۱-x}+۳)}=\lim_{x\to -۸}\frac{(۱-x-۹)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{(۸+x)(\sqrt{۱-x}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to -۸}\frac{-(x+۸)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{(۸+x)(\sqrt{۱-x}+۳)}=\lim_{x\to -۸}\frac{-(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{\sqrt{۱-x}+۳}=\frac{-(۴-۲(-۲)+۴)}{۳+۳}=-۲$$

تست ۱۳ اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\sqrt{۳x+a}-۲}=\frac{۱}{b}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۱۱}$

راه‌حل چون حد صورت کسر داده شده برابر صفر است و خود حد برابر صفر نیست $(\frac{۱}{b}\neq ۰)$، پس باید حد مخرج هم صفر باشد (زیرا اگر عددی غیرصفر باشد، حد کسر مورد نظر صفر می‌شود). بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}(\sqrt{۳x+a}-۲)=۰\Rightarrow\sqrt{۳+a}-۲=۰\Rightarrow a=۱$$

اگر $a=۱$، آن‌گاه حد مورد نظر می‌شود:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\sqrt{۳x+۱}-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۱)(\sqrt{۳x+۱}+۲)}{(\sqrt{۳x+۱}-۲)(\sqrt{۳x+۱}+۲)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۱)(\sqrt{۳x+۱}+۲)}{۳x+۱-۴}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)(\sqrt{۳x+۱}+۲)}{۳(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x+۱)(\sqrt{۳x+۱}+۲)}{۳}=\frac{۲(۲+۲)}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

بنابراین $\frac{۱}{b}=\frac{۸}{۳}$، پس $b=\frac{۳}{۸}$. در نتیجه $a+b=\frac{۱۱}{۸}$.

نکته

گاهی برای رفع ابهام حالت $\frac{۰}{۰}$ می‌توانیم از تغییر متغیر استفاده کنیم.

تست ۱۴ مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

راه‌حل اگر فرض کنیم $\sqrt{x}=t$، آن‌گاه $x=t^۲$ و اگر $x\to ۱$، آن‌گاه $t\to ۱$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{t^۲-t}{t^۲\times t-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{t(t-۱)}{(t-۱)(t^۲+t+۱)}=\lim_{t\to ۱}\frac{t}{t^۲+t+۱}=\frac{۱}{۳}$$

تست ۱۵ مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

راه‌حل اگر فرض کنیم $x=t^6$. آن‌گاه وقتی x به سمت ۱ میل می‌کند، t هم به سمت ۱ میل می‌کند و مثبت است. بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t^6}-1}{\sqrt[3]{t^6}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}$$

دست‌گرمی

۱۲۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) وجود ندارد. ۴) صفر

۱۲۴- مقدار $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-64}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۱۲۵- مقدار $\lim\limits_{x\to 1^-}([3x-4]+\frac{|x-1|}{x-1})$ کدام است؟

۱) -3 ۲) ۳ ۳) -2 ۴) ۲

۱۲۶- مقدار $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۱۲۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x^2-49}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{168}$ ۲) $\frac{1}{140}$ ۳) $\frac{1}{112}$ ۴) $\frac{1}{84}$

۸۲۱- مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) 4 ۴) $-\frac{5}{2}$

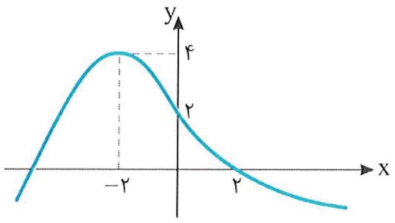
۸۲۲- مقدار $\lim_{x\to -2}\frac{x^4+4x^3+4x^2}{(x+2)^2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۲۳- مقدار $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۲۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to -2}\frac{f^3(x)-64}{f(x)-4}$ کدام است؟



۱) ۱۶ ۲) ۳۲
۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۸۲۵- حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3+3x-4}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1
۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۸۲۶- حاصل $\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-3x+2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -1

۸۲۷- اگر $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+ax+3}=b$ و $b\neq 0$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{3}$ ۲) -2 ۳) -1 ۴) -4

۸۲۸- مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-2x^3}}{x^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

۸۲۹- حاصل $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-4}}{x^2-6x+5}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{16}$ ۴) $-\frac{3}{16}$

۸۳۰- حاصل $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

سؤال
۸۲۱ ۸۲۲ ۸۲۳ ۸۲۴ ۸۲۵ ۸۲۶ ۸۲۷ ۸۲۸ ۸۲۹ ۸۳۰

آزمون ۸۴ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا و گنگ (۲)

-۸۳۱ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x+1)^3+(2x-1)^3}{4x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۸۳۲ مقدار $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{3x^4-9x^2}{x-\sqrt{3}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۳) $18\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}$

-۸۳۳ مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4-27x}{x^2-x-6}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{27}{5}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{81}{5}$

-۸۳۴ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^4-x^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

-۸۳۵ مقدار $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-x[x]-3}{x[x]-6}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) صفر ۴) -1

-۸۳۶ مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{48}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

-۸۳۷ حد تابع $f(x)=\frac{x-\sqrt{x+2}}{3x-\sqrt{15x+6}}$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{6}{5}$

-۸۳۸ مقدار $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

-۸۳۹ حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -6 ۴) -12

-۸۴۰ اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{ax+b}-3}=\frac{1}{2}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۳

سؤال	گام
۸۳۱	۱۳۲
۸۳۲	۱۳۲
۸۳۳	۱۳۲
۸۳۴	۱۳۲
۸۳۵	۱۳۲ ۱۳۳
۸۳۶	۱۳۴
۸۳۷	۱۳۴
۸۳۸	۱۳۴ ۱۳۵
۸۳۹	۱۳۴ ۱۳۵
۸۴۰	۱۳۴

درس سوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای حدهای مثلثاتی

نکته

برای رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ در برخی حدهای مثلثاتی، می‌توانیم از اتحادها استفاده کنیم، به‌طوری که پس از حذف عامل صفرکننده، حد مورد نظر قابل محاسبه باشد.

مثال: می‌خواهیم $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos^3 x}$ را حساب کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x),\quad 1-\cos^3 x=(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)$$

اکنون توجه کنید که اگر $x\to 0$، آن‌گاه $(1-\cos x)\to 0$، پس $1-\cos x$ عامل صفرکننده در حد مورد نظر است، که پس از حذف آن می‌توانیم حد مورد نظر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+\cos x+\cos^2 x}=\frac{2}{3}$$

تست ۱ مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

راه‌حل توجه کنید که حد مورد نظر حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. چون $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$، پس

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(2\sin 2x)=2\times 1=2$$

تست ۲ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

راه‌حل توجه کنید که حد مورد نظر حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. با استفاده از اتحادها، عامل صفرکننده را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

تست ۳ مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر

راه‌حل چون $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$، $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$، پس

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{۱+\sin ۲x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{(\sin x+\cos x)^۲}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۰$$

تست ۴ مقدار $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{\cos x-\sqrt{\cos ۲x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

راه‌حل صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{\cos x-\sqrt{\cos ۲x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x(\cos x+\sqrt{\cos ۲x})}{(\cos x-\sqrt{\cos ۲x})(\cos x+\sqrt{\cos ۲x})}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x(\cos x+\sqrt{\cos ۲x})}{\cos^۲ x-\cos ۲x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x(\cos x+\sqrt{\cos ۲x})}{\cos^۲ x-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x(\cos x+\sqrt{\cos ۲x})}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}(\cos x+\sqrt{\cos ۲x})=۲$$

تست ۵ مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۴x\cos ۲x}{(\cos^۴ x-\sin^۴ x)^۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

راه‌حل عبارت را ساده می‌کنیم تا عامل صفرکننده را حذف کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۴x\cos ۲x}{(\cos^۴ x-\sin^۴ x)^۲}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۲\sin ۲x\cos ۲x\cos ۲x}{\underbrace{(\cos^۲ x-\sin^۲ x)^۲}_{\cos ۲x}\underbrace{(\cos^۲ x+\sin^۲ x)^۲}_{۱}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۲\sin ۲x\cos^۲ ۲x}{\cos^۲ ۲x}=۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\sin ۲x=۲$$

تست ۶ مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۱-۴\sin^۲ x}{\cos ۳x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$\cos ۳x=\cos(۲x+x)=\cos ۲x\cos x-\sin ۲x\sin x=(۱-۲\sin^۲ x)\cos x-۲\sin^۲ x\cos x=\cos x(۱-۴\sin^۲ x)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۱-۴\sin^۲ x}{\cos ۳x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۱-۴\sin^۲ x}{\cos x(۱-۴\sin^۲ x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۱}{\cos x}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

نکته چند حد مهم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to ۰}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b},\quad \lim_{x\to ۰}\frac{\tan ax}{bx}=\lim_{x\to ۰}\frac{ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$$

تست ۷ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin 2x}{x}\times\frac{\sin 3x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=1\times 2\times 3=6$$

نکته هم‌ارزی ۱۳۸

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\sin f(x)}=1,\quad \lim_{x\to a}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\tan f(x)}=1$$

در این صورت می‌گوییم توابع $f(x)$، $\sin f(x)$ و $\tan f(x)$ در یک همسایگی نقطهٔ $x=a$ هم‌ارز یکدیگرند. در محاسبهٔ برخی حالت‌های مبهم $\frac{0}{0}$ می‌توانیم به جای $\sin f(x)$ و $\tan f(x)$ هم‌ارز آن‌ها، یعنی $f(x)$ را قرار دهیم و سپس حد را حساب کنیم.

تست ۸ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{2x+\sin x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

راه‌حل توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{2x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x}{2x+x}=-\frac{1}{3}$$

تست ۹ مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{4}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sin(x-2)}{x-2}\times\frac{1}{(x+2)}\right)=1\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

تست ۱۰ مقدار $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $\sin 1$ ۴) صفر

راه‌حل توجه کنید که $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x=0$، پس اگر $x\to\pi$، آن‌گاه $\sin(\sin x)$ با $\sin x$ هم‌ارز است و در نتیجه

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\sin x}=1$$

نکته ۱۳۹

توجه کنید که $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. پس اگر $x\to 0$، آن‌گاه $1-\cos x$ با $2\sin^2\frac{x}{2}$ هم‌ارز است، که خودش با $2(\frac{x}{2})^2$، یعنی $\frac{x^2}{2}$ هم‌ارز است.

بنابر این در محاسبهٔ برخی حدها (وقتی که $x\to 0$) می‌توان به جای $1-\cos x$ قرار داد $\frac{x^2}{2}$. در حالت کلی اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$، به جای $1-\cos f(x)$ می‌توانیم قرار دهیم $\frac{f^2(x)}{2}$. همین‌طور، به جای $\cos f(x)$ می‌توانیم قرار دهیم $1-\frac{1}{2}f^2(x)$.

تست ۱۱ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -2

راه‌حل به جای $1-\cos x$ هم‌ارز آن $\frac{x^2}{2}$ را قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}}=2$$

تست ۱۲ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 6x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{4}{9}$

راه‌حل به جای $1-\cos 4x$ و $1-\cos 6x$ هم‌ارزهای آن‌ها را قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(4x)^2}{2}}{\frac{(6x)^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{18x^2}=\frac{4}{9}$$

تست ۱۳ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -8 ۳) -6 ۴) -4

راه‌حل توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{(6x)^2}{2}-1+\frac{(4x)^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-18x^2-1+8x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-10x^2}{x^2}=-10$$

نکته ۱۴۰

برای محاسبهٔ برخی حدهای مثلثاتی می‌توانیم به‌صورت‌های زیر از تغییر متغیر استفاده کنیم.

- گاهی می‌توان یک عبارت مثلثاتی را به عنوان متغیر جدید در نظر گرفت.
- اگر $x\to a$، تغییر متغیر $t=x-a$ ممکن است مفید باشد.

تست ۱۴ مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{-\pi}{2}}\frac{1+\sin^3 x}{\sin^2 x+3\sin x+2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر فرض کنیم $t=\sin x$. آن‌گاه وقتی که x به سمت $-\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند، t به سمت -1 میل می‌کند. بنابراین

$$\lim_{x\to \frac{-\pi}{2}}\frac{1+\sin^3 x}{\sin^2 x+3\sin x+2}=\lim_{t\to -1}\frac{1+t^3}{t^2+3t+2}=\lim_{t\to -1}\frac{(1+t)(1-t+t^2)}{(t+1)(t+2)}=\lim_{t\to -1}\frac{1-t+t^2}{t+2}=3$$

تست ۱۵ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{4}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $t=\sqrt{\cos x}$، در این صورت، اگر $x\to 0$، آن‌گاه $t\to 1$ و حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{1-\cos^2 x}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-t}{1-t^4}=\lim_{t\to 1}\frac{t(t-1)}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t(t-1)}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}=\lim_{t\to 1}\frac{-t}{(1+t)(1+t^2)}=-\frac{1}{4}$$

تست ۱۶ مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\pi-2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $t=\pi-2x$. در این صورت $x=\frac{\pi-t}{2}$. وقتی که x به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند، t به سمت صفر میل می‌کند، در نتیجه

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\pi-2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 3(\frac{\pi-t}{2})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}-\frac{3t}{2})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\frac{3t}{2}}{t}=-\frac{3}{2}$$

تست ۱۷ مقدار $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x}{\sin\pi x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{\pi}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $t=x+1$. در این صورت $x=t-1$ و اگر x به سمت -1 میل کند، t به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{\sin\pi x}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{\sin\pi x}=\lim_{t\to 0}\frac{(t-1)t}{\sin(\pi(t-1))}=\lim_{t\to 0}\frac{t(t-1)}{\sin(\pi t-\pi)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t(t-1)}{-\sin\pi t}=-(\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\pi t})(\lim_{t\to 0}(t-1))=-(\frac{1}{\pi})(-1)=\frac{1}{\pi}$$

تست ۱۸ مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\sqrt{\frac{1-\sin x}{2x-\pi}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $2x-\pi=t$. در این صورت $x=\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}$، و اگر $x\to(\frac{\pi}{2})^+$، آن‌گاه $t\to 0^+$. اکنون می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\sqrt{\frac{1-\sin x}{2x-\pi}}=\lim_{t\to 0^+}\sqrt{\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2})}{t}}=\lim_{t\to 0^+}\sqrt{\frac{1-\cos\frac{t}{2}}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{t}{4}}{t}}=\lim_{t\to 0^+}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{t}{4}}{(\frac{t}{4})^2}\times\frac{t}{16}}=\sqrt{2\times 0}=0$$

دست‌گرمی

۱۲۸- مقدار $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) صفر

۱۲۹- مقدار $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) -2

۱۳۰- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

۱۳۱- مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\sin 2x}{x-\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۲- مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^4-16}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۱۳۳- مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۳۴- مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{4x-\pi}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

آزمون ۸۵

حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای حدهای مثلثاتی (۱)

۸۴۱- مقدار $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{\sin x}{|\sin x|}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۸۴۲- مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos \pi x}{\sin 2\pi x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

۸۴۳- مقدار $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sqrt{2}\sin x}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۸۴۴- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt[4]{2}$

۸۴۵- اگر $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin 2x}{3x}+f(x))=3$، مقدار $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۸۴۶- مقدار $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^4-1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{4}$

۸۴۷- مقدار $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۸۴۸- حاصل $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 4x}{x^2}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۸۴۹- مقدار $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin \pi x}{x^2-2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) π ۴) 2π

۸۵۰- حاصل $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{4x+\pi}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

سؤال
۸۴۱ ۸۴۲ ۸۴۳ ۸۴۴ ۸۴۵ ۸۴۶ ۸۴۷ ۸۴۸ ۸۴۹ ۸۵۰

آزمون ۸۶ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای حدهای مثلثاتی (۲)

سؤال	گام
۸۵۱	۱۳۳ ۱۳۶
۸۵۲	۱۳۶
۸۵۳	۱۳۳ ۱۳۶
۸۵۴	۱۳۶ ۱۳۸ ۱۳۹
۸۵۵	۱۳۸
۸۵۶	۱۳۷ ۱۴۰
۸۵۷	۱۳۷ ۱۳۹
۸۵۸	۱۳۷
۸۵۹	۱۳۷ ۱۴۰
۸۶۰	۱۳۶

۸۵۱- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{\sin^2 x-[\sin^2 x]}{\cos x-[\cos x]}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۸۵۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\sin 4x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۵۳- حد چپ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{\sin 2x}$ در $x=\frac{3\pi}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۸۵۴- مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{(1-\cos^3 x)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۸۵۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x-\sin x}{\sin 4x-3\sin 2x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) -2 ۴) $-\frac{7}{3}$

۸۵۶- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(\cos x)}{1+\cos 2x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۴

۸۵۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۵۸- مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x+\sin x}-\sqrt{\cos x-\sin x}}{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۸۵۹- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\cos 5x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $-\frac{5}{4}$

۸۶۰- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

آزمون ۸۷ — حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای حدهای مثلثاتی (۳)

۸۶۱- حاصل $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۸۶۲- حاصل $\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-2\sqrt{2}$

۸۶۳- مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۸۶۴- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^4 x-\frac{1}{4}}{\sin 4x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

۸۶۵- حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2-|x|\sin 6x}{5x^2+|x|\sin 4x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۸۶۶- مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{3})}{1-x^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{9}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{12}$

۸۶۷- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{\tan^2 x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۶۸- حاصل $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۸۶۹- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۸۷۰- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\cos 4x}$ کدام است؟

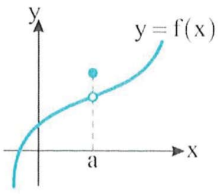
۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{48}$ ۴) $\frac{1}{64}$

سؤال	گا
۸۶۱	۳۶
۸۶۲	۳۶
۸۶۳	۳۶
۸۶۴	۳۶
۸۶۵	۳۳ ۳۸
۸۶۶	۳۸
۸۶۷	۳۸ ۳۹
۸۶۸	۳۷
۸۶۹	۳۸ ۳۹ ۴۰
۸۷۰	۳۶ ۴۰

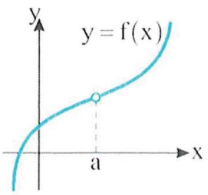
درس چهارم: پیوستگی

مفهوم پیوستگی

پیش از این دیدیم برای اینکه حد تابع در نقطه‌ای وجود داشته باشد، لزومی ندارد تابع در این نقطه تعریف شده باشد. حتی ممکن است تابعی در نقطه‌ای حد داشته باشد و در این نقطه تعریف شده باشد، اما حد آن در این نقطه با مقدارش در این نقطه برابر نباشد. نمودار تابع‌هایی از این نوع را در شکل‌های مقابل نشان داده‌ایم:

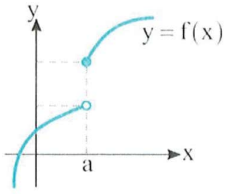


تابع f در نقطهٔ a حد دارد، اما حد آن با مقدارش در این نقطه برابر نیست.



تابع f در نقطهٔ a حد دارد، اما در این نقطه تعریف نشده است.

البته، حتی ممکن است تابعی در نقطه‌ای حد نداشته باشد، مانند تابعی که نمودارش را در شکل مقابل رسم کرده‌ایم.



تابع f در نقطهٔ a حد ندارد.

معلوم است که در نمودار هر یک از تابع‌های بالا یک «گسستگی» وجود دارد. به نظر می‌رسد برای اینکه در نمودار تابع در نقطهٔ a گسستگی وجود نداشته باشد، باید تابع در نقطهٔ a حد داشته باشد و مقدار این حد با مقدار تابع در a برابر باشد.

تعریف

تابع f را در نقطهٔ a پیوسته می‌نامند، به شرطی که $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته نباشد، می‌گوییم در نقطهٔ a ناپیوسته است.

تذکر

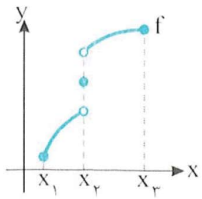
از تعریف پیوستگی معلوم می‌شود برای اینکه تابع f در نقطهٔ a پیوسته باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشند:

۱) تابع f در نقطهٔ a تعریف شده باشد. ۲) تابع f در نقطهٔ a حد داشته باشد. ۳) مقدار حد تابع f با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

اگر یکی از این سه شرط برقرار نباشد، تابع f در نقطهٔ a ناپیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در نقطهٔ صفر پیوسته نیست. زیرا در این نقطه تعریف نشده است.

تابع f را که نمودارش در شکل مقابل رسم شده است، در نظر بگیرید. معلوم است که حد راست تابع f در نقطهٔ x_1 وجود دارد و با مقدار تابع f در نقطهٔ x_1 برابر است. همچنین حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ x_2 وجود دارند، اما مقدار این حدها با مقدار تابع در نقطهٔ x_2 برابر نیست. همین‌طور، حد چپ تابع در نقطهٔ x_3 وجود دارد و با مقدار تابع در نقطهٔ x_3 برابر است. برای توصیف وضعیت تابع f در نقطه‌های x_1، x_2 و x_3 از تعریف زیر استفاده می‌کنیم.



تعریف

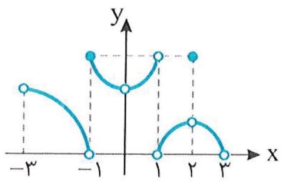
- **می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) به شرطی که** $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.
- **می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) به شرطی که** $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$.

مثال: تابع $f(x)=[x]$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}[x]=3=f(3)$. بنابراین تابع f در نقطهٔ ۳ از راست پیوسته است.

نکته

فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطهٔ a تعریف شده باشد. در این صورت تابع f در نقطهٔ a پیوسته است اگر و فقط اگر در نقطهٔ a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

تست ۱ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. این تابع در چند نقطه از بازهٔ $(-۳,۳)$ ناپیوسته است؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل این تابع در نقطهٔ $x=-۱$ حد ندارد، پس ناپیوسته است. در نقطهٔ $x=۰$ تعریف نشده است، پس ناپیوسته است. در نقطهٔ $x=۱$ حد ندارد و تعریف هم نشده است، پس ناپیوسته است. در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد، تعریف هم شده است ولی مقدار تابع با مقدار حد تابع برابر نیست و تابع در این نقطه هم ناپیوسته است. پس تابع f در چهار نقطه از بازهٔ $(-۳,۳)$ پیوسته نیست.

تست ۲ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x>۲ \\ ۵ & x=۲ \\ x^۲+bx-۱ & x<۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل برای آنکه تابع f در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در این نقطه برابر مقدار تابع در این نقطه، یعنی ۵ باشند:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۵ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} (ax+b)=۵ \Rightarrow ۲a+b=۵$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۵ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} (x^۲+bx-۱)=۵ \Rightarrow ۴+۲b-۱=۵ \Rightarrow b=۱,$$

بنابراین $۲a=۵-۱=۴$، یعنی $a=۲$.

تست ۳ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & x<۰ \\ a & x=۰ \\ [x]+b & x>۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

راه‌حل ابتدا حدهای چپ و راست تابع در $x=۰$ را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} \frac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}}=\lim_{x\to ۰^-} \frac{\sin x}{\sqrt{۲}|\sin x|}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

(می‌دانیم در یک همسایگی چپ $x=۰$، مقدار $\sin x$ منفی است)

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} (b+[x])=b+\lim_{x\to ۰^+} [x]=b$$

در نتیجه $b=f(۰)=a=-\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}$، بنابراین $a+b=-\sqrt{۲}$.

تعریف پیوستگی روی بازه

۱) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است، به شرطی که f در هر نقطه از بازهٔ (a,b) پیوسته باشد.

۲) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است، به شرطی که f روی بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطهٔ a از سمت راست و در نقطهٔ b از سمت چپ پیوسته باشد.

۳) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ پیوسته است، به شرطی که f روی بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطهٔ a از سمت راست پیوسته باشد.

۴) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ پیوسته است، به شرطی که f روی بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و در نقطهٔ b از سمت چپ پیوسته باشد.

۵) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $(a,+\infty)$ پیوسته است، به شرطی که f در هر نقطه از بازهٔ $(a,+\infty)$ پیوسته باشد.

۶) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $[a,+\infty)$ پیوسته است، به شرطی که f روی بازهٔ $(a,+\infty)$ پیوسته باشد و در نقطهٔ a از راست پیوسته باشد.

۷) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $(-\infty,a)$ پیوسته است، به شرطی که f در هر نقطه از بازهٔ $(-\infty,a)$ پیوسته باشد.

۸) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $(-\infty,a]$ پیوسته است، به شرطی که f روی بازهٔ $(-\infty,a)$ پیوسته باشد و در نقطهٔ a از چپ پیوسته باشد.

۹) می‌گوییم تابع f روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است، به شرطی که f در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

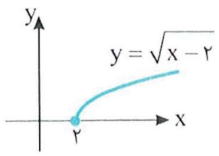
۱۴۳ **نکته**

- توابع چندجمله‌ای و تابع‌های $y=|x|$ ، $y=\sqrt[3]{x}$ ، $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ و $(a>0)\ y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.
- تابع $y=\sqrt{x}$ روی دامنه‌اش، یعنی $[0,+\infty)$، پیوسته است.
- تابع $(a>0, a\neq 1)\ y=\log_a x$ روی دامنه‌اش، یعنی $(0,+\infty)$، پیوسته است.
- تابع‌های گویا در هر نقطه از دامنه‌شان پیوسته‌اند و روی هر بازه‌ای که زیرمجموعهٔ دامنهٔ آن‌ها باشد، پیوسته‌اند.

تست ۴ تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ روی کدام بازه پیوسته است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(-\infty,2]$ ۴) $\mathbb{R}$

راه‌حل دامنهٔ تابع f بازهٔ $[2,+\infty)$ است. این تابع در تمام نقاط بازهٔ $(2,+\infty)$ پیوسته است و در نقطهٔ $x=2$ از راست پیوسته است، پس تابع f روی بازهٔ $[2,+\infty)$ پیوسته است. نمودار این تابع به‌صورت مقابل است.



تست ۵ تابع $f(x)=\begin{cases}2 & x=1\\ ax+b & 1<x<2\\ x^2+3a & 2\le x<3\end{cases}$ روی بازهٔ $[1,3)$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) 3 ۴) -3

راه‌حل تابع f روی بازهٔ $[1,3)$ پیوسته است، پس در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است و در نقطهٔ $x=1$ پیوستگی راست دارد:

$$f(1)=2,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b\Rightarrow a+b=2$$

$$f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+3a)=4+3a,\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b\Rightarrow 4+3a=2a+b\Rightarrow a-b=-4$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=2\\ a-b=-4\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-1$ و $b=3$ و در نتیجه $ab=-3$.

تست ۶ برای چه مقدارهایی از m تابع $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-2mx+2-m}$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی پیوسته است؟

۱) $m\in(-2,1)$ ۲) $m\in(1,2)$ ۳) $m\in(-2,2)$ ۴) $m\in(-1,4)$

راه‌حل این تابع فقط وقتی روی $\mathbb{R}$ پیوسته است که مخرج کسر $\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-2mx+2-m}$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد. در این صورت تابع در تمام اعداد حقیقی تعریف شده است. اکنون باید مقدار m را طوری پیدا کنیم که معادلهٔ $x^2-2mx+2-m=0$ جواب حقیقی نداشته باشد. در نتیجه باید $\Delta=(-2m)^2-4(2-m)=4m^2+4(m-2)=4(m^2+m-2)<0$. بنابراین $(m-1)(m+2)<0$، در نتیجه $-2<m<1$.

۱۴۴ **نکته** پیوستگی تابع جزء صحیح

تابع $f(x)=[x]$ در اعداد صحیح پیوسته نیست و در اعداد غیرصحیح پیوسته است. پس این تابع روی هر بازه به‌صورت $[a,b]$ که شامل عددی صحیح نباشد، پیوسته است و اگر a عدد صحیحی باشد، آن‌گاه این تابع روی بازهٔ $[a,a+1)$ پیوسته است.

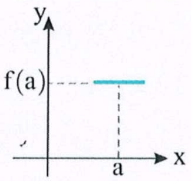
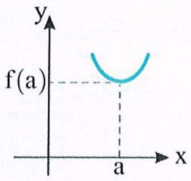
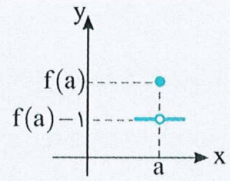
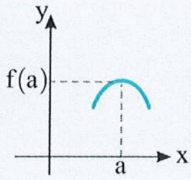
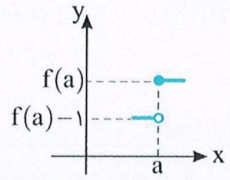
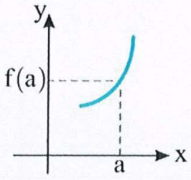
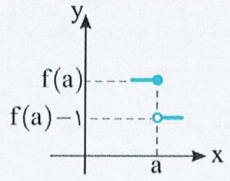
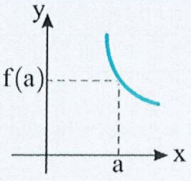
تست ۷ تابع $f(x)=[x]$ روی بازهٔ $[a,3)$ پیوسته است. کمترین مقدار ممکن a کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

راه‌حل اگر a عددی کمتر از ۲ باشد، آن‌گاه ۲ عضوی از بازهٔ $[a,3)$ است، که تابع f در آن پیوسته نیست. بنابراین $a\ge 2$. اگر $a=2$، آن‌گاه معلوم است که تابع f روی بازهٔ $[2,3)$ پیوسته است. بنابراین کمترین مقدار ممکن a برابر ۲ است.

نکته ۱۴۵

فرض کنید تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد و $f(a)$ عدد صحیحی باشد. اگر مقادیر تابع f در اطراف این نقطه بزرگ‌تر یا مساوی $f(a)$ باشند، آن‌گاه تابع $g(x)=[f(x)]$ در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است. در غیر این صورت تابع $g(x)=[f(x)]$ در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است.

توضیحات	$g(x)=[f(x)]$	$y=f(x)$
تابع g در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است.		
تابع g در نقطهٔ $x=a$ نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ.		
تابع g در نقطهٔ $x=a$ فقط پیوستگی راست دارد.		
تابع g در نقطهٔ $x=a$ فقط پیوستگی چپ دارد.		

تذکر: اگر $f(a)$ عدد صحیحی نباشد، در تمام موارد بالا تابع $g(x)=[f(x)]$ در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است.

تست ۸

تابع $f(x)=[2x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(1,3)$ ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل

اگر تابع f در نقطهٔ x_0 پیوسته نباشد، $2x_0$ عددی صحیح است. از طرف دیگر، $2x_0$ روی بازهٔ $(1,3)$ به ازای $x_0=\frac{3}{2}$، $x_0=2$ و $x_0=\frac{5}{2}$ عددی صحیح می‌شود. بنابراین تابع f در سه نقطهٔ $\frac{3}{2}$، ۲ و $\frac{5}{2}$ از بازهٔ $(1,3)$ پیوسته نیست.

قضیه ۱۴۶

اگر تابع‌های f و g در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشند، آن‌گاه

الف) تابع‌های $f+g$، $f-g$ و $f\times g$ در این نقطه پیوسته‌اند.

ب) تابع $\frac{f}{g}$ با شرط $g(a)\neq 0$ در این نقطه پیوسته است.

نکته ۱۴۷

فرض کنید تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد و تابع g در این نقطه ناپیوسته باشد.

الف) تابع‌های $f+g$، $f-g$ و $\frac{g}{f}$ در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته‌اند.

ب) اگر $f(a)=0$ و تابع g در $x=a$ تعریف شده باشد و در این نقطه حد چپ و حد راست داشته باشد، آن‌گاه تابع $f\times g$ در این نقطه پیوسته است.

پ) اگر $f(a)=0$ و تابع g در $x=a$ تعریف شده باشد و در این نقطه حد چپ و حد راست داشته باشد و $g(a)\neq 0$، آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ در این نقطه پیوسته است.

ت) اگر $f(a)\neq 0$، آن‌گاه تابع‌های $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته‌اند.

تست ۹ تابع $f(x)=x[x]$ روی بازهٔ $[-1,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار ممکن k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل تابع $y=x$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است. تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است. تابع $f(x)=x[x]$ که از ضرب توابع بالا به دست می‌آید، در تمام نقاط صحیح به جز $x=0$ ناپیوسته است. در نقطهٔ $x=0$ این تابع پیوسته است: $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$. از طرف دیگر تابع f در نقطهٔ $x=-1$ پیوستگی راست دارد. بنابراین تابع روی بازهٔ $[-1,1)$ پیوسته است و حداکثر مقدار ممکن k برابر ۱ است.

تست ۱۰ تابع $f(x)=(x^2-6a)[x]$ روی بازهٔ $[2,4)$ پیوسته است. مقدار $f(\frac{4a}{3})$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) -5 ۴) -10

راه‌حل تابع $y=[x]$ در نقطهٔ $x=3$ از بازهٔ $(2,4)$ ناپیوسته است. برای اینکه تابع f روی بازهٔ $[2,4)$ پیوسته باشد باید در تمام نقاط بازهٔ $(2,4)$ پیوسته باشد. پس تابع f در نقطهٔ $x=3$ پیوسته است. بنابراین باید مقدار تابع $g(x)=x^2-6a$ در نقطهٔ $x=3$ برابر صفر باشد: $g(3)=9-6a=0\Rightarrow a=\frac{3}{2}$

پس $f(x)=(x^2-9)[x]$ و در نتیجه $f(\frac{4a}{3})=f(2)=(4-9)[2]=-10$.

نکته ۱۴۸

اگر تابع‌های f و g در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته باشند، آن‌گاه توابع $f+g$، $f-g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است در این نقطه پیوسته باشند.

تست ۱۱ تابع $f(x)=[\frac{x}{3}]-[\frac{x}{4}]$ در نقطهٔ $x=12$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱) پیوسته است. ۲) فقط پیوستگی راست دارد.
۳) فقط پیوستگی چپ دارد. ۴) نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست.

راه‌حل توابع $y=[\frac{x}{3}]$ و $y=[\frac{x}{4}]$ هر دو در نقطهٔ $x=12$ ناپیوسته‌اند. چون $\frac{12}{3}$ و $\frac{12}{4}$ عددهای صحیحی هستند ولی تابع f در این نقطه پیوسته است:

$$f(12)=4-3=1,\quad \lim_{x\to 12^-} f(x)=3-2=1,\quad \lim_{x\to 12^+} f(x)=4-3=1$$

دست‌گرمی

-۱۳۵ تابع $f(x)=\begin{cases} x-\frac{|x-2|}{x-2} & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ در $x=2$.

۱) فقط پیوستگی راست دارد. ۲) فقط پیوستگی چپ دارد.
۳) پیوسته است. ۴) نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ.

-۱۳۶ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} 2x+a & x\geq 3 \\ 16-ax^2 & x<3 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim_{x\to a} f(x)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۵

-۱۳۷ چند عدد صحیح مانند m می‌توان پیدا کرد که تابع $f(x)=\frac{3x^2+x-1}{x^2-2mx+m+6}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

-۱۳۸ تابع $f(x)=[\frac{1}{x}]$ روی بازهٔ $(\frac{1}{10},1)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

آزمون ۸۸ پیوستگی (۱)

۸۷۱- تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{x}$ در کدام نقطه پیوسته است؟

۱) $x=۱$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=-۲$ ۴) $x=۰$

۸۷۲- تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x>۲ \\ ۴ & x=۲ \\ x^۲-x & x<۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱) پیوسته است.
۲) فقط پیوستگی چپ دارد.
۳) فقط پیوستگی راست دارد.
۴) نه پیوستگی چپ دارد، نه پیوستگی راست.

۸۷۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ۷-m^۲x^۲ & x<۳ \\ x^۲-۶ & x\geq ۳ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته باشد، حاصل‌ضرب مقدارهای ممکن m کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۲۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $-\frac{۴}{۹}$ ۴) $-\frac{۴}{۲۵}$

۸۷۴- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{x-۲} & x<-۱ \\ \frac{x+۲a}{x+۲} & x\geq -۱ \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $-\frac{۳}{۷}$ ۴) $-\frac{۲}{۷}$

۸۷۵- تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x-[x] & x<۲ \\ a & x=۲ \\ x+۲b & x>۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۸۷۶- تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲-a+۴ & x\leq ۱ \\ \frac{x^۲-۱}{x-\sqrt{x}} & x>۱ \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

۸۷۷- اگر تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۳x+۲}}$ روی بازهٔ $(-\infty, a]$ پیوسته باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

۸۷۸- تابع $f(x)=[x]-|[x]|$ روی بازهٔ $(-۴, ۴)$ در چند نقطهٔ صحیح ناپیوسته است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۷۹- تابع $f(x)=[\frac{x+۱}{۴}]$ روی بازهٔ $(-۱, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۵

۸۸۰- تابع $f(x)=[\sqrt{x}]$ در بازهٔ $(۱, k)$ فقط یک نقطهٔ ناپیوستگی دارد. حداکثر مقدار k کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۶

سؤال	گا
۸۷۱	۲، ۴۱، ۴۳
۸۷۲	۲۶، ۲۷، ۴۱
۸۷۳	۲۶، ۲۷، ۴۱
۸۷۴	۲۶، ۲۷، ۱، ۲
۸۷۵	۶، ۷، ۱
۸۷۶	۷، ۴، ۱
۸۷۷	۳، ۸
۸۷۸	۴
۸۷۹	۴
۸۸۰	

آزمون ۸۹ — پیوستگی (۲)

۸۸۱- تابع $f(x)=[\frac{x}{۲}]+[\frac{-x}{۲}]$ در نقطهٔ $x=۴$، ...

۱) پیوسته است.
۲) فقط از راست پیوسته است.
۳) فقط از چپ پیوسته است.
۴) حد دارد ولی پیوسته نیست.

۸۸۲- تابع $f(x)=[\frac{\sqrt{x}}{۲}]$ در کدام نقطه پیوسته است؟

۱) $x=۴$ ۲) $x=۹$ ۳) $x=۱۶$ ۴) $x=۶۴$

۸۸۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۲-۳x & x<-۱\\ |۳x-a| & x\geq -۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته باشد، مجموع مقدارهای ممکن a کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۱۴ ۳) ۶ ۴) ۱۴

۸۸۴- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sin ۲x-a & x<\frac{\pi}{۴}\\ ۱+ab & x=\frac{\pi}{۴}\\ -۲-\sin ۲x & x>\frac{\pi}{۴}\end{cases}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) -۵

۸۸۵- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۳x & x<-۱\\ ax-b & -۱\leq x<۲\\ x^۲-۱ & x\geq ۲\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۸۶- اگر تابع $f(x)=\frac{x^۲-|x|}{x^۲-۶x+m+۱}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، m چند عدد طبیعی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۸۸۷- اگر تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x^۲-ax+b}$ فقط در نقطه‌های $x=۴$ و $x=-۳$ ناپیوسته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱۱ ۲) -۷ ۳) -۱ ۴) ۵

۸۸۸- تابع $f(x)=[۲x+\frac{۱}{۲}]$ در چند نقطه از بازهٔ $(-۱,۲)$ ناپیوسته است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۸۹- چند عدد صحیح مانند k می‌توان پیدا کرد که تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+kx+۴}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۶

۸۹۰- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=\sqrt{۷-|x-۲|}$ روی آن پیوسته است، کدام است؟

۱) $[۵,۹]$ ۲) $[-۵,۹]$ ۳) $[-۹,-۵]$ ۴) $[-۹,۵]$

سؤال	گام
۸۸۱	۱۳۱ ۱۴۱
۸۸۲	۱۳۱ ۱۴۱
۸۸۳	۱۲۶ ۱۲۷ ۱۴۱
۸۸۴	۱۲۶ ۱۲۷ ۱۴۱
۸۸۵	۱۲۶ ۱۲۷ ۱۴۱ ۱۴۲
۸۸۶	۲۲ ۱۴۳ ۲۹۴
۸۸۷	۲۲ ۱۴۳ ۲۹۶
۸۸۸	۱۴۵
۸۸۹	۲۲ ۱۴۳ ۲۹۶
۸۹۰	۲۲ ۱۴۳ ۳۲۷

آزمون ۹۰ — پیوستگی (۳)

۸۹۱- کدام تابع در $x=1$ پیوسته است؟

۱) $y=[\sin(\pi x)]$ ۲) $y=[\cos(\pi x)]$ ۳) $y=[\sin(\frac{\pi x}{2})]$ ۴) $y=[\cos(\frac{\pi x}{2})]$

۸۹۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^3-9} & x<2\\ \frac{1}{x^2+x-2} & x\geq 2\end{cases}$ چند نقطهٔ ناپیوستگی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۹۳- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x^4=x^2\\ x^2+2x & x^4\neq x^2\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۹۴- مجموع نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\frac{x^4+2}{x|x-4|-3}$ کدام است؟

۱) $6+\sqrt{7}$ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) $6-\sqrt{7}$

۸۹۵- اگر تابع $f(x)=\frac{|x|-\sqrt[3]{x}}{x^2+(2m-1)x+1}$ فقط یک نقطهٔ ناپیوستگی داشته باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) m ای وجود ندارد.

۸۹۶- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{x}}}{x-1} & x\neq 1\\ a & x=1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) هیچ مقدار a

۸۹۷- تابع $f(x)=x([x]-1)+[-x]$ در چند نقطهٔ صحیح پیوستگی چپ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۸۹۸- هرگاه تابع $f(x)=(4x^2-2ax-7)[2x-5]$ در $x=-\frac{7}{2}$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -6 ۲) -7 ۳) -8 ۴) -9

۸۹۹- تابع $f(x)=\frac{[x]}{\sqrt{4x-x^2}}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

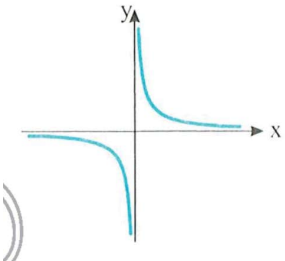
۹۰۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 8x}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x}} & x\neq 0\\ 16 & x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶

سؤال	گا
۸۹۱	۴۵
۸۹۲	۴۱ ۴۳
۸۹۳	۴۱ ۴۳
۸۹۴	۴۳
۸۹۵	۳ ۱۴
۸۹۶	۱
۸۹۷	۱
۸۹۸	۵ ۷
۸۹۹	۳
۹۰۰	۴ ۷ ۱

درس پنجم: حد بی‌نهایت

مفهوم حد بی‌نهایت



نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در شکل مقابل رسم کرده‌ایم. از روی این نمودار معلوم است که وقتی x از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع f بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند و به هیچ عدد حقیقی‌ای نزدیک نمی‌شوند، به‌طوری‌که از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر می‌شوند. یعنی، به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت مانند M، می‌توان x ای پیدا کرد که به اندازهٔ کافی به صفر نزدیک باشد و $f(x)>M$. بنابراین معلوم است که تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد راست ندارد. در این وضعیت، می‌گوییم حد راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) است.

همین‌طور معلوم است که وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع f کوچک و کوچک‌تر می‌شوند و به هیچ عدد حقیقی‌ای نزدیک نمی‌شوند، به‌طوری‌که از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر می‌شوند. یعنی، به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت مانند M، می‌توان x ای پیدا کرد که به اندازهٔ کافی به صفر نزدیک باشد و $f(x)<-M$. بنابراین معلوم است که تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد چپ ندارد. در این وضعیت می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=0$ نامتناهی (منفی بی‌نهایت) است.

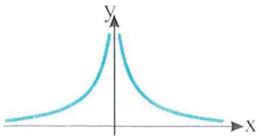
تعریف

فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست نقطهٔ a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f بی‌کران افزایش یابند، یعنی از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی از سمت راست به a نزدیک شده باشند، می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$. در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a حد راست نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد.

تعریف

فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست نقطهٔ a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f بی‌کران کاهش یابند، یعنی از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی از سمت راست به a نزدیک شده باشند، می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$. در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a حد راست نامتناهی (منفی بی‌نهایت) دارد.

- به طریق مشابه، $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ تعریف می‌شوند.
- اکنون به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ در شکل مقابل توجه کنید. از روی این نمودار معلوم است که وقتی x به صفر میل می‌کند، مقادیر تابع f بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند و به هیچ عدد حقیقی‌ای نزدیک نمی‌شوند. به‌طوری که از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر می‌شوند. بنابراین معلوم است که تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد ندارد. در این وضعیت، می‌گوییم حد تابع f در نقطهٔ $x=0$ نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) است.



تعریف

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطهٔ a تعریف شده باشد. اگر مقادیر تابع f بی‌کران افزایش یابند، یعنی از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی به a نزدیک شده باشند، می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a حد نامتناهی (مثبت بی‌نهایت) دارد.

- به‌طور مشابه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ تعریف می‌شود.

قضایای حدهای نامتناهی

قضیه ۱

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و برعکس.

قضیه ۲ اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & n\text{ زوج باشد}\\ -\infty & n\text{ فرد باشد}\end{cases}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$$

تذکر توجه کنید که $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$ نه $-\infty$ است و نه $+\infty$.

قضیه ۳ اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$، آن‌گاه تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ a حد نامتناهی (بی‌نهایت) دارد و علامت بی‌نهایت با توجه به علامت L و علامت مقادیر تابع g در یک همسایگی محذوف a تعیین می‌شود. این قضیه برای حد چپ و حد راست در نقطهٔ a هم درست است.

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{(x-2)^2}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-2}{(x+1)^2}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sin^2 x}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x+1}{\sin x+1}=+\infty$$

تست ۱ حاصل $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-2}{x^2-x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

راه‌حل توجه کنید که $\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2$ و $\lim_{x\to 0^+}(x^2-x)=0$. چون مقادیر x^2-x وقتی $x\to 0^+$ منفی هستند ($x^2-x=\underbrace{x}_{\text{مثبت}}\underbrace{(x-1)}_{\text{منفی}}$)، پس $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-2}{x^2-x}=+\infty$.

تست ۲ حاصل $\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}$ و $\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}$ به‌ترتیب کدام است؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $+\infty$ و $-\infty$ ۳) صفر و $-\infty$ ۴) صفر و $+\infty$

راه‌حل توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0}{x}=\lim_{x\to 0^+}0=0\ ,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

تست ۳ مقدار $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

راه‌حل حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. برای رفع ابهام، توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2(x-1)-(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-1}{0^-\times 2}=+\infty$$

تست ۴ اگر $\lim_{x\to 3^+}\frac{ax^2+3}{x-3}=-\infty$، حدود a کدام است؟

۱) $a<-\frac{1}{3}$ ۲) $a<0$ ۳) $a>0$ ۴) $a>-\frac{1}{3}$

راه‌حل اگر $x\to 3^+$، آن‌گاه $x-3\to 0^+$، بنابراین برای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x\to 3^+}(ax^2+3)<0\Rightarrow 9a+3<0\Rightarrow a<-\frac{1}{3}$$

تست ۵ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-۳}{x^۲+ax+b}=-\infty$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۸ ۴) -۸

راه‌حل چون حد صورت برابر -۱ است، پس باید حد مخرج برابر صفر باشد تا حد کسر نامتناهی شود. همچنین چون حد چپ و حد راست هر دو $-\infty$ هستند، پس باید علامت عبارت $x^۲+ax+b$ در دو طرف $x=۲$ مثبت باشد و این در صورتی امکان‌پذیر است که $x=۲$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد. پس می‌توان یکی از دو راه زیر را به‌کار برد:

راه‌حل اول $x=۲$ مخرج را صفر می‌کند و دلتای مخرج صفر است:

$$\begin{cases} ۴+۲a+b=۰\Rightarrow b=-۴-۲a \\ \Delta=a^۲-۴b=۰\Rightarrow a^۲-۴(-۴-۲a)=۰\Rightarrow a^۲+۸a+۱۶=۰\Rightarrow (a+۴)^۲=۰\Rightarrow a=-۴ \end{cases}$$

بنابراین $b=-۴-۲\times(-۴)=۴$، پس $a-b=-۸$.

راه‌حل دوم عبارت مخرج باید به‌صورت $(x-۲)^۲$ باشد:

$$x^۲+ax+b=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۴, b=۴$$

پس $a-b=-۸$.

تست ۶ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{[x]-k}{x-۲}=+\infty$، حدود k کدام است؟

۱) $۰<k<۱$ ۲) $۱<k<۲$ ۳) $۲<k<۳$ ۴) $k<۲$

راه‌حل برای آنکه حد مورد نظر برابر $+\infty$ باشد، باید حد چپ و حد راست در $x=۲$ هر دو برابر $+\infty$ باشند:

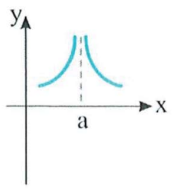
$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{[x]-k}{x-۲}=\frac{۱-k}{۰^-}=+\infty\Rightarrow ۱-k<۰\Rightarrow k>۱,\quad \lim_{x\to ۲^+}\frac{[x]-k}{x-۲}=\frac{۲-k}{۰^+}=+\infty\Rightarrow ۲-k>۰\Rightarrow k<۲$$

بنابراین $۱<k<۲$.

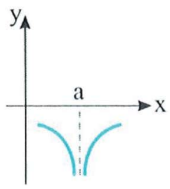
۱۵۱

نکته

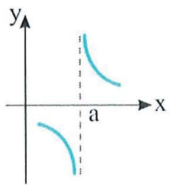
در نمودارهای زیر حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ یا حد چپ و حد راست آن در این نقطه نامتناهی است.



$\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$

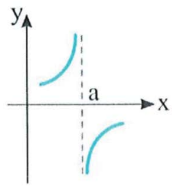


$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$

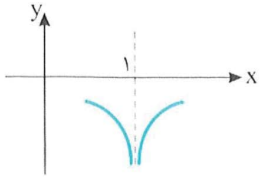
$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$

تست ۷ قسمتی از نمودار تابع f به‌صورت شکل مقابل است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند ضابطهٔ تابع f باشد؟



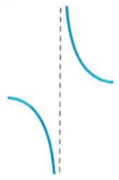
۱) $f(x)=\frac{۱}{(x+۱)^۲}$ ۲) $f(x)=\frac{-۱}{(x+۱)^۲}$

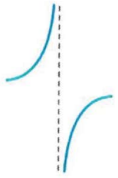
۳) $f(x)=\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ ۴) $f(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}$

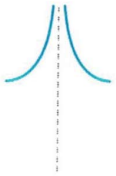
راه‌حل برای اینکه نمودار تابع شبیه شکل مورد نظر شود، وقتی $x\to ۱^-$ یا $x\to ۱^+$ باید $f(x)\to-\infty$. فقط در گزینهٔ (۴).

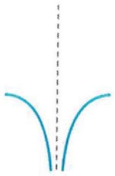
$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)=-\infty$$

تست ۸ نمودار تابع $f(x)=\frac{x-1}{(x+2)^2}$ در یک همسایگی محذوف -2 به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل حد تابع را در نقطهٔ $x=-2$، یعنی ریشهٔ مخرج کسر حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=-2$ به‌صورت گزینهٔ (۴) است.

تست ۹ نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+2ax+b}$ در اطراف خط $x=2$ به‌صورت 

است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۴

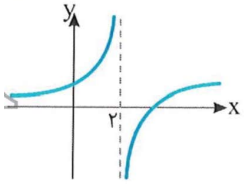
راه‌حل چون حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ برابر $+\infty$ است، باید $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد. به عبارت دیگر مخرج باید به‌صورت $(x-2)^2$ باشد، زیرا فقط در این صورت مقادیر تابع در دو طرف $x=2$ هم‌علامت خواهند بود. پس

$$x^2+2ax+b=(x-2)^2 \Rightarrow x^2+2ax+b=x^2-4x+4 \Rightarrow a=-2\ ,\ b=4 \Rightarrow a+b=2$$

اعمال روی حدود نامتناهی

قضیه ۴ اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$ یا $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

تست ۱۰ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار کدام حد برابر صفر نیست؟



۱) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{f(x)}$ ۲) $\lim_{x\to 2^+}\frac{-x}{f(x)}$

۳) $\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]}{f(x)}$ ۴) $\lim_{x\to 2^+}[f(x)]$

راه‌حل در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) حد صورت کسر عددی حقیقی است و حد مخرج کسر نامتناهی است، زیرا $\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$.

بنابراین در هر سه مورد مقدار حد برابر صفر است.

تست ۱۱ حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) ۱

راه‌حل توجه کنید که $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\tan x=+\infty$ و $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty$. بنابراین $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{x}{\tan x}=0$ و $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{x}{\tan x}=0$.

در نتیجه $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0$.

قضیه ۵ فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L$. در این صورت

الف) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$

ب) اگر $L>0$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=+\infty$. اگر $L<0$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=-\infty$.

این قضیه برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز درست است. همین‌طور، اگر $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$، با تغییر «$+\infty$» به «$-\infty$» یا برعکس، باز هم این قضیه درست است.

قضیه ۶ فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$. در این صورت

الف) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$

ب) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=+\infty$

تذکر

- با شرایط قضیهٔ (۶)، $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است.
- برای حالت‌هایی که $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ یا $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$ می‌توان قضیه و تذکر مشابهی نوشت.

نکته

اعمال روی بی‌نهایت‌ها را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد (L عددی حقیقی است):

۱) $L+(+\infty)=+\infty$

۲) $L-(+\infty)=-\infty$

۳) $L+(-\infty)=-\infty$

۴) $L-(-\infty)=+\infty$

۵) $L\times(+\infty)=\begin{cases}+\infty & L>0\\ -\infty & L<0\end{cases}$

۶) $L\times(-\infty)=\begin{cases}-\infty & L>0\\ +\infty & L<0\end{cases}$

۷) $\frac{L}{+\infty}=0$

۸) $\frac{L}{-\infty}=0$

۹) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

۱۰) $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

۱۱) $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$

۱۲) $(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$

۱۳) $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$

۱۴) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ حالت مبهم

تست ۱۲ حاصل $\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}(2x-\tan 2x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

راه‌حل توجه کنید که

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+} 2x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\tan 2x=\lim_{t\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan t=-\infty$$

در نتیجه $\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}(2x-\tan 2x)=\frac{\pi}{2}-(-\infty)=+\infty$.

تست ۱۳ حاصل $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{1-\tan x}{1-\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

راه‌حل توجه کنید که

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{1-\tan x}{1-\sin x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\left((1-\tan x)\left(\frac{1}{1-\sin x}\right)\right)=(1-(-\infty))\left(\frac{1}{0^+}\right)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

تست ۱۴ مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) $+\infty$

راه‌حل فرض کنید $t=x-\frac{\pi}{2}$. در این صورت اگر $x\to\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $t\to 0$ و چون $x=t+\frac{\pi}{2}$، پس

$$\frac{\tan 3x}{\tan x}=\frac{\tan(3t+\frac{3\pi}{2})}{\tan(t+\frac{\pi}{2})}=\frac{-\cot 3t}{-\cot t}=\frac{\tan t}{\tan 3t}.$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan t}{\tan 3t}=\frac{1}{3}$.

دست‌گرمی

۱۳۹- حاصل $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{1}{x+2}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) -6 ۴) $+\infty$

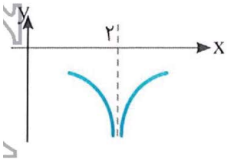
۱۴۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[-x]}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[-x]}{x}$ به‌ترتیب کدام است؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $+\infty$ و $-\infty$ ۳) $+\infty$ و صفر ۴) $-\infty$ و صفر

۱۴۱- اگر $\lim\limits_{x\to 3}\frac{ax^3+3}{(x-3)^2}=-\infty$، حدود a کدام است؟

۱) $a<-\frac{1}{9}$ ۲) $a<0$ ۳) $a>0$ ۴) $a>-\frac{1}{9}$

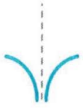
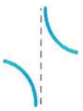
۱۴۲- قسمتی از نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند ضابطهٔ تابع f باشد؟



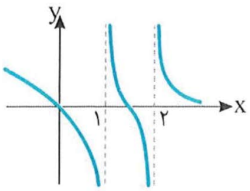
۱) $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$ ۲) $f(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}$

۳) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ ۴) $f(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$

۱۴۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ در یک همسایگی محذوف نقطهٔ $x=1$ به کدام شکل است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۴۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}f(\frac{x+1}{x})$ کدام است؟



۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$

۳) صفر ۴) ۱

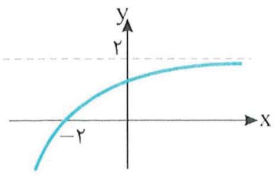
۱۴۵- مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\tan x}{\cos 4x-1}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) -1

آزمون ۹۱ — حد بی‌نهایت (۱)

سؤال	گام
۹۰۱	۱۴۹ ۱۵۰
۹۰۲	۱۵۰
۹۰۳	۱۲۶ ۱۵۰
۹۰۴	۱۵۰
۹۰۵	۱۵۰
۹۰۶	۱۵۰
۹۰۷	۱۲۶ ۱۵۰
۹۰۸	۱۳۳ ۱۳۷ ۱۵۰
۹۰۹	۱۳۳ ۱۵۰
۹۱۰	۱۲۶ ۱۵۱

۹۰۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{۴}{f(x)}$ کدام است؟



۱) $-\infty$ ۲) صفر
۳) ۲ ۴) $+\infty$

۹۰۲- حاصل $\lim\limits_{x\to۳}\frac{۳}{|x-۳|}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) ۳ ۴) $+\infty$

۹۰۳- حاصل $\lim\limits_{x\to۱^-}\frac{[-x]}{x-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۹۰۴- تابع $f(x)=\frac{x^۲-۳}{x^۳-۴x}$ در چند نقطه حد چپ نامتناهی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۰۵- حاصل $\lim\limits_{x\to۰^-}\frac{x}{x^۳-x^۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۹۰۶- اگر $f(x)=\frac{x}{\sin x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)$ به‌ترتیب کدام است؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $-\infty$ و $-\infty$ ۳) $+\infty$ و $-\infty$ ۴) $-\infty$ و $+\infty$

۹۰۷- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{[\cos x]}{\cos\frac{x}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) صفر

۹۰۸- حاصل $\lim\limits_{x\to۰^-}\frac{x[x]}{\sin^۲ x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) -۱ ۴) صفر

۹۰۹- حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{۱}{\tan(\pi(x-[x]))}$ در $x=۱$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

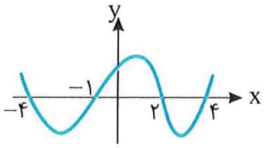
۱) $+\infty$ و $-\infty$ ۲) $+\infty$ و $+\infty$ ۳) $-\infty$ و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و $-\infty$

۹۱۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{۴[x]-۳}{x-۱}$ در اطراف خط $x=۱$ چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

آزمون ۹۲ — حد بی‌نهایت (۲)

۹۱۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست است؟



۱) $\lim\limits_{x\to(-۴)^-}\frac{-۲}{f(x)}=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{۱}{f(x)}=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to۴^-}\frac{-۲}{f(x)}=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to۲^+}\frac{۱}{f(x)}=+\infty$

۹۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{۲x+۱}{x^۲+x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۹۱۳- اگر $f(x)=\frac{۳[x]-۴}{x-۲}$، مقدارهای $\lim\limits_{x\to۲^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to۲^-}f(x)$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $+\infty$ و $-\infty$ ۳) $-\infty$ و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و $-\infty$

۹۱۴- تابع $f(x)=\frac{x^۳-x^۲}{x^۲-۳x+۲}$ در چند نقطه حد چپ نامتناهی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۱۵- مقدار $\lim\limits_{x\to۱^-}\frac{x^۲-۳x+۲}{-۲x^۲+۴x-۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۹۱۶- مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۳})^+}\frac{۳x+۱}{۲\cos(\pi x)-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) صفر

۹۱۷- اگر $\lim\limits_{x\to۲}\frac{x-۳}{ax^۲+۶x+b}=+\infty$، مقدار ab کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

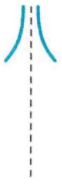
۹۱۸- حاصل $\lim\limits_{x\to۰^-}\frac{\sin ۲x}{۱-\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۹۱۹- مقادیر حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{\cos x}{۱-\sin x}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $-\infty$ و $-\infty$ ۳) $+\infty$ و $-\infty$ ۴) $-\infty$ و $+\infty$

۹۲۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x^۲-۳x+۲}$ در اطراف خط $x=۱$ چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

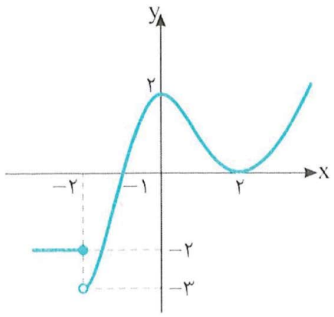
۴) 

سؤال
۹۱۱ ۹۱۲ ۹۱۳ ۹۱۴ ۹۱۵ ۹۱۶ ۹۱۷ ۹۱۸ ۹۱۹ ۹۲۰

آزمون ۹۳ حد بی‌نهایت (۳)

سؤال	گام
۹۲۱	۱۴۹ ۱۵۰
۹۲۲	۱۵۰
۹۲۳	۱۲۶ ۱۵۰
۹۲۴	۱۲۶ ۱۳۲ ۱۵۰ ۳۳۳
۹۲۵	۱۳۴ ۱۵۰
۹۲۶	۷۵ ۷۷ ۱۵۰
۹۲۷	۸۰ ۱۵۰
۹۲۸	۱۳۳ ۱۵۰
۹۲۹	۱۳۶ ۱۵۰
۹۳۰	۱۵۱

۹۲۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\frac{۱}{f(x)+۳}=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{f(x)-۲}=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۱}{f(x)}=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{۱}{f(x)}=-\infty$

۹۲۲- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x-۱}{x^۳-۲x^۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۹۲۳- حاصل $\lim\limits_{x\to ۵^-}\frac{[x]^۲-۲۵}{x-۵}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) ۱۰ ۴) $+\infty$

۹۲۴- تابع $f(x)=\frac{x^۲-x}{x-[x]}$ در چند نقطهٔ صحیح حد چپ متناهی و حد راست متناهی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۲۵- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}}{x-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) -۱

۹۲۶- حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{۱}{\sin ۲x-۲\sin x}$ در $x=۰$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $-\infty$ و $-\infty$ ۳) $+\infty$ و $-\infty$ ۴) $-\infty$ و $+\infty$

۹۲۷- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{x}{\sin x-\cos x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) $\sqrt{۲\pi}$ ۴) صفر

۹۲۸- مجموع حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{۱}{x+\tan(\frac{\pi[x]x}{۲})}$ در $x=۱$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) صفر

۹۲۹- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{\sin x-\cos x}{۱-\sin ۲x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) صفر

۹۳۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x-۲|}{۲-|x|}$ در اطراف خط $x=-۲$ چگونه است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

آزمون ۹۴ — حد بی‌نهایت (۴)

۹۳۱- اگر تابع $f(x)=\frac{x^۲+۱}{ax^۲+bx+۲}$ در $x=۲$ و $x=-۳$ حد چپ یا حد راست نامتناهی داشته باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۹۳۲- اگر $f(x)=\frac{۱}{۲x-\sqrt{x+۳}}$، مقدارهای $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ و $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $-\infty$ و $-\infty$ ۳) $+\infty$ و $-\infty$ ۴) $-\infty$ و $+\infty$

۹۳۳- اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^۲+mx+n}{x^۲-۴}=\frac{۵}{۲}$، مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) -۱۴ ۲) -۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۹۳۴- اگر $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x+a}-\sqrt{x+b}}{x-۱}=\frac{۱}{۶}$، مقدار ab کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۲ ۳) ۵۶ ۴) ۷۲

۹۳۵- اگر $f(x)=\frac{۱}{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}$، مقادیر $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ و $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $-\infty$ ۲) $-\infty$ و $+\infty$ ۳) $+\infty$ و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و $-\infty$

۹۳۶- اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{۳[x]+k}{x-۲}=+\infty$، حدود k کدام است؟

۱) $-۶<k<-۳$ ۲) $k>-۶$ ۳) $k<-۳$ ۴) $k>-۳$

۹۳۷- اگر $\lim_{x\to a}\frac{۲}{۱+f(x)}=۱$ و $\lim_{x\to a}\frac{g(x)+۱}{f(x)-۱}=۲$، مقدار $\lim_{x\to a}\frac{f(x)+۱}{g(x)-۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۹۳۸- اگر $\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{x^۳-ax^۲+ax-۱}=+\infty$، مقدار a کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۹۳۹- مقادیر حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi[x]}{x})$ در $x=۲$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

۱) $+\infty$ و $-\infty$ ۲) $-\infty$ و $+\infty$ ۳) صفر و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و صفر

۹۴۰- اگر $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}\frac{bx-a}{a\sin x+\cos x}=+\infty$، حدود b کدام است؟

۱) $b<-\frac{۴}{\pi}$ ۲) $b>-\frac{۴}{\pi}$ ۳) $b<\frac{۴}{\pi}$ ۴) $b>\frac{۴}{\pi}$

سؤال
۹۳۱
۹۳۲
۹۳۳
۹۳۴
۹۳۵
۹۳۶
۹۳۷
۹۳۸
۹۳۹
۹۴۰

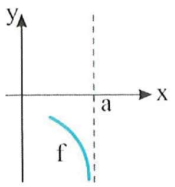
درس ششم: مجانب قائم

تعریف

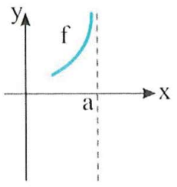
خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می‌نامند، به شرطی که دست‌کم یکی از شرط‌های زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty\,,\quad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty\,,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty\,,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

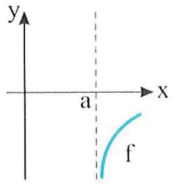
در تمام نمودارهای زیر خط $x=a$ مجانب قائم نمودار تابع f است:



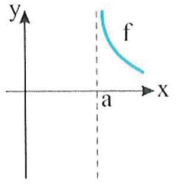
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



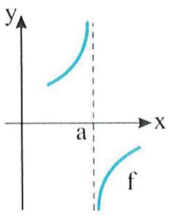
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

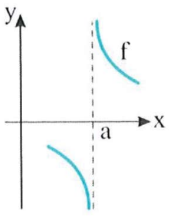


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$



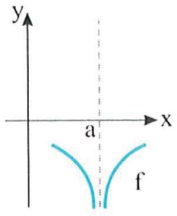
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

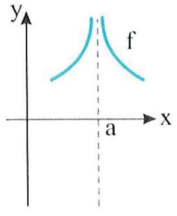


$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



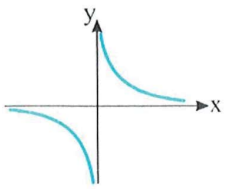
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$



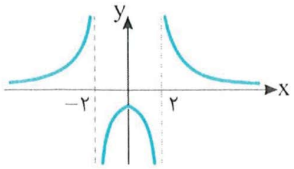
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

مثال: خط $x=0$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ است، زیرا

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$



مثال: خطوط $x=2$ و $x=-2$ مجانب‌های قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{|x|-2}$ هستند. به نمودار این تابع که از روی نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ به‌دست آمده است، توجه کنید:

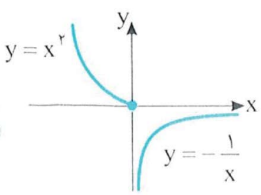


$f(x)=\frac{1}{|x|-2}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{|x|-2}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{|x|-2}=-\infty$$

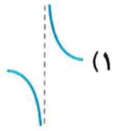
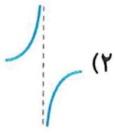
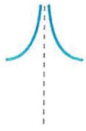
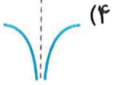
$$\lim_{x\to (-2)^+}\frac{1}{|x|-2}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to (-2)^-}\frac{1}{|x|-2}=+\infty$$

مثال: خط $x=0$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{-1}{x} & x>0\\ x^2 & x\le 0\end{cases}$، زیرا



$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=-\infty$$

تست ۱ نمودار تابع $f(x)=\frac{x-1}{(x+2)^2}$ در اطراف مجانب قائم آن به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

راه‌حل حد تابع را در نقطهٔ $x=-2$، یعنی ریشهٔ مخرج کسر حساب می‌کنیم: $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=\frac{-3}{0^+}=-\infty$. بنابراین $x=-2$ مجانب قائم نمودار تابع f است و این نمودار در اطراف آن به‌صورت گزینهٔ (۴) است.

تست ۲ نمودار تابع $f(x)=\frac{x-3}{x^2+2ax+b}$ در اطراف مجانب قائم خود به‌صورت  است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که $\lim\limits_{x\to2}(x-3)=-1$ و چون حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ برابر $-\infty$ است، باید $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد. به عبارت دیگر مخرج باید به‌صورت $(x-2)^2$ باشد. زیرا فقط در این صورت مقادیر تابع در دو طرف $x=2$ هم‌علامت خواهند بود. پس

$$x^2+2ax+b=(x-2)^2\Rightarrow x^2+2ax+b=x^2-4x+4\Rightarrow a=-2\ ,\ b=4$$

پس $a+b=2$.

نکته **تعیین مجانب‌های قائم در توابع گویا** ۱۵۴

برای تعیین مجانب‌های قائم نمودارهای توابعی به شکل $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن f و g توابعی چندجمله‌ای هستند، ابتدا ضابطهٔ تابع را طوری ساده می‌کنیم که عامل مشترکی در صورت و مخرج کسر وجود نداشته باشد، در این صورت با اطمینان می‌توانیم بگوییم اگر $x=a$ ریشهٔ مخرج باشد، آن‌گاه خط $x=a$ مجانب قائم نمودار تابع است، زیرا در این نقطه حد صورت کسر عددی غیر صفر و حد مخرج آن صفر است.

تست ۳ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{(x^2-3x+2)(x+2)}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل صورت و مخرج کسر را تجزیه، سپس آن را ساده می‌کنیم: $f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-1}$ ، $x\neq\pm2$. پس خط $x=1$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

تست ۴ به‌ازای چند مقدار صحیح مانند m نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+mx+4}$ مجانب قائم ندارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

راه‌حل اگر مخرج ریشه نداشته باشد، این تابع مجانب قائم ندارد. پس باید $\Delta=m^2-16<0\Rightarrow m^2<16\Rightarrow-4<m<4$

بنابراین به‌ازای مقادیر صحیح عضو مجموعهٔ $\{\pm3,\pm2,\pm1,0\}$ نمودار تابع مجانب قائم ندارد.

تست ۵ به‌ازای چند مقدار m نمودار تابع $f(x)=\frac{x-2}{4x^2-mx+1}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

راه‌حل

در حالتی که مخرج ریشهٔ مضاعف دارد. نمودار تابع یک مجانب قائم دارد: $\Delta=0\Rightarrow m^2-16=0\Rightarrow m=\pm 4$

همچنین اگر $x=2$ ریشهٔ مخرج باشد، مخرج عامل $x-2$ دارد که با صورت کسر ساده می‌شود. در این‌صورت مخرج درجهٔ اول است و فقط یک ریشه دارد. در نتیجه نمودار تابع یک مجانب قائم دارد: $x\neq 2$. $f(x)=\frac{x-2}{(x-2)(4x-\frac{1}{2})}=\frac{2}{8x-1}$. $4(2)^2-2m+1=0\Rightarrow m=\frac{17}{2}$

در این حالت $x=\frac{1}{8}$ مجانب قائم است. بنابراین به‌ازای سه مقدار m ، نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

نکته — تعیین مجانب‌های قائم در توابع غیرگویا — ۱۵۵

در توابع به شکل $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز که f یا g توابع چندجمله‌ای نیستند اگر در نقطه‌ای حد مخرج کسر برابر صفر و حد صورت عددی غیر صفر باشد، نمودار تابع در آن نقطه مجانب قائم دارد. مشخص است برای اینکه حد صورت و مخرج تعریف شوند، لازم است که تابع حداقل در سمت چپ یا سمت راست نقطه تعریف شده باشد.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{(x+2)\sqrt{x}}$ فقط یک مجانب قائم دارد که خط $x=0$ است. توجه کنید که تابع در اطراف نقطهٔ $x=-2$ تعریف نشده است، چون $D_f=(0,+\infty)$.

تست ۶ — تعداد مجانب‌های قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل

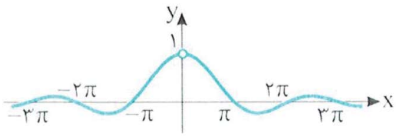
ابتدا توجه کنید که $D_f=[1,+\infty)-\{2\}$. ریشه‌های مخرج $x=0$. $x=2$ هستند و تابع در اطراف نقطهٔ $x=0$ تعریف نشده است. پس $x=2$ تنها خط مجانب قائم نمودار تابع f است.

۱۵۶

تذکر

در تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ که در اطراف نقطهٔ $x=a$ تعریف شده است. اگر در $x=a$ علاوه‌بر مخرج کسر، حد صورت کسر نیز صفر باشد. باید پس از رفع ابهام، حد تابع در نقطهٔ $x=a$ را پیدا کنیم. اگر این حد نامتناهی باشد، خط $x=a$ مجانب قائم نمودار تابع است.

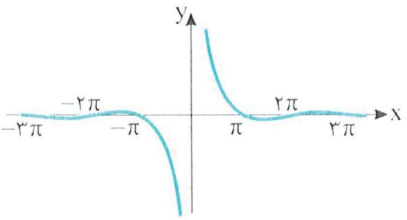
مثال: در تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. $x=0$ ریشهٔ صورت و مخرج کسر است و می‌دانیم $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. بنابراین خط $x=0$ مجانب قائم نمودار تابع نیست.



مثال: در تابع $g(x)=\frac{\sin x}{x^2}$. $x=0$ ریشهٔ صورت و مخرج کسر است. همچنین

$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2}=-\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x})=+\infty$

بنابراین خط $x=0$ مجانب قائم نمودار تابع است.



تست ۷ — نمودار تابع $f(x)=\frac{4x-\pi}{\sin x-\cos x}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

ریشه‌های مخرج در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{5\pi}{4}$ که $x=\frac{5\pi}{4}$ ریشهٔ صورت کسر نیست. پس خط $x=\frac{5\pi}{4}$ مجانب قائم نمودار تابع است. $x=\frac{\pi}{4}$ ریشهٔ صورت نیز هست، پس خط $x=\frac{\pi}{4}$ مجانب قائم نمودار تابع نیست. زیرا

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x-\pi}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x-\pi}{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4(x-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

پس نمودار تابع f در بازهٔ $[0,2\pi]$ یک مجانب قائم دارد.

تست ۸ نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-x^۲}}{x-[x]}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $D_f=(۰,۱)$. این تابع در ریشه‌های مخرج که تابع اطراف آن‌ها تعریف شده است، ممکن است مجانب قائم داشته باشد:

$$x-[x]=۰\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۱$$

اکنون برای آنکه تعیین کنیم هر یک از ریشه‌های مخرج، مجانب قائم هست یا خیر، باید حد چپ تابع در نقطهٔ $x=۱$ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۰$ را پیدا کنیم:

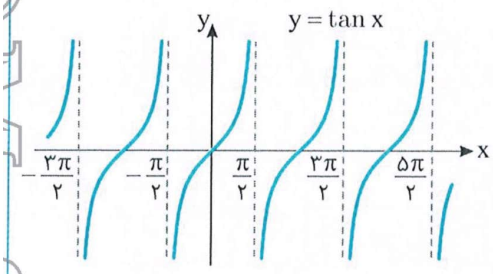
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x-x^۲}}{x-[x]}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x-x^۲}}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}\sqrt{۱-x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x-x^۲}}{x-[x]}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x-x^۲}}{x-۰}=۰,$$

تابع در نقطهٔ $x=۰$ حد راست نامتناهی دارد، بنابراین خط $x=۰$ مجانب قائم نمودار تابع است.

نکته **مجانب‌های قائم تابع تانژانت**

برای نمودار تابع $f(x)=\tan x$ خطوط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$، مجانب قائم هستند.



اگر $a=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $k\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a^-}\tan x=+\infty,\quad \lim_{x\to a^+}\tan x=-\infty$$

تست ۹ معادلهٔ مجانب‌های قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۲) $k\pi$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲k\pi$

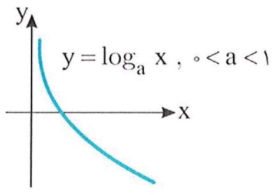
راه‌حل ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}=\frac{۲\sin x\cos x}{۲\cos^۲ x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

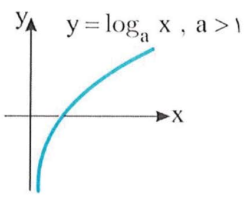
بنابراین خط‌های $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k\in\mathbb{Z})$ مجانب قائم نمودار تابع f هستند.

تعیین مجانب‌های قائم در توابع لگاریتمی

خط $x=۰$ مجانب قائم نمودار تابع $y=\log_a x$ است. به نمودار تابع توجه کنید:

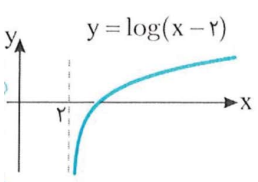


$$\lim_{x\to ۰^+}\log_a x=+\infty$$



$$\lim_{x\to ۰^+}\log_a x=-\infty$$

مثال: تابع $f(x)=\log(x-۲)$ را در نظر می‌گیریم. دامنهٔ تابع به صورت $D_f=(۲,+\infty)$ است و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۲$ نامتناهی است: $\lim_{x\to ۲^+}\log(x-۲)=-\infty$. بنابراین $x=۲$ مجانب قائم نمودار تابع است.



۱۵۸

نکته

در یکی از دو صورت زیر نمودار تابع $y=\log_a f(x)$ مجانب قائم به معادلهٔ $x=k$ دارد:

الف) $x\to k\Rightarrow f(x)\to 0^+$ ب) $x\to k\Rightarrow f(x)\to+\infty$

تست ۱۰

نمودار تابع $f(x)=\log(\frac{x-1}{x+1})$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل

دامنهٔ این تابع به‌صورت $D_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ است. اکنون تابع $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-1)^-} g(x)=+\infty\Rightarrow \lim_{x\to(-1)^-}\log(\frac{x-1}{x+1})=\log(+\infty)=+\infty,\quad \lim_{x\to 1^+} g(x)=0\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\log(\frac{x-1}{x+1})=\log(0^+)=-\infty$$

پس $x=1$ و $x=-1$ مجانب‌های قائم نمودار تابع $f(x)=\log(\frac{x-1}{x+1})$ هستند.

تست ۱۱

اگر $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\log(\frac{ax+2}{x+a})$ باشد، مجموع مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

راه‌حل

در دو حالت زیر، خط $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است:

حالت اول صورت کسر $\frac{ax+2}{x+a}$ به ازای $x=2$ برابر صفر شود: $2a+2=0\Rightarrow a=-1$

حالت دوم مخرج کسر $\frac{ax+2}{x+a}$ به ازای $x=2$ برابر صفر شود: $2+a=0\Rightarrow a=-2$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر -3 است.

دست‌گرمی

۱۴۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+2ax+b}$ در اطراف مجانب قائم خود به‌صورت 

است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۴

۱۴۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x^2-3x+2)(x+2)}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۸- به‌ازای چند مقدار m نمودار تابع $f(x)=\frac{x-3}{2x^2-mx+m}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۴۹- نمودار کدام تابع مجانب قائم دارد؟

۱) $y=\frac{x}{x^2+1}$ ۲) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ ۳) $y=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ ۴) $y=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$

۱۵۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sin x-\cos x}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ چند مجانب قائم دارد؟

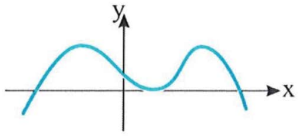
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۱- معادلهٔ مجانب‌های قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ کدام‌اند؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $x=k\pi$ ۲) $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ۳) $x=2k\pi+\pi$ ۴) $x=2k\pi$

آزمون ۹۵ — مجانب قائم (۱)

۹۴۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. نمودار تابع $\frac{۱}{f}$ چند مجانب قائم دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۹۴۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۳x-۴}{x^۲-۵x-۶}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۴۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۲}{x^۴-۳x^۲-۴}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۴۴- فاصلهٔ مجانب‌های قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{|x-۱|-۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۹۴۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x-\sqrt{x}}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۴۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{\sin x}$ در بازهٔ $(-\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

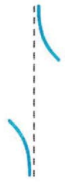
۹۴۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-[x]-۲}$ در بازهٔ $(-۲,۲)$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) صفر

۹۴۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲+mx+۱}$ مجانب قائم ندارد. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۴۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{۴[x]-۳}{۱-x}$ در اطراف مجانب قائم آن چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۵۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x^۲-۳x+۲}$ در اطراف مجانب قائم آن چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

سؤال	گا
۹۴۱	۵۳
۹۴۲	۵۴
۹۴۳	۵۴
۹۴۴	۵۵
۹۴۵	۵۵ ۵۶
۹۴۶	۵۵
۹۴۷	۵۵
۹۴۸	۵۴
۹۴۹	۵۳
۹۵۰	۵۳ ۵۴

آزمون ۹۶ مجانب قائم (۲)

سؤال	گام
۹۵۱	۱۵۴
۹۵۲	۱۵۴
۹۵۳	۱۵۵
۹۵۴	۱۵۶
۹۵۵	۱۵۵
۹۵۶	۱۵۵ ۱۵۶
۹۵۷	۱۵۵ ۱۵۶
۹۵۸	۱۵۳
۹۵۹	۱۵۴
۹۶۰	۱۵۳ ۱۵۶

۹۵۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+x-۱}{x^۲-x+۱}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۵۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۳-۴x^۲+۳x}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۵۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-|x^۲-۲x|}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۵۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۴x}}+\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۵۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{۲\cos x-۱}$ چند مجانب قائم در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۵۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ چند مجانب قائم در بازهٔ $(-\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۵۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱-\sin ۲x}{\cos ۲x}$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۹۵۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-[x]+۱}$ در بازهٔ $(-۳,۳)$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) صفر

۹۵۹- به‌ازای چند مقدار مختلف m نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۴}{x^۲-mx+۹}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۶۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}-۱}{x-\sqrt{x}}$ در اطراف مجانب قائم آن چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹۶۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-x+۲}{x^۲-۶x+۹}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۶۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^۳+x-۲}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۶۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{x^۳-۴x}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹۶۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۳x}}-\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۵x+۴}}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶۵- نمودار تابع $f(x)=\tan(\frac{x}{۳}+\frac{\pi}{۶})$ در بازهٔ $(-۶\pi,۶\pi)$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶۶- خط $x=۲$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\log(۳ax-۴)$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۹۶۷- اگر $x=-۳$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^۳+mx-۳}$ باشد، مجانب‌های قائم دیگر آن کدام‌اند؟

۱) $x=۱+\sqrt{۲}$ و $x=۱-\sqrt{۲}$ ۲) $x=-۱+\sqrt{۲}$ و $x=-۱-\sqrt{۲}$

۳) $x=\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$ و $x=\frac{۳-\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۴) $x=\frac{-۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$ و $x=\frac{-۳-\sqrt{۱۳}}{۲}$

۹۶۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۲}{(m-۱)x^۲+x+۱-m}$ فقط یک مجانب قائم دارد. حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۲

۹۶۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۲x-۱}}{\sqrt{x-x^۲}}$ در اطراف مجانب قائم آن چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۹۷۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{[\sin x]}{\cos^۲ x}$ در اطراف مجانب قائم آن در بازهٔ $(\pi,۲\pi)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

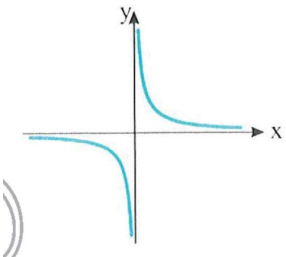
۴) 

سؤال	گام
۹۶۱	۵۴
۹۶۲	۵۴
۹۶۳	۵۵ ۵۶
۹۶۴	۵۵
۹۶۵	۵۷
۹۶۶	۵۸
۹۶۷	۴
۹۶۸	۴
۹۶۹	۳ ۵
۹۷۰	۳ ۵

درس هفتم: حد در بی‌نهایت

مفهوم حد در بی‌نهایت

نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در شکل مقابل رسم کرده‌ایم. از روی این نمودار معلوم است که وقتی مقادیر x خیلی بزرگ می‌شوند، مقادیر تابع f به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. در این وضعیت می‌گوییم وقتی x به مثبت بی‌نهایت $(+\infty)$ میل می‌کند، حد تابع f برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. همین‌طور، معلوم است که وقتی مقادیر x خیلی کوچک (منفی) می‌شوند، مقادیر تابع f به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. در این وضعیت می‌گوییم وقتی x به منفی بی‌نهایت $(-\infty)$ میل می‌کند، حد تابع f برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.



تعریف

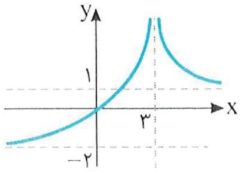
فرض کنید تابع f روی بازه‌ای مانند $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f به هر اندازه که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی بزرگ شده باشند. در این صورت می‌نویسیم $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ و می‌گوییم حد تابع f وقتی x به مثبت بی‌نهایت میل می‌کند، برابر L است.

تعریف

فرض کنید تابع f روی بازه‌ای مانند $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f به هر اندازه که بخواهیم به عدد حقیقی L نزدیک شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی کوچک شده باشند. در این صورت می‌نویسیم $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ و می‌گوییم حد تابع f وقتی x به منفی بی‌نهایت میل می‌کند، برابر L است.

تست ۱

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to-\infty} f(x)-\lim_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) −۳
۴) −۵

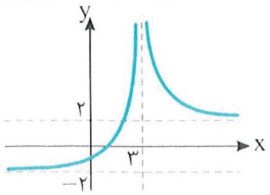
راه‌حل

توجه کنید که از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2-1=-3$$

تست ۲

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to3}(fof)(x)$ کدام است؟



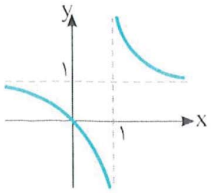
۱) $+\infty$
۲) ۲
۳) −۲
۴) $-\infty$

راه‌حل

با توجه به نمودار تابع، $\lim_{x\to3} f(x)=+\infty$. پس $\lim_{x\to3}(fof)(x)=\lim_{t\to+\infty} f(t)=2$.

تست ۳

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $+\infty$
۳) $-\infty$
۴) صفر

راه‌حل

با توجه به نمودار تابع، وقتی $x\to-\infty$ تابع f با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ میل می‌کند. یعنی $f(x)\to1^-$. پس $\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{t\to1^-} f(t)=-\infty$

قضیه ۱ اگر $f(x)=a$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$.

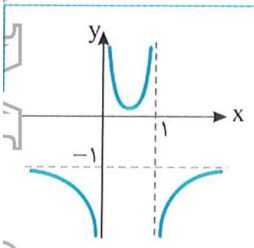
قضیه ۲ اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{x^n}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a}{x^n}=0$.

قضیه ۳ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L_2$ ، آن‌گاه

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\pm g(x))=L_1\pm L_2$ ۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))=L_1L_2$ ۳) $(L_2\neq 0)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$

این قضیه برای حالتی که $x\to-\infty$ نیز درست است.

تست ۴ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)-2}{f(x)+2}$ کدام است؟



۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) ۱

۳) -1 ۴) -3

راه‌حل توجه کنید که از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. بنابراین، $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2)=-1-2=-3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2)=-1+2=1$. پس $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)-2}{f(x)+2}=\frac{-3}{1}=-3$.

تست ۵ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{3}{x^3}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=6+0=6$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(6+\frac{5}{x^2})=6+$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3}=2-0=2$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\frac{3}{x^3})=2-$

بنابراین $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{3}{x^3}}=\frac{6}{2}=3$.

مثال: فرض کنید $f(x)=1-\frac{1}{x}$. مقادیر $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

الف) می‌توان نوشت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[1-\frac{1}{x}]=1-$. اکنون توجه کنید اگر $x\to+\infty$ ، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to 0^+$ ، بنابراین

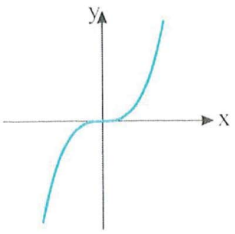
$\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}]=0$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=1-$.

ب) می‌توان نوشت $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[1-\frac{1}{x}]=1-$. اکنون توجه کنید که اگر $x\to-\infty$ ، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to 0^-$ ، بنابراین

$\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}]=-1$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=-1-1=-2$.

حدود نامتناهی در بی‌نهایت

۱۶۱



نمودار تابع $f(x)=x^3$ را در شکل مقابل رسم کرده‌ایم. از روی این نمودار معلوم است که وقتی $x\to+\infty$، مقادیر f بی‌کران بزرگ می‌شوند. در این وضعیت می‌گوییم حد تابع f وقتی x به مثبت بی‌نهایت میل می‌کند. برابر مثبت بی‌نهایت است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. همین‌طور، از روی نمودار تابع f معلوم است که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر تابع f بی‌کران کوچک می‌شوند. در این وضعیت می‌گوییم حد تابع f وقتی که x به منفی بی‌نهایت میل می‌کند. برابر منفی بی‌نهایت است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

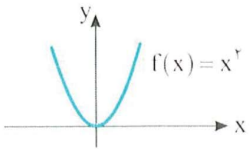
تعریف

فرض کنید تابع f روی بازه‌ای مانند $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد و مقادیر تابع f از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شوند، به شرطی که مقادیر متغیر x به اندازهٔ کافی بزرگ شده باشند. در این صورت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و می‌گوییم حد تابع f وقتی x به مثبت بی‌نهایت میل می‌کند. برابر مثبت بی‌نهایت است.

به‌طور مشابه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ تعریف می‌شوند.

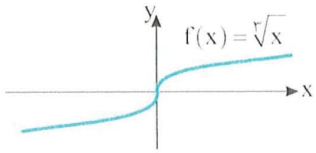
مثال:

الف)



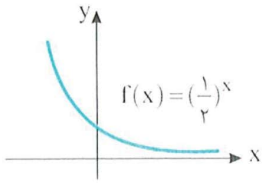
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ب)



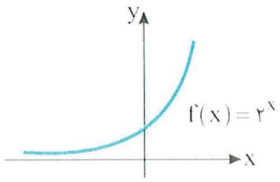
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

پ)



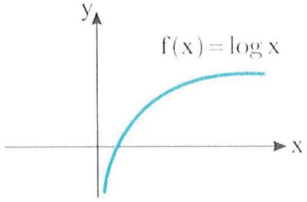
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ت)



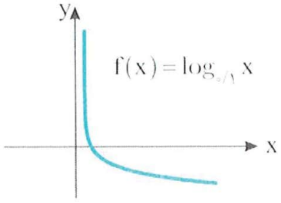
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ث)



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ج)



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

۱۶۲

قضیه ۴ اگر a عددی مثبت و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & n \text{ زوج است}\\ -\infty & n \text{ فرد است}\end{cases}\quad ,\quad \lim_{x\to+\infty} ax^n=+\infty$$

اگر در این قضیه a عددی منفی باشد، در حاصل حدهای فوق « $+\infty$ » به « $-\infty$ » تبدیل می‌شود و برعکس.

قضیه ۵ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$، L عددی حقیقی و غیرصفر باشد و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x))=\begin{cases}+\infty & L>0\\ -\infty & L<0\end{cases}$$

قضیه ۶ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ ، L عددی حقیقی و غیرصفر باشد و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)g(x))=\begin{cases}+\infty & L>0\\ -\infty & L<0\end{cases}$$

۱۶۳

قضیه ۷ اگر f تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد (که در اینجا $a\neq0$)، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^n)$ و اگر $f(x)=ax^m+bx^{m-1}+\cdots+k$ و $g(x)=a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots+k'$ $(a,a'\neq0)$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{a'}x^{m-n}$.

بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{a}{a'} & m=n\\ 0 & m<n\\ +\infty \text{ یا } -\infty & m>n\end{cases}$$

برای حالتی که $x\to-\infty$ نیز قضیهٔ مشابهی را می‌توان بیان کرد.

تست ۶ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x(x+1)}{(x+1)^2+(x-1)^2}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

راه‌حل در صورت و مخرج کسر، جمله‌ای که بزرگ‌ترین توان را دارد، انتخاب می‌کنیم و مقدار حد را معلوم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(x+1)}{(x+1)^2+(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2x}{x^2+2x+1+x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=1$$

تست ۷ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+3)^5\times(x+2)^7}{(2x+3)^3\times(x+2)^9}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

راه‌حل با استفاده از بسط دوجمله‌ای مشخص می‌شود که در صورت $x^5\times x^7$ و در مخرج $(2x)^3\times x^9=8x^3\times x^9$ بزرگ‌ترین توان را دارند. بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\times x^7}{8x^3\times x^9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{12}}{8x^{12}}=\frac{1}{8}$$

تست ۸ حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-(2-\frac{1}{x})^2}{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -4

راه‌حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4-(2-\frac{1}{x})^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-(\frac{2x-1}{x})^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(2x-1)^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x}=4$$

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}=t$. در این صورت، اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $t\to0^-$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4-(2-\frac{1}{x})^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0^-}\frac{4-(2-t)^2}{t}=\lim_{t\to0^-}\frac{4t-t^2}{t}=\lim_{t\to0^-}\frac{t(4-t)}{t}=\lim_{t\to0^-}(4-t)=4$$

تست ۹ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a|x+1|+x}{|x-3|-ax}=2$، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر $x+1$ و $x-3$ منفی‌اند. پس

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a|x+1|+x}{|x-3|-ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(-x-1)+x}{-x+3-ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-a+1)x}{(-1-a)x}=\frac{a-1}{1+a}$$

در نتیجه $\frac{a-1}{1+a}=2$، پس $a=-3$.

تست ۱۰ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^n+2x^3+x^2-1}{6x^3+x^2+2}=2$، مقدار $a+n$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

راه‌حل چون حد مورد نظر برابر عددی غیر صفر است، پس بزرگ‌ترین توان صورت و بزرگ‌ترین توان مخرج باید یکسان و برابر ۳ باشند. اگر $n<3$، حد مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$ می‌شود. پس $n<3$ نیست و در نتیجه $n=3$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n+2x^3+x^2-1}{6x^3+x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3+2x^3}{6x^3}=2\Rightarrow\frac{a+2}{6}=2\Rightarrow a=10$$

بنابراین $a+n=13$.

تست ۱۱ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x^4+(2a-b)x^3+1}{ax^2+bx+2}=0$، مقدار ab کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

راه‌حل برای آنکه حد مورد نظر برابر صفر شود، باید درجهٔ مخرج بیشتر از درجهٔ صورت باشد. مخرج از درجهٔ دوم است، پس باید ضرایب جملات درجهٔ چهارم و سوم در صورت برابر صفر باشند:

$$\begin{cases}a-2=0\Rightarrow a=2\\ 2a-b=0\Rightarrow 2a=b\end{cases}\Rightarrow b=4\Rightarrow ab=8$$

تست ۱۲ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^n+x^3+1}{x^3+x^2-1}=+\infty$، n چند مقدار طبیعی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل چون حد مورد نظر نامتناهی است، پس درجهٔ چندجمله‌ای صورت باید از درجهٔ چندجمله‌ای مخرج بیشتر باشد، یعنی $n>3$، پس n عددهای طبیعی ۱، ۲ و ۳ نیست.

تست ۱۳ اگر $n\in\mathbb{N}$ و $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^n+3x^2+x+1}{x^n+6x^2+x-2}$، چند مقدار متفاوت برای L وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر $n>2$، آن‌گاه x^n جملهٔ دارای بزرگ‌ترین درجه در صورت و مخرج است و $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^n}{x^n}=2$. اگر $n=2$، آن‌گاه

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x^2}{x^2+6x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{7x^2}=\frac{5}{7}$$

اگر $n=1$، بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و مخرج برابر ۲ است و $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{6x^2}=\frac{1}{2}$. بنابراین برای L، سه مقدار متفاوت وجود دارد.

تست ۱۴ مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2[\frac{1}{x}]+2x}{x^2+x+1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) صفر

راه‌حل توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $[\frac{1}{x}]=-1$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2[\frac{1}{x}]+2x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+2x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

تست ۱۵ مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\tan x+1}{\tan x-1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) $-\infty$

راه‌حل اگر $x\to(\frac{\pi}{2})^-$، آن‌گاه $\tan x\to+\infty$. فرض کنید $t=\tan x$، پس

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\tan x+1}{\tan x-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t+1}{t-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t}=1$$

تست ۱۶ نمودار تابع $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ در اطراف خط $y=-1$ وقتی $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

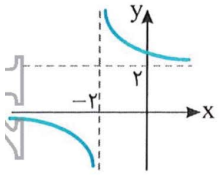
راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$. اکنون برای تعیین رفتار این تابع در اطراف این خط باید ببینیم وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$، مقادیر تابع بیشتر از -1 هستند یا کمتر از آن:

$$y=\frac{-x+1}{x+1}=\frac{-(x+1)+2}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y>-1\\ x\to-\infty\Rightarrow y<-1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ بالای خط $y=-1$ و در $-\infty$ پایین خط $y=-1$ قرار دارد. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

دست‌گرمی

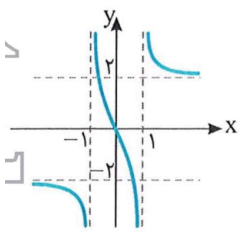
۱۵۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ کدام است؟



۱) $-\infty$ ۲) ۲

۳) صفر ۴) $+\infty$

۱۵۳- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to1^+}(fof)(x)$ کدام است؟



۱) $+\infty$

۲) $-\infty$

۳) ۲

۴) -2

۱۵۴- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^3+(x-1)^3}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

۱۵۵- اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a|x+1|+3x-1}{|3-x|+ax-15}=2$، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۱۵۶- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x^3+(2a-b)x^2+1}{ax+b}=0$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

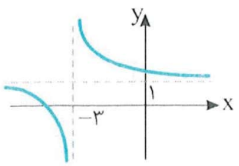
۱۵۷- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}]-[\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

آزمون ۹۸ — حد در بی‌نهایت (۱)

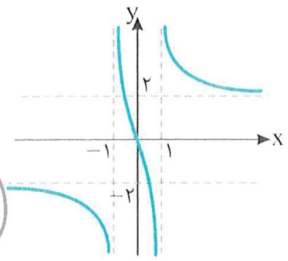
سؤال	گام
۹۷۱	۱۵۹
۹۷۲	۱۴۹ ۱۵۹
۹۷۳	۱۶۳ ۲۸۴
۹۷۴	۱۶۳
۹۷۵	۱۶۳
۹۷۶	۱۶۳
۹۷۷	۱۶۳
۹۷۸	۱۶۳
۹۷۹	۱۶۳
۹۸۰	۱۶۳

۹۷۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟



۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

۹۷۲- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to۱^-}(fof)(x)$ کدام است؟



۱) $+\infty$
۲) $-\infty$
۳) ۲
۴) -۲

۹۷۳- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x+\frac{۱}{x}+\frac{x^۲}{x-۱}}{۲x-\frac{۱}{x}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۹۷۴- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲x-|۱-۳x|}{۵x-۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۹۷۵- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(۳x-۲)^۴(۴x^۲+۱)^۲}{(۶x^۴-۲x^۳+۱)^۲}$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۶ ۳) ۱۶ ۴) ۴

۹۷۶- به‌ازای چند عدد طبیعی مانند n، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{۳n+۴}+x+۱}{x^{۲n+۶}-x+۱}=۰$ ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۷۷- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|۱-mx|+۲x-۱}{۳x+۱}=۳$، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن m کدام است؟

۱) -۶۴ ۲) -۴۹ ۳) -۳۶ ۴) -۲۵

۹۷۸- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(۴-a)x^۲-۳x+۴}{(۵-a)x^۲+x-۱}=-\infty$، مقدار a کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۹۷۹- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a-۳)x^۳+(b+۲)x^۲-۳x+۴}{۳x^۲-۱}=۵$، مقدار $a+b$ کدام است؟

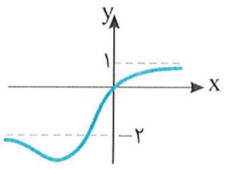
۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۹۸۰- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x+۳}$ در اطراف خط $y=۱$ وقتی $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

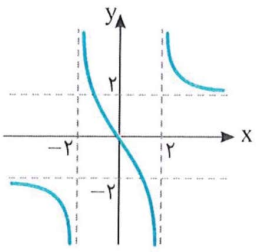
آزمون ۹۹ — حد در بی‌نهایت (۲)

۹۸۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to+\infty} f(1-x)$ کدام است؟



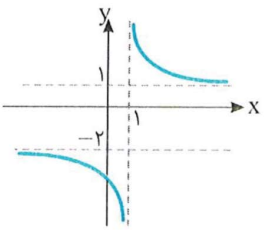
۱) صفر
۲) ۱
۳) -۲
۴) -۳

۹۸۲- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) $+\infty$
۳) $-\infty$
۴) ۴

۹۸۳- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]-\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$ کدام است؟



۱) ۴
۲) -۴
۳) ۳
۴) -۳

۹۸۴- حاصل $\lim_{x\to+\infty}(x[\frac{۱}{x}])$ کدام است؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) $+\infty$
۴) -۱

۹۸۵- حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{|۲x|+|x|}{|۳x-۱|-|۲x|}$ کدام است؟

۱) -۳
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) ۳
۴) $-\frac{۱}{۳}$

۹۸۶- کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند n که $\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^{n-۱}-۲x}{x^۴-x+۱}$ وجود ندارد، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

۹۸۷- اگر $\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+۱)x^۲-۵x+۴}{(b-۲)x-۱}=\frac{۱}{۲}$، مقدار ab کدام است؟

۱) -۸
۲) ۸
۳) ۶
۴) -۶

۹۸۸- اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{(۲a-۱)x^۳+۴x^۲-۱}{(۶a-۱)x^۲+x+۱}=b\in\mathbb{R}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

۹۸۹- حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{۱}{x}}{\tan\frac{۲}{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $+\infty$
۴) صفر

۹۹۰- مقدار $\lim_{x\to+\infty}[\frac{۲x+۱}{x-۱}]$ کدام است؟

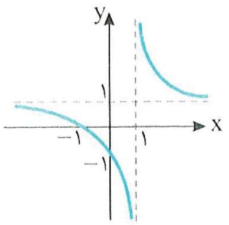
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) وجود ندارد.

سؤال
۹۸۱
۹۸۲
۹۸۳
۹۸۴
۹۸۵
۹۸۶
۹۸۷
۹۸۸
۹۸۹
۹۹۰

آزمون ۱۰۰ حد در بی‌نهایت (۳)

سؤال	گام
۹۹۱	۱۴۹ ۱۵۹
۹۹۲	۱۴۹ ۱۵۹
۹۹۳	۱۲۰ ۱۶۳
۹۹۴	۱۶۳
۹۹۵	۱۶۳
۹۹۶	۱۶۳
۹۹۷	۱۶۳
۹۹۸	۶۴ ۱۶۳
۹۹۹	۱۶۳
۱۰۰۰	۱۶۳

۹۹۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟



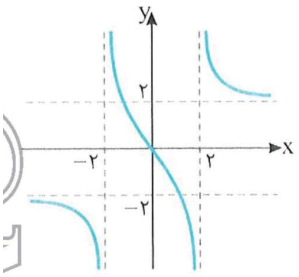
۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۴}{۱-f(x)}=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to۱^-}((x+۲)f(x))=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۴}{۱-f(x)}=-\infty$

۹۹۲- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}(fof)(x)-\lim\limits_{x\to+\infty}(fof)(x)$ کدام است؟



۱) صفر

۲) $+\infty$

۳) $-\infty$

۴) ۴

۹۹۳- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x[-\frac{۱}{x}]-۱}{۲x+۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) $-\infty$

۹۹۴- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(۲x^۳-۱)^۲-(۳x^۲+۱)^۳}{(x^۲-۱)(۳x^۲+۱)^۲}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) ۹ ۳) -۹ ۴) $-\frac{۲۳}{۹}$

۹۹۵- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|۳x^۲-۱|-|۲x^۲-۳|}{|۵x^۲-x|-x^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۹۶- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(۳x+۱)^۵(mx+۲)^۷}{(۲mx-۱)^۴(۶x-۱)^۸}=-۱$، مقدار m کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۲۴ ۳) -۳۶ ۴) -۴۸

۹۹۷- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n+۴x^۳-۱}{x^n-۲x^۳+۱}=L$، چند مقدار متفاوت برای L وجود دارد؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹۸- f تابعی خطی با شیب منفی است، $f(۳)=۳$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=۱۶$. مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹۹- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{۱-\tan x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۱۰۰۰- مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{x}{۲x+۱}+\frac{x}{۲x-۱}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

درس هشتم: مجانب افقی

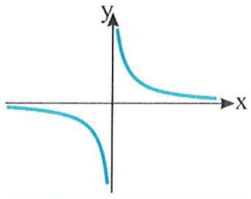
۱۶۴

تعریف

خط $y=b$ را **مجانب افقی** نمودار تابع f می‌نامیم، به شرطی که دست‌کم یکی از دو حالت زیر پیش بیاید:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

مثال: خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ است.



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$$

۱۶۵

نکته روش تعیین مجانب‌های افقی

برای تعیین مجانب‌های افقی تابع f کافی است حد تابع را وقتی که $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ حساب کنیم.

- اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b_1$، آن‌گاه خط $y=b_1$ مجانب افقی نمودار تابع f است.
- اگر $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b_2$، آن‌گاه خط $y=b_2$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

تست ۱

مجانب‌های افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|-1}{2x+1}$ کدام هستند؟

۱) $y=\pm\frac{1}{2}$ ۲) فقط $y=-\frac{1}{2}$ ۳) $y=\pm1$ ۴) فقط $y=-1$

راه‌حل

حد تابع را در $+\infty$ و $-\infty$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین خطوط $y=\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند.

تست ۲

نمودار تابع $f(x)=\frac{2x}{3x-|x-1|}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل

برای یافتن مجانب‌های قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$3x-|x-1|=0\Rightarrow|x-1|=3x\Rightarrow\begin{cases}x>1\Rightarrow x-1=3x\Rightarrow x=-\frac{1}{2} & (\text{غ.ق.ق.})\\ x<1\Rightarrow x-1=-3x\Rightarrow x=\frac{1}{4}\end{cases}$$

چون $\frac{1}{4}$ ریشهٔ صورت $f(x)$ نیست، پس خط $x=\frac{1}{4}$ تنها مجانب قائم نمودار تابع است. برای یافتن مجانب‌های افقی، حد تابع را در $+\infty$ و $-\infty$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x-|x-1|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x-(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x-|x-1|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x+(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}$$

یعنی نمودار تابع دو مجانب افقی دارد: $y=1$ و $y=\frac{1}{2}$. بنابراین نمودار تابع f سه خط مجانب دارد.

نکته ۱۶۶ مجانب افقی نمودار توابع گویا

فرض کنید $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$، که در اینجا $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای هستند، $f(x)=ax^m+bx^{m-1}+\cdots+k$ و $g(x)=a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots+k'$ $(a,a'\neq 0)$. در این صورت

- اگر $m=n$، آن‌گاه خط $y=\frac{a}{a'}$ مجانب افقی نمودار تابع h است.
- اگر $m<n$، آن‌گاه خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع h است.
- اگر $m>n$، نمودار تابع h مجانب افقی ندارد.

تست ۳ اگر خط $y=4$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{2ax+1}{(a-1)x+2}$ باشد، مجانب قائم آن کدام است؟

۱) $x=-1$ ۲) $x=-2$ ۳) $x=-3$ ۴) $x=-4$

راه‌حل چون خط $y=4$ مجانب افقی نمودار تابع f است، پس $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=4$ یا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$. اکنون توجه کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2ax+1}{(a-1)x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2ax}{(a-1)x}=\frac{2a}{a-1}$ (همین‌طور وقتی که $x\to-\infty$). بنابراین $\frac{2a}{a-1}=4$، پس $a=2$ و در نتیجه $f(x)=\frac{4x+1}{x+2}$.

بنابراین $x=-2$ ریشهٔ مخرج و خط $x=-2$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

تست ۴ کدام خط مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{(a^2-2a)x^2+(a+1)x+2}{x+1}$ است؟

۱) $y=-2$ ۲) $y=-1$ ۳) $y=2$ ۴) $y=3$

راه‌حل در حالتی که $a^2-2a\neq 0$، درجهٔ صورت $f(x)$ از درجهٔ مخرج آن بیشتر است و نمودار تابع f مجانب افقی ندارد. در حالتی که $a^2-2a=0$ درجهٔ صورت و مخرج $f(x)$ برابر است و نمودار تابع f مجانب افقی دارد. در این حالت $a=0$ یا $a=2$. پس اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ و خط $y=1$ مجانب افقی نمودار تابع f است. اگر $a=2$، آن‌گاه $f(x)=\frac{3x+2}{x+1}$ و خط $y=3$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

تست ۵ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+2x+4}$، نمودار تابع را در نقطه‌ای قطع می‌کند. طول این نقطه کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

راه‌حل چون $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+2x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$، پس خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f است. برای پیدا کردن طول محل برخورد نمودار تابع با مجانب افقی آن، باید معادلهٔ $f(x)=2$ را حل کنیم:

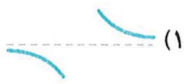
$$\frac{2x^2}{x^2+2x+4}=2\Rightarrow 2x^2=2x^2+4x+8\Rightarrow x=-2$$

نکته ۱۶۷

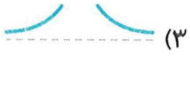
- فرض کنید خط $y=b$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ است. در حالتی که $x\to+\infty$ و $f(x)>b$، نمودار تابع f در اطراف خط $y=b$ به‌صورت ⌒ است، یعنی نمودار تابع f بالای مجانب افقی قرار دارد. در حالتی که $x\to+\infty$ و $f(x)<b$، نمودار تابع f در اطراف خط $y=b$ به‌صورت ⌣ است، یعنی نمودار تابع f زیر مجانب افقی قرار دارد.
- اگر خط $y=b$ مجانب افقی نمودار تابع f در $-\infty$ باشد، به‌طور مشابه نمودار تابع f در اطراف مجانب به‌صورت‌های روبه‌رو است.

$f(x)>b$ ⌒ $f(x)<b$ ⌣

تست ۶ نمودار تابع $y=\frac{۱-۲x}{۱+x}$ در اطراف مجانب افقی آن به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

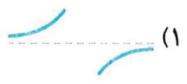
۴) 

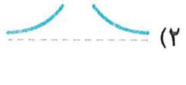
راه‌حل خط $y=-۲$ مجانب افقی نمودار تابع $y=\frac{-۲x+۱}{x+۱}$ است. برای رسم نمودار این تابع در اطراف مجانب افقی باید ببینیم وقتی $x\to+\infty$ یا وقتی $x\to-\infty$، مقادیر تابع بیشتر از -۲ هستند یا کمتر از آن.

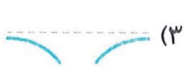
$$y=\frac{-۲x+۱}{x+۱}=\frac{-۲(x+۱)+۳}{x+۱}=-۲+\frac{۳}{x+۱}\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y>-۲\\ x\to-\infty\Rightarrow y<-۲\end{cases}$$

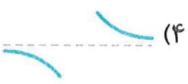
بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

تست ۷ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۴}$ در اطراف مجانب افقی آن به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

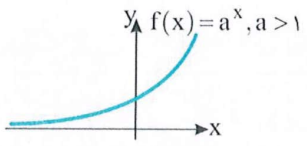
راه‌حل ابتدا تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم تا بتوان آن را راحت‌تر بررسی کرد:

$$f(x)=\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۴}=\frac{x^۲-۴}{x^۲-۴}+\frac{۴-۴x}{x^۲-۴}=۱-\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}$$

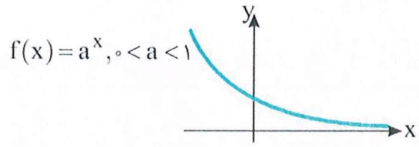
پس اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}$ مقدارهایی مثبت دارد، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۱$ و $f(x)<۱$. اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}$ مقدارهایی منفی دارد، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۱$ و $f(x)>۱$. بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

نکته مجانب افقی در توابع نمایی

به نمودار تابع نمایی توجه کنید:



$$\lim_{x\to-\infty}a^x=۰$$



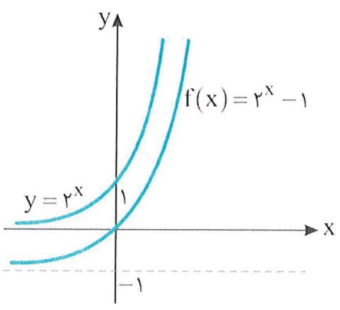
$$\lim_{x\to+\infty}a^x=۰$$

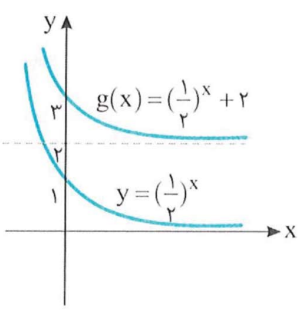
خط $y=۰$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

تست ۸ فاصلهٔ مجانب‌های افقی نمودار تابع‌های $f(x)=۲^x-۱$ و $g(x)=\frac{۱}{۲^x}+۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل خط $y=۰$ مجانب افقی نمودار توابع $y=۲^x$ و $y=\frac{۱}{۲^x}$ است. پس خط $y=-۱$ مجانب افقی نمودار تابع f و خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع g است که فاصلهٔ این خط‌ها از یکدیگر برابر ۳ است.





۱۶۹

نکته

اگر خط $y=k$ مجانب افقی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه خط $y=ak+d$ مجانب افقی نمودار تابع $g(x)=af(bx+c)+d$ است.

تست ۹

اگر $y=-۳$ مجانب افقی نمودار تابع f باشد، کدام خط مجانب افقی نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{۳}f(۲x)-۱$ است؟

۱) -۳ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۲

راه‌حل بنابر نکتهٔ بالا خط $y=\frac{۱}{۳}\times(-۳)+(-۱)=-۲$ مجانب افقی نمودار تابع g است.

دست‌گرمی

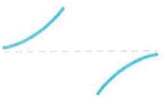
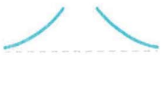
۱۵۸- اگر خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۱}{(a-۱)x-۲}$ باشد، مجانب قائم آن کدام است؟

۱) $x=۱$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=۴$

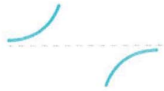
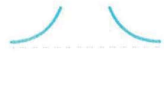
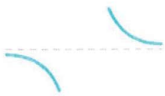
۱۵۹- مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{۲x^۲}{x^۲+x+۱}$ نمودار تابع را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $(۱,\frac{۲}{۳})$ ۲) $(۲,\frac{۸}{۷})$ ۳) $(۰,۰)$ ۴) $(-۱,۲)$

۱۶۰- نمودار تابع $y=\frac{۱-x}{۱+x}$ در اطراف مجانب افقی آن به کدام صورت است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۶۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴x+۷}{x^۲-۴}$ در اطراف مجانب افقی آن به کدام صورت است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

آزمون ۱۰۱ — مجانب افقی (۱)

۱۰۰۱- معادلهٔ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{۴x^۲+۳x+۵}$ کدام است؟

۱) $y=\frac{۱}{۲}$ ۲) $y=\frac{۲}{۳}$ ۳) $y=\frac{۱}{۵}$ ۴) $y=۰$

۱۰۰۲- فاصلهٔ مجانب‌های افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{۳x+|x|}{|x|-۱}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۰۰۳- فاصلهٔ محل تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{x-۴}$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۰۴- اگر خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{ax-۳}{(a-۱)x+۲a}$ باشد، معادلهٔ مجانب قائم آن کدام است؟

۱) $x=۲$ ۲) $x=-۲$ ۳) $x=۴$ ۴) $x=-۴$

۱۰۰۵- نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x+a}{(a-۱)x-a}$ روی خط $y=x+۱$ قرار دارد. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۰۰۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۳-۲}$ در چند نقطه مجانب افقی خود را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۰۷- اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۲x+m}{x^۳+۱}$ مجانب افقی خود را قطع کند، حدود مقادیر m کدام است؟

۱) $m\leq ۱$ ۲) $m\geq ۱$ ۳) $-۱\leq m\leq ۱$ ۴) $۰\leq m\leq ۱$

۱۰۰۸- اگر $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ باشد، کدام خط مجانب افقی نمودار تابع $g(x)=۱-۲f(۳-x)$ در $-\infty$ است؟

۱) $y=۳$ ۲) $y=-۳$ ۳) $y=۲$ ۴) $y=-۲$

۱۰۰۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}$ در اطراف مجانب افقی آن چگونه است؟

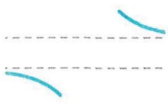
۱) 

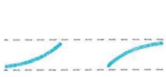
۲) 

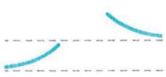
۳) 

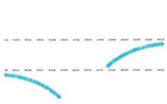
۴)

۱۰۱۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x}{|x|-۱}$ در اطراف مجانب‌های افقی آن چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

سؤال	گا
۱۰۰۱	۶۶
۱۰۰۲	۶۵
۱۰۰۳	۶۶
۱۰۰۴	۶۶
۱۰۰۵	۶۶
۱۰۰۶	۶۶
۱۰۰۷	۶۶
۱۰۰۸	۶۹
۱۰۰۹	۶۷
۱۰۱۰	۶۷

آزمون ۱۰۲ مجانب افقی (۲)

سؤال	گام
۱۰۱۱	۱۶۶
۱۰۱۲	۱۶۶
۱۰۱۳	۱۶۶
۱۰۱۴	۱۶۵
۱۰۱۵	۱۶۵
۱۰۱۶	۱۶۶
۱۰۱۷	۱۶۶
۱۰۱۸	۱۶۶
۱۰۱۹	۱۶۷
۱۰۲۰	۱۶۷

۱۰۱۱- نمودار کدام تابع مجانب افقی ندارد؟

۱) $y=\frac{x}{x^2+1}$ ۲) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ۳) $y=\frac{x^2-1}{x-2}$ ۴) $y=\frac{x-2}{x^3+1}$

۱۰۱۲- مساحت مثلثی که از برخورد مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{3x+1}{x-4}$ و نیمساز ربع اول به وجود می‌آید، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۰۱۳- اگر $x=4$ مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{(a+4)x-1}{2x-a+2}$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن کدام است؟

۱) $y=5$ ۲) $y=6$ ۳) $y=7$ ۴) $y=8$

۱۰۱۴- فاصلهٔ مجانب‌های افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+2x|x-1|}{|x^2-3x|}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) صفر

۱۰۱۵- مساحت ناحیه‌ای که از برخورد مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{x|x|+1}{x^2-4}$ به وجود می‌آید، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۰۱۶- طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$ با مجانب افقی آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۱۰۱۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3+x^2+mx+4}{x^3+2}$ مجانب افقی خود را قطع نمی‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $-2<m<2$ ۲) $m<\sqrt{8}$ ۳) $-\sqrt{8}<m<\sqrt{8}$ ۴) $m>-\sqrt{8}$

۱۰۱۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2+mx+m+1}$ سه مجانب دارد. حدود m کدام است؟

۱) $-2<m<2$ ۲) $m<-2$ یا $m>2$
۳) $2-\sqrt{8}<m<2+\sqrt{8}$ ۴) $m<2-\sqrt{8}$ یا $m>2+\sqrt{8}$

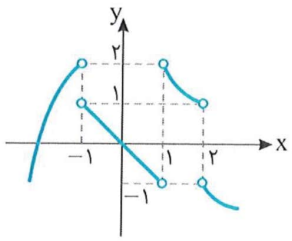
۱۰۱۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x-1}$ در اطراف مجانب‌های افقی آن چگونه است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

۱۰۲۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2}{1+x^4}$ در اطراف مجانب افقی آن چگونه است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

۱۰۲۱- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^+}[(fof)(x)]$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۱۰۲۲- اگر $f(x)=ax^۲+bx-c$ و $\lim\limits_{x\to ۰}f(x+۱)=\lim\limits_{x\to ۱}f(۳x)$، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۱۰۲۳- حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^-}(\frac{x^۲}{[x]}-\frac{[-x]}{x})$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

۱۰۲۴- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۴-۵x^۲+۴}{x^۲-۱} & x>۱\\ \frac{a}{x-۲} & x<۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ حد داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۲۵- اگر $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{ax-۳a}{x^۲+ax+۳}=b$ و $b\neq ۰$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) -۸

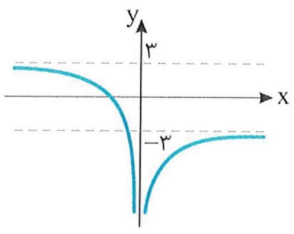
۱۰۲۶- مقدار $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\tan x}{\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰۲۷- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۴-۱}{x^۳-۱} & x>۱\\ \frac{x+۳}{۲x^۲+۱} & x\leq ۱\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۲۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x)]-۲[\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)]$ کدام است؟

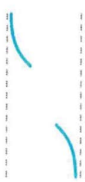
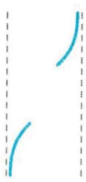
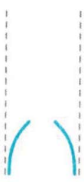


۱) -۴
۲) -۲
۳) -۶
۴) -۸

۱۰۲۹- اگر $f(x)=۳x^۲-x$، حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(۲x)-۱}{f(x)+۳x^۲-۱}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۰۳۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۲}{\sqrt{۴x-x^۲}}$ در اطراف مجانب‌های قائم آن چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

سؤال	گام
۱۰۲۱	۲۳ ۲۵ ۲۶
۱۰۲۲	۲۵ ۲۷
۱۰۲۳	۲۶ ۲۷
۱۰۲۴	۲۶ ۲۷ ۲۲
۱۰۲۵	۲۲
۱۰۲۶	۲ ۶ ۷
۱۰۲۷	۲
۱۰۲۸	۶ ۹
۱۰۲۹	۳
۱۰۳۰	

آزمون ۱۰۴

آزمون فصل سوم (۲)

۱۰۳۱- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{5\pi}{4})^+}[\sqrt{2}\sin x]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) صفر

۱۰۳۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{x^2-25}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{20}$ ۲) $\frac{1}{30}$ ۳) $-\frac{1}{20}$ ۴) $-\frac{1}{30}$

۱۰۳۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۰۳۴- حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\cos x+\sin x}$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) صفر

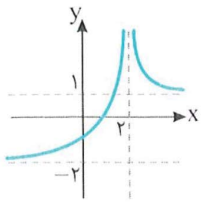
۱۰۳۵- تابع $f(x)=\begin{cases} a\sin x & x>\frac{\pi}{2} \\ ab-1 & x=\frac{\pi}{2} \\ \cos 2x+b & x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ یا ۳ ۲) -1 یا ۳ ۳) ۱ یا -3 ۴) -1 یا -3

۱۰۳۶- دامنهٔ تابع‌های f و g مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن‌ها مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است. تابع‌های $f+2g$ و $f-g$ در نقطهٔ $x=a$ پیوسته‌اند. کدام تابع ممکن است در این نقطه پیوسته نباشد؟

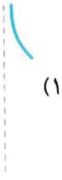
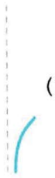
۱) $\frac{1}{f}$ ۲) $\frac{1}{g}$ ۳) $\frac{1}{f+g}$ ۴) $\frac{1}{f-g}$

۱۰۳۷- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{1-(fof)(x)}$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) -2
۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۱۰۳۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ در اطراف خط $x=1$ چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۰۳۹- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|3-mx|+x-1}{3x+1}=\frac{2}{3}$، آن‌گاه m چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

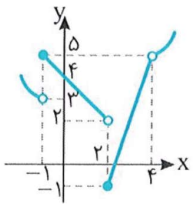
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۴۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-6x+2m}$ مجانب قائم ندارد. m چند عدد طبیعی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

سؤال	گام
۱۰۳۱	۱۲۶ ۱۳۱
۱۰۳۲	۱۳۴ ۲۰۷
۱۰۳۳	۱۳۴ ۲۰۷
۱۰۳۴	۱۳۶ ۲۰۷
۱۰۳۵	۱۲۶ ۱۲۷ ۱۴۱ ۱۴۲
۱۰۳۶	۱۴۶ ۱۴۷
۱۰۳۷	۱۲۵ ۱۴۹ ۱۵۹
۱۰۳۸	۱۵۱
۱۰۳۹	۱۶۳
۱۰۴۰	۱۵۴ ۲۹۴

۱۰۴۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\lim_{x\to ۲^-}(fof)(x)$ کدام است؟



۱) ۱-
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۳

۱۰۴۲- اگر حد تابع‌های $f+g$ و $f^۲-g^۲$ در نقطهٔ $x=۲$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۲۱ باشد، مقدار $\lim_{x\to ۱}\frac{f(۲x^۲)}{g(x+۱)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۰۴۳- مقدار $\lim_{x\to ۱^-}\frac{[۲x](x+۲)}{x[-x]+|۱-x|}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۱۰۴۴- اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+x+a}-۲}{x^۲-۴}=b$، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

۱۰۴۵- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos ۵x}{\pi-۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۱۰۴۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x}(\sqrt[۳]{x+۲۷}-۳) & x\neq ۰\\ \frac{۱}{a} & x=۰\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۷

۱۰۴۷- حاصل $\lim_{x\to ۵^-}\frac{۲x^۲-۵۰}{x^۳-۱۰x^۲+۲۵x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۰۴۸- حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲[-\frac{۱}{x}]-۱}{۴x^۲+x+۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) صفر ۴) $-\infty$

۱۰۴۹- f تابعی خطی با شیب مثبت است، $f(۳)=۱۰$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}=۹$. مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۵۰- اگر $y=۴$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{۴x+a|x|+۳}{۳x-|x|+۱}$ در $+\infty$ باشد، کدام خط مجانب افقی این نمودار در $-\infty$ است؟

۱) $y=\frac{۳}{۴}$ ۲) $y=-\frac{۳}{۴}$ ۳) $y=\frac{۴}{۳}$ ۴) $y=۰$

سؤال
۱۰۴۱ ۲۳ ۲۵
۱۰۴۲ ۲۵ ۲۷
۱۰۴۳
۱۰۴۴
۱۰۴۵
۱۰۴۶
۱۰۴۷
۱۰۴۸
۱۰۴۹
۱۰۵۰

آزمون ۱۰۶ آزمون فصل سوم (۴) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

سؤال	گام
۱۰۵۱	۱۲۶ ۱۲۷
۱۰۵۲	۱۳۴
۱۰۵۳	۱۵۰ ۳۱۲
۱۰۵۴	۱۴۵ ۱۴۶ ۱۴۷
۱۰۵۵	۱۴۱ ۱۴۲
۱۰۵۶	۱۴۱ ۱۴۲
۱۰۵۷	۱۴۱ ۱۴۲
۱۰۵۸	۱۴۱ ۱۴۲ ۳۳۳
۱۰۵۹	۱۳۷ ۱۴۰ ۱۴۱
۱۰۶۰	۱۳۷ ۱۴۰ ۱۴۱

۱۰۵۱- حد عبارت $\sin\frac{x}{2}[\cos\frac{x}{2}]-\cos x[\sin 2x]$ وقتی $x\to\pi$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۵)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد.

۱۰۵۲- اگر $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\frac{3}{2}$، مقدار b کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۵)

۱) -8 ۲) -6 ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۵۳- اگر $\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$، مقدار $a+b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) -3 ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۰۵۴- تابع $f(x)=(x-3)[\frac{1}{3}x-1]$ در چند نقطه از بازهٔ $(0,9)$ ناپیوسته است؟ (ریاضی ۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۵۵- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<x<a\\ 1-\frac{x}{4} & x\geq a\end{cases}$ روی دامنه‌اش پیوسته است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

۱۰۵۶- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+bx-1 & x<2\\ ax+b & x>2\end{cases}$ با شرط $f(2)=5$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی پیوسته است. مقدار a کدام است؟ (خارج از کشور تجربی ۹۱)

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۵۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax+b & |x|\geq 1\\ x[x] & |x|<1\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (ریاضی ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۵۸- تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a روی مجموعهٔ عددهای حقیقی پیوسته است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) -1 ۲) ۱

۳) صفر ۴) همواره ناپیوسته است.

۱۰۵۹- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos 3x}{\cos x} & 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ \sin 5x-a & \frac{\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\end{cases}$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$ پیوسته است؟ (خارج از کشور تجربی ۹۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۶۰- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{2x-\pi} & x\neq\frac{\pi}{2}\\ a & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ روی بازهٔ $[0,2\pi]$ پیوسته است؟ (خارج از کشور تجربی ۹۲)

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

آزمون ۱۰۷ — آزمون فصل سوم (۵) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۱۰۶۱- اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}=\frac{۱}{۲}$، مقدار b کدام است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۵)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۶۲- حد عبارت $\frac{|x^۲-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}$، وقتی $x\to ۲^-$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۰)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۶۳- اگر $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$، آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x=-۲$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۰)

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۰۶۴- اگر $\lim_{x\to(\frac{۱}{۶})^+}\frac{[۴\cos^۲\pi x]-۱۲x}{ax+b}=\frac{۱}{۲}$، مقدار $a+b$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) -۲۰ ۲) -۱۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۰۶۵- حاصل $\lim_{x\to\frac{۱}{۴}}\frac{۱-\tan(\pi x)}{۲x-\sqrt{x}}$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۱)

۱) -۲π ۲) $-\pi$ ۳) π ۴) ۲π

۱۰۶۶- حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{\cos^۲ x-\sqrt{\cos x}}{x^۲}$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۳)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۰۶۷- حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos ۵x}}{x^۲}$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰۶۸- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}ax-۳a-\frac{۳}{۸} & x\le ۳\\ \frac{۱-\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{x-۳} & x>۳\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۴)

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

۱۰۶۹- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱} & x\neq ۱\\ a & x=۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) هیچ مقدار a

۱۰۷۰- به‌ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}x-a & x\le ۲\\ \frac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x} & x>۲\end{cases}$ همواره پیوسته است؟ (ریاضی - ۹۴)

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۳/۲

سؤال	گا
۱۰۶۱	۳۴
۱۰۶۲	۳۳ ۳۴
۱۰۶۳	۳۲ ۳۳
۱۰۶۴	۳۶ ۳۲
۱۰۶۵	۴ ۸
۱۰۶۶	۴ ۹
۱۰۶۷	۴ ۹
۱۰۶۸	۱
۱۰۶۹	۱
۱۰۷۰	

آزمون ۱۰۸ آزمون فصل سوم (۶) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۱۰۷۱- مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۷۲- اگر $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=2^a$ ، مقدار a کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۷۳- حاصل $\lim_{x\to 0}(([2x]+[-2x])\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}})$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) صفر ۴) حد ندارد.

۱۰۷۴- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax-a+2 & x\le 1\\ \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=1$ پیوسته است؟ (خارج از کشور تجربی ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

۱۰۷۵- اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=\begin{cases}f(x) & x\notin\mathbb{Z}\\ f(x)-1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ ، آن‌گاه تعداد نقطه‌های ناپیوستگی تابع g که در بازهٔ $[-4,4]$ قرار دارند، کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۰۷۶- به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1} & x<-1\\ ax+1 & x\ge -1\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟ (خارج از کشور ریاضی ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۷۷- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۶)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۷۸- تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\sin(\frac{\pi x}{2})$ در نقطه‌های $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) فقط در عددهای زوج پیوسته است.
۲) فقط در عددهای فرد پیوسته است.
۳) همواره ناپیوسته است.
۴) همواره پیوسته است.

۱۰۷۹- اگر $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & x<0\\ 2x & x\ge 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-2x & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$ ، کدام تابع در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟ (خارج از کشور ریاضی ۸۶)

۱) $f+g$ ۲) fof ۳) gof ۴) fog

۱۰۸۰- تابع $f(x)=[x^2-3]$ روی بازهٔ $[2,2+k)$ پیوسته است. بیشترین مقدار k کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) $\sqrt{5}-2$ ۳) $\sqrt{3}-1$ ۴) $\sqrt{2}$

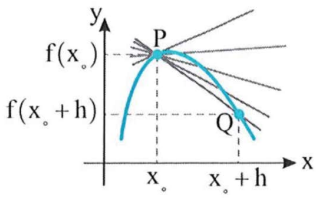
سؤال	گام
۱۰۷۱	۱۳۷ ۱۳۸
۱۰۷۲	۱۳۴ ۱۳۶
۱۰۷۳	۱۳۳ ۱۳۴ ۱۳۷ ۱۳۹
۱۰۷۴	۱۳۴ ۱۴۱
۱۰۷۵	۱۴۱ ۳۳۳
۱۰۷۶	۱۳۴ ۱۴۱ ۱۴۲
۱۰۷۷	۱۳۴ ۱۴۱
۱۰۷۸	۱۴۱
۱۰۷۹	۱۴۱
۱۰۸۰	۱۴۵

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: مفهوم مشتق

خط مماس

فرض کنید P نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. اگر Q نقطه‌ای دیگر روی این نمودار باشد، خط PQ را یک قاطع این نمودار می‌نامند. وقتی که نقطهٔ Q روی نمودار به نقطهٔ P نزدیک می‌شود، خط‌هایی قاطع داریم که همگی از نقطهٔ P می‌گذرند. اگر شیب این خط‌ها به عددی مانند m نزدیک و نزدیک‌تر شوند، خطی را که شیب آن برابر m است و از نقطهٔ P می‌گذرد، خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ P می‌نامیم. اگر P نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ و Q نقطهٔ $(x_0+h, f(x_0+h))$ باشد، شیب خط PQ برابر است با $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. توجه کنید که برحسب اینکه نقطهٔ Q در سمت راست یا سمت چپ نقطهٔ P باشد، مقدار h مثبت یا منفی است.



تعریف ۱۷۰

فرض کنید $P(a, f(a))$ نقطه‌ای روی نمودار تابع f باشد و $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته و برابر با m باشد. در این صورت خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ P، خطی است که از نقطهٔ P می‌گذرد و شیب آن برابر m است. معادلهٔ این خط به‌صورت $y=m(x-a)+f(a)$ است. m را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

تست ۱ **شیب پاره‌خط واصل بین دو نقطه به طول‌های ۱ و x روی منحنی تابع $y=f(x)$ برابر $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ است. شیب خط مماس بر این منحنی در نقطه‌ای به طول ۱ کدام است؟**

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲

راه‌حل اگر x را به ۱ نزدیک کنیم، پاره‌خط واصل در نقطهٔ $x=1$ به خط مماس بر منحنی در این نقطه تبدیل می‌شود که شیب آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$m=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

مشتق

تعریف ۱۷۱

اگر نقطهٔ a در دامنهٔ تابع f باشد و $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته باشد، مقدار این حد را مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. در این صورت، می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است.

تست ۲ **اگر $f(1)=f'(1)=3$، مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{3h}$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

راه‌حل با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=1$،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{3h}=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}(3)=1$$

توجه کنید که اگر $a+h=x$، آن‌گاه $h=x-a$ و اگر $h\to 0$، آن‌گاه $x\to a$. بنابراین تعریف مشتق تابع در یک نقطه را می‌توانیم به‌صورت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نیز بنویسیم.

تعریف ۱۷۲

اگر نقطهٔ a در دامنهٔ تابع f باشد و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد، مقدار این حد را مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. در این صورت، می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است.

تست ۳

مقدار مشتق تابع $f(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-5)$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) -24 ۳) ۶ ۴) -6

راه‌حل

تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=1$ را می‌نویسیم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-5)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}((x-2)(x-3)(x-4)(x-5))=(-1)(-2)(-3)(-4)=24$$

تست ۴

اگر $f(x)=\sin x\sqrt{3+\cos x}$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=0$ مقدار $f'(0)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sqrt{3+\cos x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\sqrt{3+\cos x}=1\times\sqrt{3+1}=2$$

تست ۵

اگر $f'(2)=4$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۸

راه‌حل

با استفاده از اتحاد مزدوج مخرج کسر مورد نظر را تجزیه می‌کنیم و به کمک تعریف مشتق مقدار حد را به‌دست می‌آوریم:

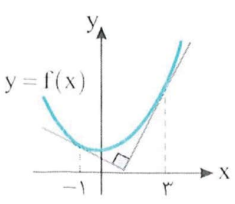
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=f'(2)\times\frac{1}{2+2}=4\times\frac{1}{4}=1$$

نکته ۱۷۳

مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$، همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(a,f(a))$ است.

تست ۶

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $f'(3)-f'(-1)=2$، مقدار $f'(-1)$ کدام است؟



۱) -2 ۲) -1

۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

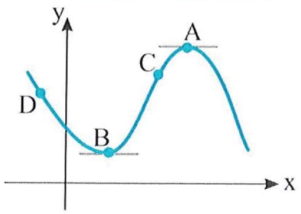
راه‌حل

اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=3$ برابر m باشد، آن‌گاه شیب خط عمود بر این خط، که همان خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=-1$ است، برابر $-\frac{1}{m}$ است. پس $f'(3)=m$، $f'(-1)=-\frac{1}{m}$ و در نتیجه $m+\frac{1}{m}=2$، $m^2-2m+1=0$، پس $m=1$. بنابراین $f'(-1)=-1$.

تست ۷

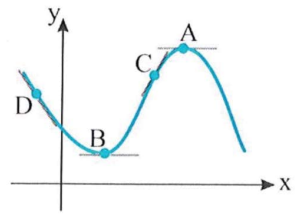
در کدام نقطه واقع بر منحنی مقابل مقدار مشتق تابع بیشتر است؟

۱) A
۲) B
۳) C
۴) D



راه‌حل

در نقاط A و B خط مماس بر منحنی افقی و مقدار مشتق برابر صفر است. در نقطهٔ D، شیب خط مماس عددی منفی و در نقطهٔ C، شیب خط مماس عددی مثبت است. پس در نقطهٔ C، مقدار مشتق تابع بزرگ‌تر است.



نکته ۱۷۴

اگر تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$$

تست ۸

اگر تابع f در هر نقطه مشتق‌پذیر باشد، مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-3h)}{h}$ کدام است؟

۱) $f'(2)$
۲) $5f'(2)$
۳) $3f'(2)$
۴) $2f'(2)$

راه‌حل

بنابر نکتهٔ قبل،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-3h)}{h}=((2-(-3))f'(2)=5f'(2)$$

قضیه ۱۷۵

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است.

تست ۹

اگر $f'(2)=f(2)=4$، مقدار $\lim_{x\to 2}\frac{f^3(x)-f^3(2)}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴۸
۳) ۱۲
۴) ۲

راه‌حل

توجه کنید که چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است و در نتیجه $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$. اکنون از اتحاد چاق و لاغر برای تجزیهٔ عبارت صورت کسر و اتحاد مزدوج برای تجزیهٔ عبارت مخرج کسر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^3(x)-f^3(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-f(2))(f^2(x)+f(2)f(x)+f^2(2))}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)+f(2)f(x)+f^2(2)}{x+2}$$

$$=f'(2)\times\frac{f^2(2)+f^2(2)+f^2(2)}{2+2}=4\times\frac{16+16+16}{4}=48$$

نکته ۱۷۶

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته نباشد، در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال: تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست، پس در این نقاط مشتق‌پذیر هم نیست.

مشتق چپ و مشتق راست

ممکن است تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر نباشد، اما حدهای $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشند.

مثال: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\le 0\\ 2x-1 & x>0\end{cases}$. در این صورت

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x-1)-(-1)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2x-1)-(-1)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}=2$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ وجود ندارد و تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

تعریف

۱۷۷

اگر نقطهٔ a در دامنهٔ تابع f باشد، $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را مشتق چپ تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

همین‌طور، $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را مشتق راست تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'_+(a)$ نشان می‌دهند. توجه کنید که

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\quad f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تست ۱۰ **مشتق راست تابع $f(x)=|x^2-1|$ در نقطهٔ $x=1$ چقدر از مشتق چپ آن در این نقطه بیشتر است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}(-(x+1))=-2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ به اندازهٔ ۴ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

تست ۱۱ **اگر $f(x)=\sin|x|$، مقدار $f'_+(0)-f'_-(0)$ کدام است؟**

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

راه‌حل با استفاده از تعریف، مقدارهای مشتق چپ و مشتق راست تابع در نقطهٔ $x=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(-x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1$$

بنابراین $f'_+(0)-f'_-(0)=1-(-1)=2$.

نکته

تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر است، اگر و فقط اگر $f'_-(a)=f'_+(a)$.

مثال: فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & x<2 \\ 6x-5 & x\geq 2 \end{cases}$. در این صورت $f(2)=7$ و

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x^2+2x-1)-7}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x+4)=6$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(6x-5)-7}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{6x-12}{x-2}=6\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=6\times 1=6$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است و $f'(2)=6$.

۱۷۹

تذکر اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی چپ نداشته باشد، در این نقطه مشتق چپ هم ندارد. همین‌طور، اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی راست نداشته باشد، در این نقطه مشتق راست هم ندارد.

تست ۱۲ تابع $f(x)=2x+[-x]$ در نقطهٔ $x=0$ چگونه است؟

۱) مشتق پذیر است.
۲) مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد.
۳) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد.
۴) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

راه‌حل ابتدا پیوستگی تابع f در نقطهٔ $x=0$ را بررسی می‌کنیم: $f(0)=0$ ، $\lim_{x\to 0^+}f(x)=-1$ و $\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$.

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=0$ پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست نیز ندارد، ولی ممکن است مشتق چپ داشته باشد. توجه کنید که

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-0}{x}=2$$

پس تابع f در نقطهٔ $x=0$ فقط مشتق چپ دارد.

تست ۱۳ تابع $f(x)=x|\sin x|$ در کدام نقطه مشتق‌پذیر است؟

۱) $x=0$ ۲) $x=\pi$ ۳) $x=-\pi$ ۴) $x=2\pi$

راه‌حل تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است، زیرا

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|\sin x|-0}{x}=\lim_{x\to 0}|\sin x|=0$$

خودتان بررسی کنید که تابع f در بقیهٔ نقطه‌های داده شده مشتق‌پذیر نیست.

تست ۱۴ تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+x & x\geq 1 \\ x^2-b & x<1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

راه‌حل چون تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. بنابراین

$$\lim_{x\to 1^+}(ax^2+x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-b)=f(1)\Rightarrow a+1=1-b\Rightarrow a+b=0 \qquad (1)$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ وجود داشته باشند و برابر باشند. پس

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-b-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1-(b+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+x-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x^2-1)+(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(a(x+1)+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}(a(x+1)+1)=2a+1$$

$$f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 2a+1=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

با توجه به تساوی (۱)، $b=-\frac{1}{2}$، در نتیجه $a-b=1$.

مشتق نامتناهی

تعریف ۱۸۰

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$، می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=a$ **مشتق نامتناهی** دارد و می‌نویسیم $f'(a)=+\infty$ یا $f'(a)=-\infty$. توجه کنید که در این صورت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ یا $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\infty$.

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق نامتناهی دارد. زیرا

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

تعریف ۱۸۱

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی چپ داشته باشد و $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$، می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق چپ نامتناهی دارد. در این صورت می‌نویسیم $f'_-(a)=+\infty$ یا $f'_-(a)=-\infty$. همین‌طور، اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد و $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$، می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق راست نامتناهی دارد. در این صورت می‌نویسیم $f'_+(a)=+\infty$ یا $f'_+(a)=-\infty$.

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست نامتناهی دارد. زیرا

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$$

تست ۱۵

اگر $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$، کدام‌یک درست است؟

۱) $f'_+(1)=+\infty$ ، $f'_-(1)=+\infty$

۲) $f'_+(1)=-\infty$ ، $f'_-(1)=-\infty$

۳) $f'_+(1)=-\infty$ ، $f'_-(1)=+\infty$

۴) $f'_+(1)=+\infty$ ، $f'_-(1)=-\infty$

راه‌حل با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع در نقطهٔ $x=1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}=+\infty$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}=-\infty$$

تذکر اگر $f'(a)=\pm\infty$ یا $f'_-(a)=\pm\infty$ یا $f'_+(a)=\pm\infty$، تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق ندارد.

خط مماس قائم

تعریف ۱۸۲

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد و یکی از حالت‌های زیر پیش بیاید، می‌گوییم خط $x=a$ مماس قائم بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(a,f(a))$ است.

الف) $f'(a)=+\infty$



ب) $f'(a)=-\infty$



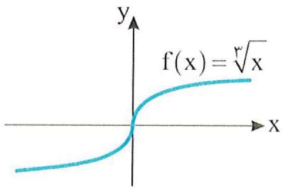
پ) $f'_+(a)=-\infty$ و $f'_-(a)=+\infty$

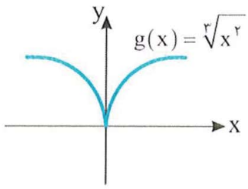


ت) $f'_+(a)=+\infty$ و $f'_-(a)=-\infty$



مثال: تابع‌های $f(x)=\sqrt[3]{x}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در نقطهٔ $x=0$ خط مماس قائم دارند.





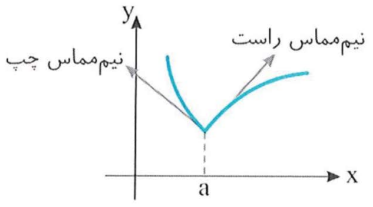
نیم‌مماس

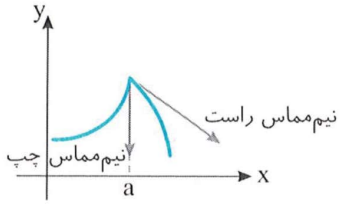
تعریف ۱۸۳

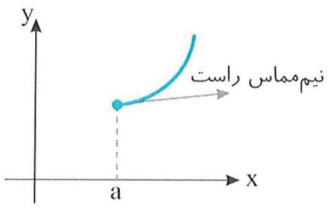
فرض کنید تابع f در نقطهٔ $(a,f(a))$ خط مماس نداشته باشد.

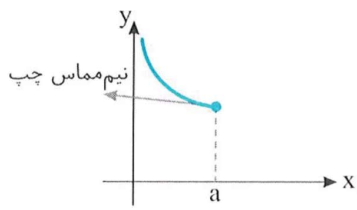
- **نیم‌مماس چپ بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(a,f(a))$ نیم‌خطی است که شیب آن برابر با $f'_-(a)$ است و از نقطهٔ $(a,f(a))$ می‌گذرد.**
- **نیم‌مماس راست بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(a,f(a))$ نیم‌خطی است که شیب آن برابر با $f'_+(a)$ است و از نقطهٔ $(a,f(a))$ می‌گذرد.**
- **اگر $f'_-(a)$ یا $f'_+(a)$ نامتناهی باشند، نیم‌مماس‌ها موازی محور y هستند و شیب آن‌ها تعریف نشده است.**

مثال: در نمودارهای زیر نیم‌مماس چپ یا نیم‌مماس راست نمودار تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشخص شده است.

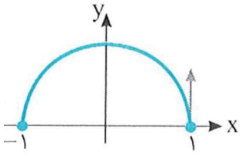








مثال: در تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$، نیم‌مماس چپ رسم شده بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=1$ موازی محور y است. زیرا



$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{-\sqrt{(1-x)^2}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1+x}}{-\sqrt{|1-x|}}=-\infty$$

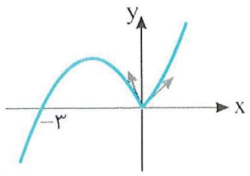
تست ۱۶

مجموع شیب‌های نیم‌مماس چپ و نیم‌مماس راست رسم شده بر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x\geq ۰ \\ -x^۲-۳x & x<۰ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ چقدر است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

راه‌حل

تابع f در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است. پس شرط لازم مشتق‌پذیری را دارد. مشتق چپ و مشتق راست تابع f را در این نقطه پیدا می‌کنیم.



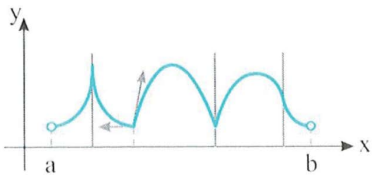
شیب نیم‌مماس چپ: $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-x^۲-۳x-۰}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}(-x-۳)=-۳$

شیب نیم‌مماس راست: $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x^۲+x-۰}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}(x+۱)=۱$

پس مجموع مورد نظر برابر -۲ است.

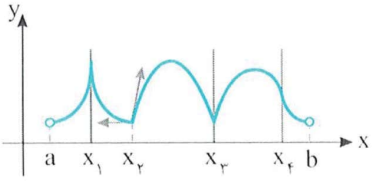
تست ۱۷

نمودار تابع f روی بازهٔ (a,b) به شکل مقابل است. این تابع در چند نقطه از این بازه مشتق‌پذیر نیست؟



۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل



مطابق شکل مقابل در نقاط $x_۱$، $x_۳$ و $x_۴$ خط مماس بر منحنی تابع موازی محور عرض‌هاست. و تابع مشتق چپ یا مشتق راست نامتناهی دارد پس تابع در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. در نقطهٔ $x_۲$ دو نیم‌مماس بر نمودار تابع رسم می‌شود و مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر نیستند. بنابراین تابع f در چهار نقطه مشتق‌پذیر نیست.

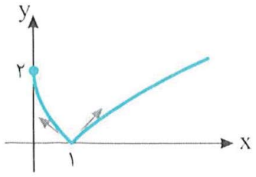
تعریف ۱۸۴

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو موجود باشند ولی برابر نباشند، یا یکی وجود داشته باشد و دیگری نامتناهی باشد، می‌گوییم نقطهٔ $x=a$ نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع f است.

تذکر

- اگر نقطهٔ $x=a$ نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع f باشد، آن‌گاه نمودار تابع f در نقطهٔ $(a,f(a))$ دو نیم‌مماس دارد که در یک امتداد نیستند.
- نمودار تابع در نقطهٔ گوشه‌ای خط مماس ندارد.

مثال: نقطهٔ $x=۱$ برای تابع $f(x)=۲|\sqrt{x}-۱|$ یک نقطهٔ گوشه‌ای است. به مقادیر مشتق راست، مشتق چپ و نمودار تابع توجه کنید:



$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲|\sqrt{x}-۱|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲(\sqrt{x}-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲(\sqrt{x}-۱)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}=۱$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲|\sqrt{x}-۱|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-۲(\sqrt{x}-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-۲}{\sqrt{x}+۱}=-۱$$

تابع f در این نقطه یک نیم‌مماس چپ و یک نیم‌مماس راست به‌ترتیب با شیب‌های -۱ و ۱ دارد.

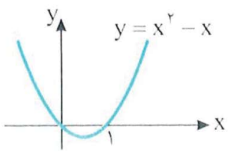
تست ۱۸

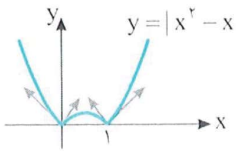
تابع $f(x)=|x^۲-x|$ چند نقطهٔ گوشه‌ای دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل

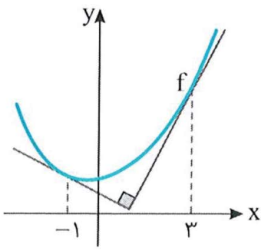
نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. از روی این نمودار معلوم می‌شود که نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع f هستند.





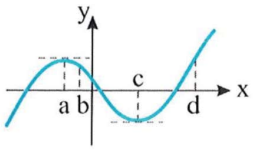
دست‌گرمی

۱۶۲- با توجه به شکل مقابل اگر $f'(۳)=۲$، مقدار $f'(-۱)$ کدام است؟



۱) -۲
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۴}$

۱۶۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مشتق تابع f در کدام نقطه مثبت است؟



۱) $x=a$
۲) $x=b$
۳) $x=c$
۴) $x=d$

۱۶۴- اگر $f(۱)=f'(۱)=-۲$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)+۲}{۲h}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

۱۶۵- مقدار مشتق تابع $f(x)=(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۵)$ در نقطهٔ $x=۵$ کدام است؟

۱) ۲۴
۲) -۲۴
۳) ۶
۴) -۶

۱۶۶- اگر $f(x)=\frac{(x-۱)\cos^۳(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{۴})}$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۴
۴) $\frac{۱}{۴}$

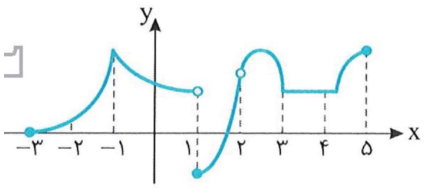
۱۶۷- اگر تابع f در هر نقطه مشتق‌پذیر باشد، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲-۲h)}{۳h}$ کدام است؟

۱) $f'(\frac{۴}{۳})$
۲) $\frac{۴}{۳}f'(۲)$
۳) $\frac{۲}{۳}f'(۲)$
۴) $\frac{۱}{۳}f'(۴)$

۱۶۸- مشتق راست تابع $f(x)=\frac{|x^۲-۱|}{x^۲+۱}$ در نقطهٔ $x=۱$ چقدر از مشتق چپ آن در این نقطه، بیشتر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۶۹- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. تابع f در چند نقطهٔ صحیح از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست؟

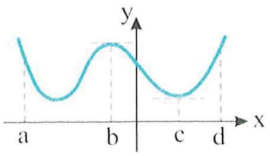


۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

آزمون ۱۰۹ مفهوم مشتق (۱)

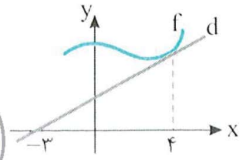
سؤال	گام
۱۰۸۱	۱۷۳
۱۰۸۲	۱۷۳
۱۰۸۳	۱۷۲
۱۰۸۴	۱۳۴ ۱۷۲ ۱۷۵
۱۰۸۵	۱۷۱
۱۰۸۶	۱۷۷
۱۰۸۷	۱۷۲
۱۰۸۸	۱۷۷ ۱۷۸
۱۰۸۹	۱۸۱
۱۰۹۰	۱۷۲ ۱۷۳

۱۰۸۱- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مشتق تابع f در کدام نقطه کوچک‌تر است؟



۱) $x=a$
۲) $x=b$
۳) $x=c$
۴) $x=d$

۱۰۸۲- در شکل زیر خط d بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۴ مماس است. اگر $f(4)+f'(4)=2$، مقدار $f(4)$ کدام است؟



۱) ۷
۲) $\frac{7}{2}$
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{7}{4}$

۱۰۸۳- اگر $f'(2)=3$، مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2f(x)-2f(2)}{x-2}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۸

۱۰۸۴- اگر $f(2)=4$ و $f'(x)=\frac{2x}{x-1}$، مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x^2-2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۰۸۵- اگر $f'(3)=6$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h^2+3h}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

۱۰۸۶- اگر $f'_+(1)=-3$ و $f'_-(1)=2$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h^2)-f(1)}{h^2}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) -2
۳) -3
۴) وجود ندارد.

۱۰۸۷- اگر $f(x)=(x-1)(x+1)^2(x^2+1)^2$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

۱۰۸۸- تابع $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$ در نقطهٔ $x=0$،

۱) مشتق‌پذیر است.
۲) مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد.
۳) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد.
۴) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

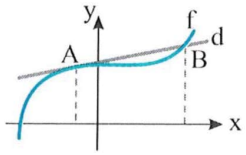
۱۰۸۹- اگر $f(x)=\sqrt[3]{(2-x)^2}$، کدام‌یک درست است؟

۱) $f'_-(2)=+\infty$، $f'_+(2)=+\infty$
۲) $f'_-(2)=-\infty$، $f'_+(2)=-\infty$
۳) $f'_-(2)=+\infty$، $f'_+(2)=-\infty$
۴) $f'_-(2)=-\infty$، $f'_+(2)=+\infty$

۱۰۹۰- نمودار تابع $f(x)=|x|\sqrt[3]{x}$ در نقطه‌ای به طول $x=0$،

۱) خط مماس موازی محور طول‌ها دارد.
۲) خط مماس موازی محور عرض‌ها دارد.
۳) دو نیم‌مماس عمود بر هم دارد.
۴) دو نیم‌مماس با زاویهٔ بین 45° دارد.

۱۰۹۱- در شکل زیر خط d در نقطهٔ $A(-۱,۳)$ بر نمودار تابع f مماس است و از نقطهٔ $B(۴,۴)$ نیز گذشته است. مقدار $f'(-۱)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۰۹۲- شیب خطی که نقاط $A(۳,۲)$ و $B(x,f(x))$ از نمودار تابع f را به هم وصل می‌کند برابر $\frac{k}{x}$ است. اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ A برابر ۲ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) -۸ ۴) -۱۸

۱۰۹۳- اگر $f(۱)=f'(۱)=۴$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲x-۲}{f(x)-۴}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۰۹۴- اگر $f'(۳)=۴$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۳f(x)-۳f(۳)}{x^۲-۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱۲

۱۰۹۵- اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}=۴$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-۲}{f(x)-f(۲)}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۱۰۹۶- اگر $f(۱)=۲$ و $f'(x)=\sqrt[۳]{x}+x$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-۸}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۰۹۷- اگر $f(x)=(x^۲-۳x+۲)\sqrt{\frac{x+۲}{x+۷}}$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

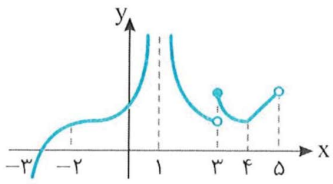
۱۰۹۸- اگر $f(x)=x+|x|\sqrt[۳]{x+۸}$، مقدار $f'_+(۰)-f'_-(۰)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۱۰۹۹- کدام تابع در نقطهٔ $x=۱$ مشتق ندارد ولی خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ به طول $x=۱$ وجود دارد؟

۱) $y=|x^۲-۱|$ ۲) $y=\frac{۱}{x-۱}$
۳) $y=(x-۱)|x-۱|$ ۴) $y=\sqrt[۳]{x-۱}$

۱۱۰۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مجموع طول نقطه‌هایی از دامنهٔ تابع که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، چقدر است؟

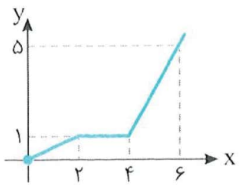


۱) ۳
۲) ۴
۳) ۷
۴) ۸

سؤال	گام
۱۰۹۱	۷۳
۱۰۹۲	۷۰
۱۰۹۳	۷۲
۱۰۹۴	۷۲
۱۰۹۵	۷۱ ۷۲
۱۰۹۶	۷۱ ۷۵ ۸۱
۱۰۹۷	۷۲
۱۰۹۸	۷
۱۰۹۹	۰ ۲
۱۱۰۰	۶ ۴

آزمون ۱۱۱ — مفهوم مشتق (۳)

۱۱۰۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $\frac{f'(۱)+f'(۳)}{f'(۵)}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۱۰۲- اگر $f(۲)=f'(۲)=۳$، مقدار $\lim_{x\to۲}\frac{f^۲(x)-۹}{x^۲-۴}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

۱۱۰۳- اگر $f(۱)=۳$ و $f'(x)=۳\sqrt{x^۲+۳}$، مقدار $\lim_{x\to۱}\frac{f^۳(x)-۲۷}{\sqrt{x}-۱}$ کدام است؟

۱) ۱۶۲ ۲) ۳۲۴ ۳) ۶۴۸ ۴) ۸۱

۱۱۰۴- اگر f تابعی چندجمله‌ای باشد و $\lim_{h\to۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}=۴$، مقدار $\lim_{x\to۲}\frac{x^۳-۸}{f(x)-f(۲)}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۳ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) -۳

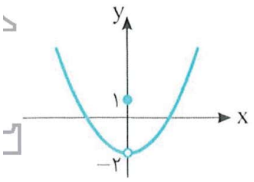
۱۱۰۵- اگر تابع f در نقطهٔ $x=۳$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{h\to۰}\frac{f(۳+۲h)-f(۳-h)}{h}=۱۲$، مقدار $f'(۳)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۱۰۶- اگر $f(x)=\begin{cases}x & x\geq۱\\ -۲x & x<۱\end{cases}$، مقدار $\lim_{h\to۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۱۱۰۷- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد و $g(x)=\frac{x}{x-۲f(x)}$، مقدار $g'(۰)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) وجود ندارد.

۱۱۰۸- اگر $f(x)=|x-۲|[x]$، مقدار $f'_+(۲)-f'_-(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۰۹- برای کدام تابع تساوی‌های $f'_+(۰)=+\infty$ و $f'_-(۰)=-\infty$ برقرار هستند؟

۱) $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ ۲) $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$ ۳) $f(x)=-\sqrt[۳]{|x|}$ ۴) $f(x)=-\sqrt[۳]{x}$

۱۱۱۰- تابع $f(x)=\big||x|-۲\big|$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال	گام
۱۱۰۱	۱۷۳
۱۱۰۲	۱۷۲ ۱۷۵
۱۱۰۳	۱۷۲ ۱۷۵ ۲۸۱
۱۱۰۴	۱۷۱ ۱۷۲ ۲۸۱
۱۱۰۵	۱۷۴
۱۱۰۶	۱۷۷ ۱۷۹
۱۱۰۷	۱۷۲
۱۱۰۸	۱۳۳ ۱۷۷
۱۱۰۹	۱۸۱
۱۱۱۰	۳۱ ۳۸ ۱۸۴

۱۱۱۱- اگر $f'(۲)=-۲$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲-h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۱۱۲- اگر $f'_+(۱)=-f'_-(۱)=۴$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+۳h)-f(۱-۴h)}{h}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) -۲۸

۱۱۱۳- مشتق چپ تابع $f(x)=\sqrt{۶-\sqrt{۴-|x|}}$ در نقطهٔ $x=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۶}$

۱۱۱۴- اگر $f(x)=\frac{[x]-x^۲}{\sqrt{x^۲+۳[x]}}$، مقدار $f'_+(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۱۱۵- مشتق چپ تابع $f(x)=(|x|+[-x])\sqrt[۳]{۴x^۳-۵}$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۱۶- تابع $f(x)=|x|[\sin x]$ در نقطهٔ $x=۰$

۱) مشتق‌پذیر است.
۲) مشتق چپ و مشتق راست دارد ولی مشتق‌پذیر نیست.
۳) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد.
۴) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

۱۱۱۷- اگر $f(x)=(x^۲-۱)\sin|x|$، مقدار $f'_+(۰)-f'_-(۰)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۱۱۸- اگر $f(x)=\frac{(x-۲)\cos^۳(\pi x)}{۱+\tan(\frac{\pi x}{۸})}$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۱۱۹- تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & |x|\le ۱\\ \frac{۱}{|x|} & |x|>۱\end{cases}$ چند نقطهٔ گوشه‌ای دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۲۰- تابع $f(x)=\big||x-۱|-|x+۱|\big|$ چند نقطهٔ گوشه‌ای دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال	گاه
۱۱۱۱	۷۴
۱۱۱۲	۷۴
۱۱۱۳	۳۳ ۳۴ ۷۷
۱۱۱۴	۳۳ ۳۴ ۷۷
۱۱۱۵	۳۳ ۷۷
۱۱۱۶	۳۳ ۷۷
۱۱۱۷	۳۳ ۷۷
۱۱۱۸	۲
۱۱۱۹	۴
۱۱۲۰	

درس دوم: قواعد مشتق‌گیری

همان‌طور که دیدیم، برای محاسبهٔ مشتق تابع در یک نقطه باید یک حد را حساب کنیم. معلوم است که انجام این کار وقتی با چند نقطه سروکار داریم وقت‌گیر است. در این درس ابتدا تابع مشتق را تعریف می‌کنیم و سپس تابع مشتق توابع معروف را به‌دست می‌آوریم. خواهیم دید که با این کار محاسبهٔ مشتق توابع در هر نقطه بسیار ساده‌تر می‌شود.

تعریف

تابع f مفروض است. تابع مشتق تابع f، که آن را با f' نشان می‌دهیم، تابعی است که دامنه‌اش مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی است که تابع f در آن‌ها مشتق‌پذیر است و مقدار آن در نقطهٔ x از دامنه‌اش برابر است با $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، یعنی مقدار تابع f' در هر نقطه مانند x برابر با مشتق تابع f در نقطهٔ x است.

به کمک تعریف تابع مشتق می‌توانیم تابع مشتق توابع معروف را به‌دست آوریم.

مثال:

- فرض کنید f تابع ثابت با مقدار k باشد. یعنی به‌ازای هر x حقیقی، $f(x)=k$. در این صورت

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$$

یعنی مشتق تابع ثابت، در هر نقطه برابر صفر است.

- فرض کنید $f(x)=x^2$. در این صورت

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

یعنی، مشتق تابع f در هر نقطه مانند x برابر $2x$ است.

- فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$. در این صورت (اگر $x\neq 0$)،

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

یعنی مشتق تابع f در هر نقطه مانند x (که $x\neq 0$) برابر $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ است.

مشتق تابع‌های معروف

$f(x)$	k	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\lvert x\rvert$	$[x]$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{x}{\lvert x\rvert}$	0	$\cos x$	$-\sin x$	$1+\tan^2 x$
توضیحات	$k\in\mathbb{R}$	$n\in\mathbb{Q}$	$x\neq 0$	$x>0$	$x\neq 0$	$x\neq 0$	$x\notin\mathbb{Z}$	$x\in\mathbb{R}$	$x\in\mathbb{R}$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

تذکر

- در تابع $f(x)=x^n$ اگر n عددی صحیح نباشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع را $(0,+\infty)$ در نظر می‌گیریم.
- تابع مشتق توابع $y=\frac{1}{x}$، $y=\sqrt{x}$، $y=\sqrt[3]{x}$ و ... را می‌توان به کمک تابع مشتق تابع $y=x^n$ به‌دست آورد.

مثال:

الف) $y=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow y'=(-1)x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$

ب) $y=\sqrt[3]{x}\ ,\ x>0\Rightarrow y=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

پ) $y=\sqrt[3]{x^2}\ ,\ x>0\Rightarrow y=x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

تست ۱ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، مقدار $g(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

راه‌حل بنابر تعریف تابع مشتق، $g(x)=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. بنابراین $g(\frac{1}{4})=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=1$.

تست ۲ اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، مقدار $g(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

راه‌حل بنابر تعریف تابع مشتق، $g(x)=f'(x)=\cos x$. بنابراین $g(\frac{3\pi}{4})=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

۱۸۷

قضیه اگر توابع f و g روی بازه‌ای باز شامل نقطهٔ $x=a$ تعریف شده باشند و در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه

(قاعدهٔ جمع) $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$ ، (قاعدهٔ ضرب) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$

(قاعدهٔ تفاضل) $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$ ، (k عددی حقیقی است.) $(kf)'(a)=kf'(a)$

همچنین اگر تابع g روی این بازه هیچ‌گاه صفر نشود، آن‌گاه

(قاعدهٔ تقسیم) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$ ، $(\frac{1}{g})'(a)=\frac{-g'(a)}{g^2(a)}$

مثال:

الف) $f(x)=x^3+2x^2-5x+1\Rightarrow f'(x)=3x^2+2(2x)-5(1)+0=3x^2+4x-5$

ب) $f(x)=x^2-\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

پ) $f(x)=x^3(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})=x^3\sqrt{x}+x^3\sqrt[3]{x}=x^3x^{\frac{1}{2}}+x^3x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{2}}+x^{\frac{10}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1}+\frac{10}{3}x^{\frac{10}{3}-1}=\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}+\frac{10}{3}x^{\frac{7}{3}}$

ت) $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-4}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+x)'(x^2-4)-(x^2-4)'(x^2+x)}{(x^2-4)^2}=\frac{(2x+1)(x^2-4)-(2x)(x^2+x)}{(x^2-4)^2}$

تست ۳ اگر $f(x)=2x^2-3x+1$ و $g(x)=3x^2-x+4$، حاصل $(f+g)'(x)$ کدام است؟

۱) $10x+4$ ۲) $10x-5$ ۳) $10x-4$ ۴) $10x+5$

راه‌حل توجه کنید که $(f+g)'=f'+g'$. بنابراین $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=4x-3+6x-1=10x-4$.

تست ۴ اگر $f(x)=1-x+x^2+x^3$ و $g(x)=1+x-x^2+x^3$، مقدار $(f\times g)'(1)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

راه‌حل بنابر قاعدهٔ ضرب، $(f\times g)'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$. از طرف دیگر $f(1)=2$، $g(1)=2$ و

$f'(x)=-1+2x+3x^2\Rightarrow f'(1)=4$، $g'(x)=1-2x+3x^2\Rightarrow g'(1)=2$

بنابراین $(f\times g)'(1)=4\times 2+2\times 2=12$.

تست ۵ اگر $f(x)=\tan x-\sin x$، مقدار $f'(\pi)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

راه‌حل توجه کنید که

$$f'(x)=۱+\tan^۲ x-\cos x \Rightarrow f'(\pi)=۱+۰-(-۱)=۲$$

تست ۶ اگر $f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{x^۳}$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۶

راه‌حل توجه کنید که $f(x)=x^{-۱}+x^{-۲}+x^{-۳}$. $(x>۰)$؛ بنابراین $f'(x)=-x^{-۲}-۲x^{-۳}-۳x^{-۴}$. در نتیجه $f'(۱)=-۱-۲-۳=-۶$.

تست ۷ اگر $f(x)=۱-x+x^۲-x^۳+\cdots-x^{۹۹}+x^{۱۰۰}$، مقدار $f'(-۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵۰۵۰ ۳) -۵۰۵۰ ۴) -۲۵۲۵

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=-۱+۲x-۳x^۲+۴x^۳-\cdots-۹۹x^{۹۸}+۱۰۰x^{۹۹}$. بنابراین $f'(-۱)=-۱-۲-۳-۴-\cdots-۹۹-۱۰۰=-۵۰۵۰$.

تست ۸ اگر f تابعی خطی باشد، $f(۰)=۴$ و $f'(x)=۳$، مقدار $f(-۲)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۲

راه‌حل فرض کنید $f(x)=ax+b$. در این صورت $f'(x)=a$ و

$$\begin{cases} f(۰)=۴ \\ f'(x)=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=۴ \\ a=۳ \end{cases}$$

در نتیجه $f(x)=۳x+۴$ و $f(-۲)=-۲$.

تست ۹ اگر $f(x)=\frac{۳x^۳-۲x^۲+۱}{x+۱}$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

راه‌حل بنابر قاعدهٔ تقسیم، $f'(x)=\frac{(۹x^۲-۴x)(x+۱)-(۳x^۳-۲x^۲+۱)}{(x+۱)^۲}$. در نتیجه $f'(۱)=۲$.

تست ۱۰ مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{۶۳(\sqrt[۳]{x}+۱)}{x^۲-۱}$ در نقطهٔ $x=۸$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۹}{۲۸}$ ۲) $-\frac{۲۱}{۲۸}$ ۳) $-\frac{۵۹}{۶۳}$ ۴) $-\frac{۵۶}{۶۳}$

راه‌حل با استفاده از قضایای مشتق می‌نویسیم:

$$f'(x)=۶۳\times\frac{(\sqrt[۳]{x}+۱)'(x^۲-۱)-(x^۲-۱)'(\sqrt[۳]{x}+۱)}{(x^۲-۱)^۲}=۶۳\times\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x^۲-۱)-۲x(\sqrt[۳]{x}+۱)}{(x^۲-۱)^۲}$$

پس $f'(۸)=۶۳\times\frac{\frac{۶۳}{۳\times۴}-۲\times۸(۲+۱)}{۶۳^۲}=-\frac{۱۹}{۲۸}$.

تست ۱۱ اگر $f(x)=\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x+\sin x}$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi^۲}{۲}$ ۲) $\frac{\pi^۲}{۲}$ ۳) $-\frac{\pi^۲}{۴}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۴}$

راه‌حل توجه کنید که بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(\sin x+x\cos x-\sin x)(x\cos x+\sin x)-(\cos x-x\sin x+\cos x)(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x+\sin x)^۲}$$
$$=\frac{x\cos x(x\cos x+\sin x)-(۲\cos x-x\sin x)(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x+\sin x)^۲}$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{۲})=\frac{۰-(-\frac{\pi}{۲})(\frac{\pi}{۲})}{(۰+۱)^۲}=\frac{\pi^۲}{۴}$.

تست ۱۲ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(۲,-۱)$ برابر با ۳ است. اگر $g(x)=\frac{f(x)}{x}$، مقدار $g'(-۱)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) -۷

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $g'(x)=\frac{f'(x)\times x-۱\times f(x)}{x^۲}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^۲}$. بنابراین

$$g'(-۱)=\frac{-f'(-۱)-f(-۱)}{(-۱)^۲}=-f'(-۱)-f(-۱)$$

از طرف دیگر، چون نقطهٔ $(۲,-۱)$ متعلق به نمودار تابع f است، پس $f(-۱)=۲$. همچنین، شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(۲,-۱)$ برابر است با $f'(-۱)$. در نتیجه $f'(-۱)=۳$. به این ترتیب، $g'(-۱)=-f'(-۱)-f(-۱)=-۳-۲=-۵$.

۱۸۸

نکته

گاهی بهتر است ضابطهٔ تابع را ساده کنیم، سپس مشتق آن را پیدا کنیم. مثلاً وقتی ضابطهٔ تابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح است، ابتدا ضابطهٔ تابع را به کمک تعیین علامت و بازه‌بندی، بدون قدرمطلق و جزء صحیح می‌نویسیم.

تست ۱۳ اگر $f(x)=(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)$، مقدار $f'(-۲)$ کدام است؟

۱) -۸۰ ۲) -۱۶۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۸۰

راه‌حل ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر، $f(x)=x^۵+۱$، بنابراین $f'(x)=۵x^۴$ و در نتیجه $f'(-۲)=۸۰$.

تست ۱۴ اگر $f(x)=(x+\sqrt{x^۲-x})^{۱۰}$ و $g(x)=(x-\sqrt{x^۲-x})^{۱۰}$، مقدار $f'(-۱)g(-۱)+g'(-۱)f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -۹ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

راه‌حل عبارت مورد نظر، مشتق تابع $f\times g$ در نقطهٔ $x=-۱$ است. پس ابتدا $f\times g$ را پیدا می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم و به‌جای x مقدار -۱ را قرار می‌دهیم:

$$(f\times g)(x)=(x+\sqrt{x^۲-x})^{۱۰}(x-\sqrt{x^۲-x})^{۱۰}=((x+\sqrt{x^۲-x})(x-\sqrt{x^۲-x}))^{۱۰}=(x^۲-x^۲+x)^{۱۰}=x^{۱۰}$$

بنابراین

$$(f\times g)'(x)=۱۰x^۹\Rightarrow(f\times g)'(-۱)=۱۰\times(-۱)^۹=-۱۰$$

تست ۱۵ تابع مشتق تابع $f(x)=\frac{\cos ۲x}{\sin x+\cos x}$ کدام است؟

۱) $f'(x)=\sin x-\cos x$ ۲) $f'(x)=-\sin x-\cos x$

۳) $f'(x)=-\sin x+\cos x$ ۴) $f'(x)=\sin x+\cos x$

راه‌حل ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم، سپس مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=\cos x-\sin x\Rightarrow f'(x)=-\sin x-\cos x$$

تست ۱۶ اگر $f(x)=|x-4|-x^2$، مقدار $f'(5)+f'(3)$ کدام است؟

۱) -12 ۲) -14 ۳) -16 ۴) -20

راه‌حل توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=3$، $x-4<0$، پس $f(x)=-(x-4)-x^2=-x+4-x^2\Rightarrow f'(x)=-1-2x\Rightarrow f'(3)=-1-6=-7$

همین‌طور، در یک همسایگی نقطهٔ $x=5$، $x-4>0$، پس $f(x)=x-4-x^2\Rightarrow f'(x)=1-2x\Rightarrow f'(5)=1-10=-9$

در نتیجه، $f'(3)+f'(5)=-16$.

تست ۱۷ اگر $f(x)=[x+\frac{3}{2}]x+x^2-1$، مقدار $f'_+(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$، $2<x+\frac{3}{2}<3\Rightarrow[x+\frac{3}{2}]=2$

در نتیجه، در این همسایگی، $f(x)=2x+x^2-1\Rightarrow f'(x)=2+2x$

بنابراین $f'_+(\frac{1}{2})=3$.

نکته عامل صفرکننده ۱۸۹

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، $f(a)=0$ و تابع g در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=f(x)g(x)$ در نقطهٔ $x=a$ کافی است مقدار مشتق تابع f را در مقدار تابع g ضرب کنیم، یعنی

$$y'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)\underbrace{f(a)}_{0}\Rightarrow y'(a)=f'(a)g(a)$$

در این حالت $f(x)$ را در اصطلاح عامل صفرکننده می‌نامیم.

تست ۱۸ اگر $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x+1}$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

راه‌حل توجه کنید که اگر $g(x)=x^2-3x+2$ و $h(x)=\frac{1}{x^3-4x+1}$. آن‌گاه $g(1)=0$ و $f(x)=g(x)h(x)$. بنابراین $g(x)$ در $x=1$ عامل صفرکننده است و کافی است فقط از آن مشتق بگیریم و مقدار $g'(1)$ را در $h(1)$ ضرب کنیم تا $f'(1)$ به‌دست آید.

$$g'(x)=2x-3\Rightarrow g'(1)=-1\quad,\quad h(1)=\frac{1}{1-4+1}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین $f'(1)=g'(1)h(1)=(-1)(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

تست ۱۹ مشتق تابع $f(x)=(x^2-1)(x^2-2)\cdots(x^2-9)$ به‌ازای $x=3$ چقدر است؟

۱) $6\times 8!$ ۲) $8!$ ۳) $-6\times 8!$ ۴) $-8!$

راه‌حل x^2-9 به‌ازای $x=3$ صفر می‌شود، پس عامل صفرکننده است و درنتیجه

$$f'(3)=2\times 3\times(3^2-1)(3^2-2)\cdots(3^2-8)=2\times 3\times 8\times 7\times\cdots\times 1=6\times 8!$$

تست ۲۰ مشتق تابع $f(x)=\sin x\cos^{۴} x$ در نقطهٔ $x=\pi$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) -۱ ۴) ۱

راه‌حل در نقطهٔ $x=\pi$، عبارت $\sin x$ عامل صفرکننده است، بنابراین کافی است فقط مشتق آن را در نقطهٔ $x=\pi$ حساب کنیم و در بقیهٔ عبارت ضرب کنیم: $f'(\pi)=\cos(\pi)\times\cos^{۴}(\pi)=\cos^{۵}(\pi)=-۱$.

تست ۲۱ مشتق تابع $f(x)=\dfrac{\tan x}{۲\sin^{۲} x-۳\cos^{۲} x}$ در نقطهٔ $x=\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

راه‌حل عبارت $\tan x$ عامل صفرکننده است، پس فقط از آن مشتق می‌گیریم:

$$(\tan x)'=۱+\tan^{۲} x \xrightarrow{x=\pi} ۱+\tan^{۲}\pi=۱+۰=۱$$

بقیهٔ ضابطهٔ تابع را به همان شکل می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۲\sin^{۲} x-۳\cos^{۲} x}\xrightarrow{x=\pi}\frac{۱}{۲\sin^{۲}\pi-۳\cos^{۲}\pi}=\frac{۱}{۲\times۰-۳\times۱}=-\frac{۱}{۳}$$

بنابراین $f'(\pi)=۱\times(-\frac{۱}{۳})=-\frac{۱}{۳}$.

دست‌گرمی

۱۷۰- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ و $g(x)=\lim\limits_{h\to۰}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$، مقدار $g(۸)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۷۱- اگر $f(x)=x^{۳}+x-۱$ و $g(x)=x^{۴}+۱$، مقدار $(\frac{f}{g})'(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۷۲- مقدار مشتق تابع $f(x)=x(x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۱)(x^{۴}+۱)$ در نقطهٔ $x=\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۷۳- اگر $f(x)=|۴x-x^{۲}|+|x+۱|$، مقدار $f'(-۲)+f'(۵)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۱۴ ۴) -۱۲

۱۷۴- اگر $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi^{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\pi^{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۱۷۵- مشتق تابع $f(x)=\sin x\cos^{۸} x$ در نقطهٔ $x=\pi$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) -۱ ۴) ۱

آزمون ۱۱۳ قواعد مشتق‌گیری (۱)

۱۱۲۱- اگر $f(x)=x^۳-۳x+۴$، مقدار $f'(\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۳}$ ۲) $-\frac{۸}{۳}$ ۳) $-\frac{۵}{۹}$ ۴) $-\frac{۸}{۹}$

۱۱۲۲- اگر $f(x)=(ax+۱)(x-۳)$ و $f'(۱)=۵$، مقدار a کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۱۲۳- اگر $f(x)=\frac{(x-۲)(x-۴)}{x^۲}$، مقدار $f'(-۲)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۱۲۴- اگر $f(x)=\frac{x^۳}{x^۲+k}$، که در اینجا k عددی مثبت است و $f'(-۱)=\frac{۵}{۸}$، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۲۵- اگر $f(x)=۲\sqrt{x}+۳\sqrt[۳]{x}$، مقدار $f'(۲^{-۶})$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۴۰ ۴) ۷۲

۱۱۲۶- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-۱$، مقدار $(\frac{f}{g})'(۱)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) -۵

۱۱۲۷- اگر $f(x)=\frac{۶\sqrt{x}-۲۴}{\sqrt[۳]{x}}$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۱۲۸- اگر $f(x)=|x-۴|+۲x$، مقدار $f'(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۲۹- اگر $f(x)=۳x^۲-[\frac{x}{۲}+۱]$، مقدار $f'(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۱۱۳۰- اگر $f(x)=۲\sin x-۳\cos x$، مقدار $\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(\pi+h)-f^۲(\pi)}{h}$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۱۲- ۳) ۶ ۴) ۱۲

سؤال	گام
۱۱۲۱	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۲۲	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۲۳	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۲۴	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۲۵	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۲۶	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۲۷	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۲۸	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۱۲۹	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۱۳۰	۱۷۱ ۱۸۶ ۱۸۷

آزمون ۱۱۴ — قواعد مشتق‌گیری (۲)

۱۱۳۱- اگر $f(x)=\frac{x^۳}{۳}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})x^۲+۲x-۱$، مقدار $f'(\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۱۱۳۲- اگر $f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}-\frac{۱}{x^۲+۱}$، مقدار $f'(-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۱۱۳۳- اگر $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=-۲$، مقدار مشتق تابع $g(x)=\frac{x^۲}{f(x)}$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲۰}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۱۳۴- اگر $f(x)=\frac{x}{x+a}$ و $f'(۰)=\frac{۱}{۳}$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۱۱۳۵- اگر $f(x)=(\sqrt{x}-۱)(x^۲+۱)$، مقدار $f'(۴)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۱۷}{۴}$ ۳) ۱۲ ۴) $\frac{۴۹}{۴}$

۱۱۳۶- اگر $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۱-\sqrt{x}}$، مقدار $f'(\frac{۱}{۴})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۱۳۷- مقدار مشتق تابع $f(x)=x\sqrt{x}(\sqrt[۳]{x}+۲)$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۹}{۶}$ ۲) $\frac{۷}{۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳}$

۱۱۳۸- اگر $f(x)=x^۲+|x^۳-۲x|$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۱۴ ۳) ۶ ۴) -۱۴

۱۱۳۹- اگر $f(x)=\frac{x^۳}{x+۵[x]}$، مقدار $f'(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶۰}{۱۶۹}$ ۲) $\frac{۱۶۹}{۱۶۰}$ ۳) $\frac{۱۶۲}{۱۶۹}$ ۴) $\frac{۱۶۹}{۱۶۲}$

۱۱۴۰- اگر $f(x)=\frac{۱+۲\sin x}{۱+۳\cos x}$، مقدار $f'(\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

سؤال
۱۱۳۱ ۸۶ ۸۷
۱۱۳۲ ۸۶ ۸۷
۱۱۳۳ ۸۶ ۸۷
۱۱۳۴ ۸۶ ۸۷
۱۱۳۵ ۸۶ ۸۷
۱۱۳۶ ۸۶ ۸۷
۱۱۳۷ ۸۶ ۸۷
۱۱۳۸ ۸۶ ۸۷ ۸۸
۱۱۳۹ ۸۶ ۸۷ ۸۸
۱۱۴۰

آزمون ۱۱۵ قواعد مشتق‌گیری (۳)

۱۱۴۱- اگر $f(x)=ax^3-ax^2+4x-1$ و $f'(-2)=12$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۱۱۴۲- حاصل‌ضرب طول نقاطی که مقدار مشتق تابع $f(x)=x(x^2-1)(x^2-2)$ در آن نقطه‌ها برابر صفر است، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$

۱۱۴۳- اگر $f(x)=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{20}}{x^{10}}$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵۵- ۳) ۱۰۹- ۴) ۱۱۰-

۱۱۴۴- اگر $f(x)=\frac{x^5-x^3+x^2-1}{x^3+1}$، مقدار $f'(\frac{\sqrt{2}-1}{2})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}+1$ ۴) ۱-

۱۱۴۵- اگر $f(x)=\frac{x^2-mx+4}{x^2+5x+3}$ و $f'(-1)=0$، مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{11}{2}$ ۲) $-\frac{13}{2}$ ۳) $\frac{11}{2}$ ۴) $\frac{13}{2}$

۱۱۴۶- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۱۱۴۷- مقدار مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[3]{x}(x\sqrt{x}+1)$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{6}$ ۲) $\frac{25}{3}$ ۳) $\frac{13}{6}$ ۴) $\frac{13}{3}$

۱۱۴۸- تابع‌های f و g در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌پذیرند. $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2-1}{2x}$ و $f(-1)=1$. مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۳

۱۱۴۹- اگر $f(x)=\frac{\sin x}{x}$، مقدار $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{4}{\pi^2}$ ۳) $\frac{4}{\pi^2}$ ۴) $\frac{\pi^2}{4}$

۱۱۵۰- اگر $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$، حاصل $f'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sin x}{\cos x-2}$ ۲) $\frac{1}{1-\cos x}$ ۳) $\frac{1}{\cos x-1}$ ۴) $\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$

سؤال	گام
۱۱۴۱	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۴۲	۱۸۶ ۱۸۷ ۳۰۳
۱۱۴۳	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۴۴	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۱۴۵	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۴۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۹
۱۱۴۷	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۴۸	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۴۹	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۵۰	۱۸۶ ۱۸۷

آزمون ۱۱۶ — قواعد مشتق‌گیری (۴)

۱۱۵۱- اگر $f(x)=1+x-x^2+x^3-x^4+\cdots+x^{49}-x^{50}$، مقدار $f'(-1)$ کدام است؟

۱) -1275 ۲) 1275 ۳) -50 ۴) صفر

۱۱۵۲- اگر $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(ax+4)$ و $f'(-1)=2$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۵۳- اگر f یک تابع خطی باشد و $f'(x)f(x)=4x-8$، مقدار $f'(3)$ کدام است؟

۱) ± 4 ۲) ± 3 ۳) ± 2 ۴) ± 1

۱۱۵۴- اگر $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+mx+1}$ و $f'(0)=2m$، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۱۱۵۵- اگر $f(x)=\frac{g(x)-1}{x^2+1}$، $f(1)=4$ و $f'(1)=2$، مقدار $g'(1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۱۵۶- اگر $f(x)=2x^2+\frac{8}{x^2}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{3h}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۵۷- مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^3+\sqrt[3]{x}}$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{12}$ ۲) $-\frac{5}{12}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۱۱۵۸- اگر $f(x)=(x^2+\sqrt{x^4+x^2})^9$ و $g(x)=(x^2-\sqrt{x^4+x^2})^9$، مقدار $f'(1)g(1)+g'(1)f(1)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -9 ۳) ۱۸ ۴) -18

۱۱۵۹- اگر $f(x)=\frac{a+\sin x}{\cos x-1}$ و $f'(\frac{\pi}{2})=1$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) صفر

۱۱۶۰- به‌ازای چه مقادیری از m مشتق تابع $f(x)=mx+2\cos x$ می‌تواند در نقطه‌ای صفر شود؟

۱) $0\le m\le 3$ ۲) $-2\le m\le 2$ ۳) $-3\le m\le 0$ ۴) $-3\le m\le 3$

سؤال
۱۱۵۱
۱۱۵۲
۱۱۵۳
۱۱۵۴
۱۱۵۵
۱۱۵۶
۱۱۵۷
۱۱۵۸
۱۱۵۹
۱۱۶۰

آزمون ۱۱۷ قواعد مشتق‌گیری (۵)

سؤال	گام
۱۱۶۱	۱۸۶ ۱۸۹
۱۱۶۲	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۱۶۳	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۱۶۴	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۱۶۵	۱۸۶ ۱۸۸
۱۱۶۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸
۱۱۶۷	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۶۸	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۶۹	۱۸۶ ۱۸۷
۱۱۷۰	۱۸۶ ۱۸۷

۱۱۶۱- اگر $f(x)=(\sqrt{x}-۸)(\sqrt[۳]{x}+۴)\sqrt[۴]{x}$، مقدار $f'(۶۴)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt[۴]{۲}$

۱۱۶۲- اگر $f(x)=\frac{|x^۲-۱|}{x+[۲x]}$، مقدار $f'(\frac{۴}{۵})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۳

۱۱۶۳- اگر $f(x)=|x^۲-۳x|-|x^۲+۳x|$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) -۸ ۴) ۱۶

۱۱۶۴- اگر $f(x)=|۲x-x^۲\sqrt{x}|$، مقدار $f'(۱)f'(۴)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۷ ۳) -۸ ۴) -۹

۱۱۶۵- اگر $f(x)=(x^۲-۲۰)(x^۲-۲۱)(x^۲-۲۲)\cdots(x^۲-۵۰)$ مقدار $f'(۷)$ کدام است؟

۱) $-۳۰!$ ۲) $-۱۴\times۳۰!$ ۳) $-۱۴\times۲۹!$ ۴) $۳۰!$

۱۱۶۶- مقدار مشتق تابع $f(x)=|x|+|x-۱|+|x-۲|+\cdots+|x-۲۰|$ در نقطهٔ $x=\frac{۲۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۶۷- اگر $f(x)=\frac{۱+x\sin x}{۱-x\sin x}$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{(۱-\frac{\pi}{۲})^۲}$ ۲) $\frac{-\pi}{(۱-\frac{\pi}{۲})^۲}$ ۳) $\frac{۲}{(۱-\frac{\pi}{۲})^۲}$ ۴) $\frac{۱}{(۱-\frac{\pi}{۲})^۲}$

۱۱۶۸- اگر $f(x)=\frac{۱+\sin x}{۱+۲\cos x}$، مقدار $f'(۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۱۶۹- اگر $y=a\sin x+۲\cos x$ و $y^۲+y'^۲=۸$، مقدار $a^۲$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۱۷۰- مشتق توابع $f(x)=mx+۲\sin x$ و $g(x)=۴x-۱$ در نقاطی برابر است. حدود m کدام است؟

۱) $-۶\le m\le ۲$ ۲) $-۲\le m\le ۰$ ۳) $۲\le m\le ۶$ ۴) $-۲\le m\le ۶$

درس سوم: مشتق تابع مرکب

مشتق تابع مرکب، قاعدهٔ زنجیری

به یاد دارید که تابع مشتق تابع $y=\sqrt{x}$ به‌صورت $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ است. با این حال، اگر f تابع باشد مشتق تابع $y=\sqrt{f(x)}$ همواره به‌صورت $y'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}$ نیست. توجه کنید که تابع $y=\sqrt{f(x)}$ را می‌توان به‌صورت ترکیب دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=f(x)$ نوشت. برای پیدا کردن تابع مشتق توابع مرکب می‌توانیم از قضیهٔ زیر استفاده کنیم.

قضیه قاعدهٔ زنجیری

اگر تابع g در نقطهٔ x و تابع f در نقطهٔ $g(x)$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$.

تذکر بنابر قضیهٔ بالا برای پیدا کردن مشتق $(fog)(x)$، مشتق تابع f را حساب می‌کنیم و به‌جای x در آن $g(x)$ قرار می‌دهیم تا $f'(g(x))$ به‌دست آید. سپس آن را در $g'(x)$ ضرب می‌کنیم.

مثال: برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=\sqrt{x^2+1}$ می‌نویسیم $y=(fog)(x)$، که در اینجا $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2+1$. بنابراین

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(g(x))=f'(x^2+1)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}},\quad g'(x)=2x\Rightarrow y'=(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))=(2x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: برای محاسبهٔ مشتق تابع $y=\sqrt{\sin x}$ می‌نویسیم $y=(fog)(x)$، که در اینجا $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin x$. بنابراین

$$\begin{cases} g'(x)=\cos x \\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(g(x))=f'(\sin x)=\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \end{cases} \Rightarrow y'=(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))=\cos x\times\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}$$

تست ۱ اگر $g(2)=4$، $g'(2)=6$ و $f'(x)=\frac{x}{x+2}$، مقدار $(fog)'(2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل بنابر قاعدهٔ زنجیری

$$(fog)'(2)=g'(2)f'(g(2))=6f'(4)=6\times\frac{4}{4+2}=4$$

تست ۲ اگر $f(2x+3)=x+x^2$، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر از دو طرف تساوی $f(2x+3)=x+x^2$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید

$$(2x+3)'f'(2x+3)=1+2x\Rightarrow 2f'(2x+3)=1+2x\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}2f'(4)=1+1=2\Rightarrow f'(4)=1$$

تست ۳ اگر $g(x)=f(\frac{1}{\sqrt{x}})$ و $f'(x)=\frac{x^2+2}{x}$، مقدار $g'(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۱۲ ۴) -12

راه‌حل می‌توان نوشت $g'(x)=(\frac{1}{\sqrt{x}})'f'(\frac{1}{\sqrt{x}})=\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\times f'(\frac{1}{\sqrt{x}})$. پس

$$g'(\frac{1}{4})=\frac{-1}{2\sqrt{(\frac{1}{4})^3}}\times f'(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}})=\frac{-1}{\frac{1}{4}}\times f'(2)=-4f'(2)$$

از طرف دیگر $f'(2)=\frac{4+2}{2}=3$، بنابراین $g'(\frac{1}{4})=-12$.

تست ۴ اگر $g(\sqrt{x})=f(\frac{1}{x})$ و $g'(2)=4$، مقدار $f'(\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) -8 ۳) ۱۶ ۴) -16

راه‌حل از دو طرف تساوی $g(\sqrt{x})=f(\frac{1}{x})$ مشتق می‌گیریم: $\frac{1}{2\sqrt{x}}g'(\sqrt{x})=-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=4$، به‌دست می‌آید

$$\frac{1}{4}g'(2)=-\frac{1}{16}f'(\frac{1}{4})\Rightarrow\frac{1}{4}\times 4=-\frac{1}{16}f'(\frac{1}{4})\Rightarrow f'(\frac{1}{4})=-16$$

نکته ۱۹۱

با استفاده از قاعدهٔ زنجیری تابع مشتق تابع‌های مرکب معروف را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد.

تابع	$\lvert f(x)\rvert$	$\sqrt[3]{f(x)}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{1}{f(x)}$	$(f(x))^n$	تابع
تابع مشتق	$\frac{f'(x)f(x)}{\lvert f(x)\rvert}$	$\frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$	$nf'(x)(f(x))^{n-1}$	تابع مشتق

تابع	$\tan f(x)$	$\cos f(x)$	$\sin f(x)$	تابع
تابع مشتق	$f'(x)(1+\tan^2 f(x))$	$-f'(x)\sin f(x)$	$f'(x)\cos f(x)$	تابع مشتق

مثال:

الف) $y=(x^2+1)^4\Rightarrow y'=4(2x)(x^2+1)^3$

ب) $y=\frac{1}{x^2+x}\Rightarrow y'=-\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

پ) $y=\sqrt{x^3-2}\Rightarrow y'=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-2}}$

ت) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}\Rightarrow y'=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$

ث) $y=|x^2+3x|\Rightarrow y'=\frac{(2x+3)(x^2+3x)}{|x^2+3x|}$

ج) $y=\sin\frac{1}{x}\Rightarrow y'=(-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x}$

تست ۵ اگر $f(x)=(3x+1)^2(x-a)$ و $f'(1)=-8$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل بنابر قاعدهٔ ضرب و اینکه $(g^n)'=ng'g^{n-1}$.

$$f'(x)=2(3)(3x+1)(x-a)+(3x+1)^2(1)$$

بنابراین

$$\begin{cases}f'(1)=6(4)(1-a)+16\\ f'(1)=-8\end{cases}\Rightarrow a=2$$

تست ۶ اگر $g(x)=\frac{۱}{(x^۲-x)^۸}$، حاصل $g'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۸(۲x-۱)}{(x^۲-x)^۹}$ ۲) $\frac{۸(۲x-۱)}{(x^۲-x)^{۱۶}}$ ۳) $-\frac{۸(۲x-۱)}{(x^۲-x)^۹}$ ۴) $-\frac{۸(۲x-۱)}{(x^۲-x)^{۱۶}}$

راه‌حل راه‌حل اول توجه کنید که $(\frac{۱}{f})'=\frac{-f'}{f^۲}$ و $(f^۸)'=۸f'f^۷$، بنابراین

$$g'(x)=\frac{-۸(۲x-۱)(x^۲-x)^۷}{(x^۲-x)^{۱۶}}=\frac{-۸(۲x-۱)}{(x^۲-x)^۹}$$

راه‌حل دوم

$$g(x)=\frac{۱}{(x^۲-x)^۸}=(x^۲-x)^{-۸}\Rightarrow g'(x)=-۸(۲x-۱)(x^۲-x)^{-۹}=\frac{-۸(۲x-۱)}{(x^۲-x)^۹}$$

تست ۷ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۹}-\sqrt{x}$، مقدار $f'(۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۰}$

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۹}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$، بنابراین $f'(۴)=\frac{۴}{\sqrt{۲۵}}-\frac{۱}{۲\times۲}=\frac{۱۱}{۲۰}$.

تست ۸ اگر $f(x)=a\cos x+۲a\cos ۵x$ و $f'(\frac{\pi}{۶})=-\frac{۳۳}{۲}$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱۱}{۳}$ ۳) -۳ ۴) ۳

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=a(-\sin x)+۲a(۵)(-\sin ۵x)$. در نتیجه $f'(\frac{\pi}{۶})=a(-\frac{۱}{۲})+۱۰a(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱۱}{۲}a$. بنابراین $-\frac{۱۱}{۲}a=-\frac{۳۳}{۲}$

پس $a=۳$.

تست ۹ اگر $f(x)=\tan x(\cos ۴x-\sin ۲x)$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) -۶

راه‌حل توجه کنید که بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=(\tan x)'(\cos ۴x-\sin ۲x)+\tan x(\cos ۴x-\sin ۲x)'=(۱+\tan^۲ x)(\cos ۴x-\sin ۲x)+\tan x(۴(-\sin ۴x)-۲\cos ۲x)$$

در نتیجه $f'(\frac{\pi}{۴})=(۱+۱)(-۱-۱)+۱\,(۴\times(۰)-۲\times(۰))=-۴$.

نکته

اگر هر تعدادی از تابع‌ها را ترکیب کنیم، باز هم می‌توان طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق تابع مرکب را حساب کرد. برای ترکیب سه تابع، این قاعده به‌صورت زیر است:

$$y=(fogoh)(x)\Rightarrow y'=h'(x)g'(h(x))f'(g(h(x)))$$

تذکر

- طبق قاعدهٔ بالا، از $h(x)$ مشتق گرفته‌ایم.
- از $g(x)$ مشتق گرفته‌ایم و در آن به جای x قرار داده‌ایم $h(x)$.
- از $f(x)$ مشتق گرفته‌ایم و در آن به جای x قرار داده‌ایم $g(h(x))$.
- سپس سه مقدار بالا را در هم ضرب کرده‌ایم.

مثال: اگر $y=(\sqrt[۳]{x^۲+۱})^۲$، آن‌گاه $y'=(۲x)(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۱)^۲}})(۲\sqrt[۳]{x^۲+۱})$.

توجه کنید که از $x^۲+۱$ مشتق گرفته‌ایم. از $\sqrt[۳]{x}$ مشتق گرفته‌ایم که می‌شود $\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$ و در آن به جای x قرار داده‌ایم $x^۲+۱$.

از $x^۲$ مشتق گرفته‌ایم که می‌شود $۲x$ و در آن به جای x قرار داده‌ایم $\sqrt[۳]{x^۲+۱}$. سپس این سه مقدار را در هم ضرب کرده‌ایم.

تست ۱۰ مقدار مشتق تابع $f(x)=\tan^۲(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۴})$ در نقطهٔ $x=\frac{۲\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۹}$ ۳) $-\frac{۸\sqrt{۳}}{۹}$ ۴) $-\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

راه‌حل ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=(\tan(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۴}))^۲$ می‌نویسیم و از آن مشتق می‌گیریم: $f'(x)=-\frac{۱}{۴}\times(۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۴}))\times۲\tan(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۴})$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=\frac{۲\pi}{۳}$، به‌دست می‌آید

$$f'(\frac{۲\pi}{۳})=-\frac{۱}{۴}\times(۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۶}))\times۲\tan(\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۴}(۱+\frac{۱}{۳})\times۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=-\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$$

دست‌گرمی

۱۷۶- اگر $f(x)=(۲x^۲+۳)^۴$، مقدار $f'(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱۶×۵^۳ ۲) -۱۶×۵^۳ ۳) ۸×۵^۳ ۴) -۸×۵^۳

۱۷۷- اگر $f(x)=\sqrt{x^۳+۱}$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷۸- اگر $f(x)=\frac{۳x^۳-۲x^۲+۱}{(x+۱)^۲}$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۷۹- اگر $f(-۳x+۵)=۲x^۳+۴x-۶$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) -۳ ۴) $-\frac{۱۰}{۳}$

۱۸۰- اگر $f(x)=x^۳+۱$ و $g(x)=\sqrt[۳]{۱-x}$، حاصل $f'(۲x)g'(f(۲x))$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) x ۴) $-x$

۱۸۱- اگر $f(x)=\tan^۲ x$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۹}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

۱۸۲- اگر $f(x)=\sin^۳ x^۲$، مقدار $f'(\frac{\sqrt{\pi}}{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}\sqrt{۲\pi}$ ۲) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲\pi}$ ۳) $\frac{۳}{۲}\sqrt{\pi}$ ۴) $\frac{۳}{۴}\sqrt{\pi}$

آزمون ۱۱۸ مشتق تابع مرکب (۱)

۱۱۷۱- اگر $f(x)=(3x-2)^3-(2x-3)^4$، مقدار $f'(-1)$ کدام است؟

۱) 5^3 ۲) 49×5^2 ۳) 17×5^3 ۴) -31×5^2

۱۱۷۲- اگر $f(x)=(x^2-1)^2(x+2)^4$، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۴

۱۱۷۳- اگر $f(x)=x^3-x+1$ و $g(x)=2-x^2$، مقدار $(gof)'(1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) -4 ۴) ۴

۱۱۷۴- اگر $f(x)=(3x+\frac{1}{x})^{-3}$، مقدار $128f'(1)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -6 ۳) -9 ۴) -12

۱۱۷۵- اگر $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$، مقدار $f'(5)$ کدام است؟

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) $\frac{10}{9}$ ۳) $\frac{10}{21}$ ۴) $\frac{10}{27}$

۱۱۷۶- اگر $f(x)=\sqrt{x^2-7}-\sqrt{x}$، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{11}{12}$ ۴) $\frac{13}{12}$

۱۱۷۷- اگر $f(2x)=-x^2+3x+4$، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{-5}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{4}$

۱۱۷۸- اگر $f(x)=\sin(\frac{2}{x})-2x\cos(\frac{1}{x})$، مقدار $f'(\frac{2}{\pi})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2-2\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi^2+2\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi^2}{2}$ ۴) $-\frac{\pi^2}{2}$

۱۱۷۹- اگر $f(x)=a\sin x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$ و $f'(\frac{\pi}{6})=0$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۸۰- اگر $f(x)=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x$، مقدار $f'(\frac{\pi}{8})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

سؤال	گاه
۱۱۷۱	۸۶ ۸۷ ۹۱
۱۱۷۲	۸۶ ۸۷ ۹۱
۱۱۷۳	۸۶ ۸۷ ۹۱
۱۱۷۴	۸۶ ۸۷ ۹۱
۱۱۷۵	۸۶ ۸۷ ۹۱
۱۱۷۶	۸۶ ۸۷ ۹۱
۱۱۷۷	۸۶ ۸۷ ۹۱
۱۱۷۸	۸۷ ۹۱
۱۱۷۹	۸۷ ۹۱
۱۱۸۰	۸۷ ۹۱

آزمون ۱۱۹ مشتق تابع مرکب (۲)

۱۱۸۱- اگر $f(x)=x^۲-x-۲$ و $g(x)=x^۳-۳x$، مقدار $(fog)'(-۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۱۸۲- اگر $f(x)=(۱+(۲+x^۲)^۲)^۳$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۳۶۰۰ ۴) ۴۸۰۰

۱۱۸۳- اگر $f(x)=(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۳}+x)^۳$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۱۸۴- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۳x+۱}$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $-\frac{۱}{۹}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۱۸۵- اگر $f(x)=(x^۲+۳x)\sqrt{x^۲+۳}$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۱۸۶- اگر $f(x)=g(x^۲+۲x)$ و $f'(۳)=۷۲$، مقدار $g'(۱۵)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۱۸۷- اگر $f(x)=mx^۲+\tan^۲ ۲x$ و $f'(\frac{\pi}{۸})=۸+۲\pi$، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۱۸۸- مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{-۱}{۲}$

۱۱۸۹- اگر $f(x+\sin x+۲)=\sin(kx)$ و $f'(۲)=۲$، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۱۹۰- مقدار مشتق تابع $f(x)=۴\cos^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۸})$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

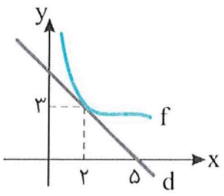
سؤال	گام
۱۱۸۱	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۰
۱۱۸۲	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۱۸۳	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۱۸۴	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۱۸۵	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۱۸۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۰
۱۱۸۷	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۱۸۸	۱۸۷ ۱۹۱
۱۱۸۹	۱۸۷ ۱۹۰ ۱۹۱
۱۱۹۰	۱۹۱

آزمون ۱۲۰ مشتق تابع مرکب (۳)

۱۱۹۱- اگر $f(x)=(\frac{x^۳-۱}{x^۲-۱})^۲$، مقدار $f'(-۲)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) صفر ۴) ۷

۱۱۹۲- در شکل مقابل خط d در نقطهٔ $(۲,۳)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $g(x)=xf(۳x-۴)$، مقدار $g'(۲)$ کدام است؟



۱) -۳
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۳

۱۱۹۳- اگر $f(x)=(x^۳+۲)^۲(\sqrt{x}+۲x)^۲$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۲۹۱ ۲) ۲۹۳ ۳) ۲۹۵ ۴) ۲۹۷

۱۱۹۴- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳+۳ax}$ و $f'(۲)=۰$، مقدار a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) ۶

۱۱۹۵- اگر $f(x)=\sqrt{x^۳+۱}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۱}$، حاصل $g'(x)f'(g(x))$ به‌ازای $x\neq ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{|x|}$ ۳) $|x|$ ۴) $\frac{x}{|x|}$

۱۱۹۶- اگر $f(۴)=۱$، $f'(۴)=\frac{۱۳}{۸}$ و $g(x^۳)=\frac{x}{f(x^۲)}$، مقدار $g'(۸)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۳ ۳) -۶ ۴) -۸

۱۱۹۷- اگر $f(x)=\cos(\pi\sin ۲x)$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۱۲})$ کدام است؟

۱) $-\pi\sqrt{۳}$ ۲) $\pi\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $-\frac{\pi}{۲}$

۱۱۹۸- مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{(۱-\sin ۲x)(\sin x+\cos x)}{\cos ۲x}$ در نقطهٔ $x=\frac{۲\pi}{۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{-۱-\sqrt{۳}}{۲}$

۱۱۹۹- اگر $y=a\sin ۲x+۲\cos ۲x$ و $۴y^۲+y'^۲=۱۸$، مقدار $a^۲$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۲۰۰- مشتق تابع $f(x)=\tan^۳ ۴x$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

سؤال
۱۱۹۱
۱۱۹۲
۱۱۹۳
۱۱۹۴
۱۱۹۵
۱۱۹۶
۱۱۹۷
۱۱۹۸
۱۱۹۹
۱۲۰۰

آزمون ۱۲۱ مشتق تابع مرکب (۴)

۱۲۰۱- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}$، مقدار $f(1)f'(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۱۲۰۲- اگر $f(x)=\frac{ax^2+a}{\sqrt{3x+1}}$ و $f'(1)=\frac{21}{8}$، مقدار a کدام است؟

۱) -5 ۲) -3 ۳) ۳ ۴) $\frac{21}{5}$

۱۲۰۳- اگر $f(\frac{1}{3x-1})=3x^2-1$، مقدار $f'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) -8

۱۲۰۴- اگر $f(1-x)=3x^2+x-3$، مقدار $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) -5 ۴) -10

۱۲۰۵- اگر برای هر $x>0$، $f(2x^2-4)=3f(x-3)+5x$، مقدار $f'(-2)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -5 ۴) ۵

۱۲۰۶- اگر $f'(x)=-\frac{1}{x}$، مشتق تابع $y=f(x+\sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ۲) $\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ ۳) $\sqrt{1+x^2}$ ۴) $-\sqrt{1+x^2}$

۱۲۰۷- اگر $f(x)=\tan(\tan 4x)$، مقدار $f'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۲۰۸- اگر $f(x)=(\sin x-2\cos x)^3$، مقدار $f'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{12\sqrt{2}}{4}$

۱۲۰۹- اگر $f(x)=\cos^3(4x^2)$، حاصل $f'(x)$ کدام است؟

۱) $-3x\sin(4x^2)\cos^2(4x^2)$ ۲) $24x\sin(4x^2)\cos^2(4x^2)$

۳) $x\sin^2(8x^2)$ ۴) $-24x\sin(4x^2)\cos^2(4x^2)$

۱۲۱۰- اگر $f(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$، مقدار $f'(\frac{\pi^2}{4})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) $\frac{1}{2}$

سؤال	گام
۱۲۰۱	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۲۰۲	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۲۰۳	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۲۰۴	۱۷۲ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۲۰۵	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۰
۱۲۰۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۲۰۷	۱۹۱
۱۲۰۸	۱۸۷ ۱۹۱
۱۲۰۹	۱۹۱
۱۲۱۰	۱۸۷ ۱۹۱

آزمون ۱۲۲ مشتق تابع مرکب (۵)

۱۲۱۱- اگر $g(x)=f^{۲}(x^{۳})$ و $f(۸)f'(۸)=\frac{۱}{۶}$، مقدار $g'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۱۲- اگر $f'(۲)=-۳$، $g(-۱)=۲$ و $g'(-۱)=۵$، مقدار $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{f(g(x))-f(۲)}{x+۱}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -۱۵ ۳) -۶ ۴) ۴

۱۲۱۳- اگر $f(x)=\frac{x^{۲}+x}{x^{۲}+۱}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x^{۲}-۷}}$، مقدار $(fog)'(۴)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۳}{۷۲}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۷۲}$ ۳) $\frac{۷}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۶}$

۱۲۱۴- اگر $f(x)=\frac{x+k}{x+۲}$ و مشتق تابع fof در نقطهٔ $x=۰$ برابر ۴ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۱۲۱۵- اگر $f(\frac{۲x-۳}{x+۲})=ax^{۲}+x+۴$ و $f'(-۵)=\frac{۳}{۷}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۲۱۶- تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، $f(۱)=۰$ و $f'(۱)=۳$. اگر $g(x)=f(x^{۲}-f(x))$، مقدار $g'(۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) ۱۵

۱۲۱۷- اگر $f(x)=\sqrt{\sin ۳x}$ و $f'(\frac{\pi}{۴})=-۳\times ۲^{a}$، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۵}$ ۴) $-\frac{۵}{۴}$

۱۲۱۸- اگر $f(x)=x\sin ۴x\cos ۴x$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۱۶})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۲۱۹- اگر $f(x)=\sin^{۲}(\cos ۴x)$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۸})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۸

۱۲۲۰- اگر $f(x)=\cos(\frac{\pi}{۲}x)\sin(\frac{\pi\sqrt{x}}{x+۳})$، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $-\frac{\pi}{۴}$ ۳) $-\frac{\pi\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۴}$

سؤال
۱۲۱۱ ۱۲۱۲ ۱۲۱۳ ۱۲۱۴ ۱۲۱۵ ۱۲۱۶ ۱۲۱۷ ۱۲۱۸ ۱۲۱۹ ۱۲۲۰

درس چهارم: مشتق‌پذیری

نکته — دامنهٔ تابع مشتق

تابع مشتق تابع f به‌صورت $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ تعریف می‌شود و دامنهٔ تابع f' برابر است با

$D_{f'}=D_f-\{x \mid \text{تابع } f \text{ در نقطهٔ } x \text{ مشتق‌پذیر نیست.}\}$

مثال:

الف) $f(x)=x^2+x-1,\ D_f=\mathbb{R},\ f'(x)=2x+1,\ D_{f'}=\mathbb{R}$

ب) $f(x)=\frac{1}{x},\ D_f=\mathbb{R}-\{0\},\ f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$

پ) $f(x)=|x|,\ D_f=\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{x}{|x|},\ D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$

ت) $f(x)=\sqrt{x},\ D_f=[0,+\infty),\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ D_{f'}=(0,+\infty)$

ث) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ D_f=\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$

نکته

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد و تابع g در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر نباشد، تابع‌های $f+g$ و $f-g$ در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر نیستند ولی تابع‌های $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است در این نقطه مشتق‌پذیر باشند.

تست ۱

اگر $f(x)=|x|+\sqrt[3]{x-1}$، چند عدد حقیقی عضو $D_{f'}$ نیستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل

توجه کنید که تابع $y=|x|$ در نقطهٔ $x=0$ و تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع f در این دو نقطه مشتق‌پذیر نیست.

تست ۲

اگر $f(x)=x\sqrt[3]{x}$، چند عدد حقیقی عضو $D_{f'}$ نیستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل

توجه کنید که اگر $x\neq 0$، آن‌گاه $(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$، پس

$f'(x)=\sqrt[3]{x}+x\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

پس تابع f در هر نقطه از $\mathbb{R}-\{0\}$ مشتق‌پذیر است.

از طرف دیگر تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است، زیرا

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0$

بنابراین $D_{f'}=\mathbb{R}$.

مشتق توابع چندضابطه‌ای

دیدیم که اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، در این نقطه پیوسته نیز هست. اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست. مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

البته واضح است که اگر تابعی در نقطه‌ای پیوسته نباشد، در این نقطه مشتق‌پذیر هم نیست. مثلاً، تابع $f(x)=[x]$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته نیست. بنابراین در این نقطه مشتق‌پذیر هم نیست.

برخی توابع چندضابطه‌ای در نقطه‌های مرزی دامنهٔ هر یک از ضابطه‌ها مشتق‌ناپذیر هستند. برای یافتن مشتق این توابع می‌توانیم از قضیهٔ زیر استفاده کنیم.

قضیه

اگر تابع f **روی بازهٔ** $[a,b)$ **پیوسته و روی بازهٔ** (a,b) **مشتق‌پذیر باشد و** $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ **وجود داشته باشد، آن‌گاه** $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$.

اگر تابع f **روی بازهٔ** $(c,a]$ **پیوسته و روی بازهٔ** (c,a) **مشتق‌پذیر باشد و** $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ **وجود داشته باشد، آن‌گاه** $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$.

اگر تابع f **روی بازهٔ** (c,b) **شامل نقطهٔ** $x=a$ **مشتق‌پذیر باشد و** $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ **وجود داشته باشد، آن‌گاه** $f'(a)=\lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ x^3+1 & x<1 \end{cases}$، چون تابع f در هر نقطه از جمله در $x=1$ پیوسته است، پس

$$x>1\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}(2x)=2,\quad x<1\Rightarrow f'(x)=3x^2\Rightarrow f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}(3x^2)=3$$

تست ۳ اگر $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x & x<2 \\ 5x-8 & x\geq 2 \end{cases}$، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) وجود ندارد.

راه‌حل تابع f در هر نقطه از جمله $x=2$ پیوسته است (توجه کنید که $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$). بنابراین

$$x>2\Rightarrow f'(x)=5\Rightarrow f'_+(2)=5,\quad x<2\Rightarrow f'(x)=4x-3\Rightarrow f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}(4x-3)=5$$

در نتیجه $f'(2)=f'_-(2)=f'_+(2)=5$.

تست ۴ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & x\geq 2 \\ x^3+bx & x<2 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $\frac{17}{4}$ ۴) $\frac{12}{5}$

راه‌حل چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است، در نتیجه

$$f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\Rightarrow 4a+1=8+2b\Rightarrow 4a-2b=7$$

تابع مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=\begin{cases} 2ax & x\geq 2 \\ 3x^2+b & x\leq 2 \end{cases}$. دقت کنید که چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، $x=2$ را در هر دو ضابطه قرار داده‌ایم. بنابراین

$$f'_+(2)=f'_-(2)\Rightarrow 4a=12+b\Rightarrow 4a-b=12$$

در نتیجه

$$\begin{cases} 4a-2b=7 \\ 4a-b=12 \end{cases}\Rightarrow a=\frac{17}{4},\ b=5$$

تست ۵ اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ x^3 & x<1 \end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1)-f(1+h)}{h}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -3

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \\ 3x^2 & x<1 \end{cases}\Rightarrow f'_+(1)=2,\ f'_-(1)=3$$

بنابراین $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1)-f(1+h)}{h}=-f'_-(1)=-3$.

مشتق‌پذیری روی بازه

۱۹۵

۱) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است، به شرطی که در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.

۲) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، به شرطی که f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست و در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

۳) مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

۴) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $(a,+\infty)$ مشتق‌پذیر است، به شرطی که در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.

۵) می‌گوییم تابع f روی بازهٔ $[a,+\infty)$ مشتق‌پذیر است، به شرطی که f روی بازهٔ $(a,+\infty)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست داشته باشد.

۶) مشتق‌پذیری روی بازه‌های $(-\infty,b]$ و $(-\infty,b)$ به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

۷) می‌گوییم تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، به شرطی که در هر نقطه از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد.

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ روی بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ مشتق‌پذیر است، اما روی $\mathbb{R}$، یعنی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$، مشتق‌پذیر نیست، زیرا تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

تست ۶ کدام تابع روی بازهٔ $[0,+\infty)$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $y=\frac{1}{x}$ ۲) $y=\sqrt{x}$ ۳) $y=\sqrt[3]{x}$ ۴) $y=|x|$

راه‌حل: توجه کنید که اگر $x>0$، آن‌گاه $y=|x|=x$، پس تابع $y=|x|$ روی بازهٔ $(0,+\infty)$ مشتق‌پذیر است. از طرف دیگر، $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$.

پس تابع $y=|x|$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق راست دارد. بنابراین تابع $y=|x|$ روی بازهٔ $[0,+\infty)$ مشتق‌پذیر است. توجه کنید که توابع گزینه‌های دیگر در نقطهٔ $x=0$ مشتق راست ندارند.

مشتق تابع $g(x)=|f(x)|$

۱۹۶

برای مشتق گرفتن از تابع $g(x)=|f(x)|$ می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بنویسیم

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)\leq 0 \end{cases}$$

سپس مشتق بگیریم. اگر تابع f تابعی مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد، در نقاطی که $f(x)\neq 0$، تابع g هم مشتق‌پذیر است و

$$g'(x)=\frac{f(x)f'(x)}{|f(x)|}=\begin{cases} f'(x) & f(x)>0 \\ -f'(x) & f(x)<0 \end{cases}$$

در نقاطی که $f(x)=0$، و f ریشهٔ ساده داشته باشد، تابع g مشتق‌پذیر نیست ولی در بقیهٔ ریشه‌ها (مضاعف و مکرر) مشتق تابع g برابر صفر است.

مثال:
- تابع $y=|x-2|$ در نقطهٔ $x=2$ که ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق است، مشتق ندارد. ولی مشتق تابع $y=|(x-2)^2|$ در نقطهٔ $x=2$ برابر صفر است، زیرا

$$y=|(x-2)^2|=(x-2)^2\Rightarrow y'=2(x-2)\Rightarrow y'(2)=0$$

- مشتق تابع $y=|(x-2)^3|$ در نقطهٔ $x=2$ برابر صفر است.
- تابع $g(x)=|x^2(x-1)(x-2)^3|$ در تمام نقاط به جز در $x=1$ که ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق است مشتق دارد. در نقطه‌های $x=0$ و $x=2$ مشتق تابع g برابر صفر است.

تست ۷ تابع $y=|(x-۳)(ax+۳)|$ در نقطهٔ $x=۳$ مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) -۳

راه‌حل چون $x=۳$ ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق است، برای اینکه تابع در این نقطه مشتق داشته باشد، باید $x=۳$ ریشهٔ مضاعف عبارت داخل قدرمطلق باشد، یعنی باید ریشهٔ عبارت $ax+۳$ نیز باشد. پس $a(۳)+۳=۰$، در نتیجه $a=-۱$.

تست ۸ چند عدد صحیح مانند m می‌توان پیدا کرد که تابع $f(x)=|x^۲+mx-m+۳|$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

راه‌حل اگر $g(x)=x^۲+mx-m+۳$، باید g ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. در نتیجه

$$\Delta\leq۰\Rightarrow m^۲-۴(-m+۳)\leq۰\Rightarrow m^۲+۴m-۱۲\leq۰\Rightarrow(m+۶)(m-۲)\leq۰\Rightarrow-۶\leq m\leq۲$$

اکنون توجه کنید که در بازهٔ $[-۶,۲]$ نُه عدد صحیح وجود دارد.

تست ۹ تابع $f(x)=|\sin x+\cos x|$ در کدام نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) $-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

راه‌حل چون مقدار عبارت $\sin x+\cos x$ به‌ازای $x=-\frac{\pi}{۴}$ برابر صفر است ولی مشتق این عبارت به‌ازای $x=-\frac{\pi}{۴}$ صفر نیست، پس تابع f در نقطهٔ $x=-\frac{\pi}{۴}$ مشتق‌پذیر نیست.

مشتق تابع $g(x)=[f(x)]$

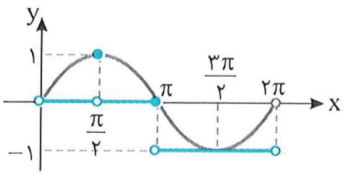
تابع $g(x)=[f(x)]$ از تعدادی تابع ثابت تشکیل شده است که مشتق آن‌ها صفر است، پس در هر نقطه‌ای که این تابع پیوسته باشد مشتق‌پذیر است و مشتق آن صفر است.

مثال: تابع $g(x)=[\frac{x}{۲}]$ در نقاط صحیح زوج ناپیوسته است و مشتق ندارد، ولی در بقیهٔ نقاط مشتق برابر صفر دارد.

تست ۱۰ تابع $y=[\sin x]$ در چند نقطه از بازهٔ $(۰,۲\pi)$ مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل نمودار این تابع در شکل مقابل رسم شده است. این تابع در نقطه‌های $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\pi$ پیوسته نیست و مشتق ندارد و مشتق آن در بقیهٔ نقاط بازهٔ $(۰,۲\pi)$ صفر است.



عامل صفرکننده و مشتق‌پذیری

- تابع $y=|x-a|$ را درنظر بگیرید. این تابع در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر نیست ولی پیوسته است. اکنون اگر یک عامل صفرکننده در این تابع ضرب کنیم، آن را به تابعی مشتق‌پذیر در نقطهٔ $x=a$ تبدیل می‌کنیم. یعنی مشتق تابع $y=(x-a)|x-a|$ در نقطهٔ $x=a$ برابر با صفر است.
- همچنین تابع $y=[x]$ در $x=a$ که $a\in\mathbb{Z}$ پیوسته نیست ولی تابع $y=(x-a)[x]$ در این نقطه پیوسته است و تابع $y=(x-a)^۲[x]$ در این نقطه مشتق‌پذیر هم است. اولین عامل صفرکننده باعث پیوستگی و دومی باعث مشتق‌پذیری تابع شده است.

نکته

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، همچنین $f(a)=0$ و تابع g در این نقطه پیوسته و مشتق‌ناپذیر باشد، آن‌گاه تابع $y=f(x)g(x)$ در این نقطه مشتق دارد.

تست ۱۱ تابع $f(x)=(x-2)|x-2|$ در چند نقطه مشتق ندارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل تابع $y=|x-2|$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق ندارد، ولی عامل صفرکنندهٔ $(x-2)$ در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر باشد. پس تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق دارد.

تست ۱۲ تابع $f(x)=(x-1)|x^2-3x+2|$ در چند نقطه مشتق ندارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل تابع را به‌صورت $f(x)=(x-1)|(x-1)(x-2)|$ می‌نویسیم. تابع $y=|(x-1)(x-2)|$ در نقاط $x=1$ و $x=2$ مشتق ندارد، ولی عامل صفرکنندهٔ $x-1$ در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد. پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=2$ مشتق ندارد.

تست ۱۳ اگر تابع $f(x)=|x+1|\cos(k\pi x)$ در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار k کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

راه‌حل **راه‌حل اول** توجه کنید که $f(-1)=0$ و در نتیجه

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|x+1|\cos(k\pi x)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\cos(k\pi x)=\cos(k\pi)$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{|x+1|\cos(k\pi x)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}(-\cos(k\pi x))=-\cos(k\pi)$$

بنابراین

$$f'_+(-1)=f'_-(-1)\Rightarrow\cos(k\pi)=-\cos(k\pi)\Rightarrow\cos(k\pi)=0$$

اگر $k=1$، آن‌گاه $\cos(k\pi)=-1$ پس مقدار k نمی‌تواند ۱ باشد.

راه‌حل دوم توجه کنید که تابع $g(x)=|x+1|$ در $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست و باید تابع $h(x)=\cos(k\pi x)$ در $x=-1$ برابر صفر باشد تا تابع $f(x)=|x+1|\cos(k\pi x)$ در این نقطه مشتق‌پذیر شود. پس

$$\cos(k\pi(-1))=0\Rightarrow\cos(k\pi)=0\Rightarrow k\neq 1$$

تست ۱۴ تابع $f(x)=(x+a)x[x]$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

راه‌حل تابع $y=x[x]$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست. برای اینکه مشتق‌پذیر هم باشد. لازم است یک عامل صفرکننده در آن ضرب شود. یعنی باید $x+a$ عامل صفرکننده باشد. پس $0+a=0$. در نتیجه $a=0$.

تست ۱۵ تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) -4 ۳) ۲ ۴) -2

راه‌حل برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو عامل $x-2$ در $[x]$ ضرب شود. یعنی باید

$$x^2+ax+b=(x-2)^2=x^2-4x+4\Rightarrow a=-4$$

نکته

در نقاط زیر، تابع f مشتق‌پذیر نیست:

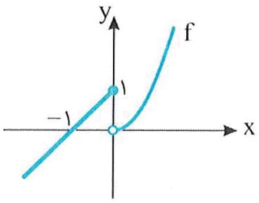
۱) نقاط ناپیوستگی تابع f　　۲) نقاط گوشه‌ای تابع f　　۳) نقاطی که نمودار تابع f مماس قائم دارد.

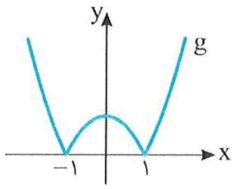
تذکر توجه کنید که نکتهٔ بالا تمام نقاطی را که تابع f در آن‌ها مشتق پذیر نیست، مشخص نمی‌کند.

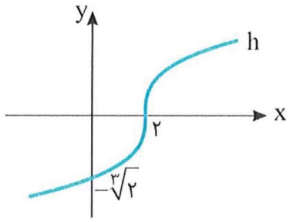
مثال: الف) تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ x^2 & x>0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته نیست، پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

ب) تابع $g(x)=|x^2-1|$ در نقطه‌های $x=-1$ و $x=1$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا این نقطه‌ها برای تابع g نقطهٔ گوشه‌ای هستند.

پ) تابع $h(x)=\sqrt[3]{x-2}$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا در این نقطه مماس قائم دارد.







دست‌گرمی

۱۸۳- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2-x & x<1 \\ x^3+2x & x\ge 1 \end{cases}$، مقدار $f'(-1)+f'(2)$ کدام است؟

۱) ۸　　۲) ۹　　۳) ۱۱　　۴) ۱۲

۱۸۴- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x & x\ge 1 \\ x^3+2bx & x<1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) $\frac{3}{2}$　　۴) $\frac{7}{2}$

۱۸۵- اگر $f(x)=\big||x|-2\big|$، دامنهٔ تابع f' کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$　　۲) $\mathbb{R}-\{2\}$　　۳) $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$　　۴) $\mathbb{R}-\{0,\pm 2\}$

۱۸۶- اگر تابع $f(x)=|x^2+ax-12|$ در نقطهٔ $x=3$ مشتق‌پذیر نباشد، مقدار $f'(-2)$ کدام است؟

۱) -3　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) -2

آزمون ۱۲۳ مشتق‌پذیری (۱)

سؤال	گام
۱۲۲۱	۱۴۱ ۱۹۴
۱۲۲۲	۱۴۱ ۱۷۱ ۱۹۴
۱۲۲۳	۱۴۱ ۱۹۴
۱۲۲۴	۱۷۲ ۱۹۴
۱۲۲۵	۱۴۱ ۱۹۴
۱۲۲۶	۱۴۱ ۱۷۲ ۱۸۸ ۱۹۴
۱۲۲۷	۱۹۶
۱۲۲۸	۱۹۶ ۲۹۴
۱۲۲۹	۱۹۶ ۱۹۸
۱۲۳۰	۱۹۶ ۱۹۸

۱۲۲۱- کدام تابع در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ x^2+1 & x<1 \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ x^3 & x<1 \end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & x\geq 1 \\ 2x^3 & x<1 \end{cases}$

۱۲۲۲- اگر $f(x)=\begin{cases} 2x^3 & x>-1 \\ 3x^2 & x\leq -1 \end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟

۱) -6 ۲) 6 ۳) 8 ۴) وجود ندارد.

۱۲۲۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^3+2 & x\geq -1 \\ x^2+bx & x<-1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -6

۱۲۲۴- اگر $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & x\geq 1 \\ x^2+x & x<1 \end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) $\dfrac{3}{2}$ ۳) $\dfrac{2}{3}$ ۴) وجود ندارد.

۱۲۲۵- اگر $f(x)=\begin{cases} x^3+x & x\geq 1 \\ 4x & x<1 \end{cases}$، آن‌گاه

۱) $f'(1)=4$.

۲) $f'_+(1)=4$ و $f'_-(1)$ وجود ندارد.

۳) $f'_-(1)=4$ و $f'_+(1)$ وجود ندارد.

۴) $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ وجود ندارند.

۱۲۲۶- اگر $f(x)=x^2[x]$، کدام‌یک نادرست است؟

۱) $f'_+(2)=8$ ۲) $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=8$ ۳) $f'_-(2)=4$ ۴) $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=4$

۱۲۲۷- اگر $f(x)=|(x+1)(x-2)^2|$، کدام گزینه درست نیست؟

۱) $f'(5)=45$ ۲) $f'(0)=0$ ۳) $f'(-2)=-24$ ۴) $f'(2)$ وجود ندارد.

۱۲۲۸- اگر تابع $f(x)=|x^2+4x+m^2|$ در دو نقطه مشتق‌ناپذیر باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-1<m<1$ ۲) $-2<m<2$ ۳) $m>2$ ۴) $m<-2$

۱۲۲۹- تابع $f(x)=(x-2)|x^2-5x+6|$ در چند نقطه مشتق ندارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۳۰- تابع $y=(x^2+ax+b)|x^2-4|$ مشتق‌پذیر است. مقدار $3a+b$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) -1 ۴) صفر

۱۲۳۱- اگر $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x & x<3\\ 9x-18 & x\geq 3\end{cases}$، مقدار $f'(3)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) وجود ندارد.

۱۲۳۲- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & x\geq 2\\ x^3 & x<2\end{cases}$، مقدار $f'_+(2)-f'_-(2)$ کدام است؟

۱) -6 ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) -18

۱۲۳۳- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>2\\ 3 & x=2\\ x^3-1 & x<2\end{cases}$، کدام‌یک درست است؟

۱) $f'_+(2)=4$ و $f'_-(2)=12$.
۲) $f'_+(2)=12$ و $f'_-(2)=4$.
۳) $f'_+(2)$ وجود ندارد و $f'_-(2)=12$.
۴) $f'_+(2)$ و $f'_-(2)$ وجود ندارند.

۱۲۳۴- تابع $f(x)=\begin{cases}x^3+ax & x>2\\ b & x=2\\ cx^2+c & x<2\end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است. مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{20}{3}$ ۲) ۱۰ ۳) $\frac{40}{3}$ ۴) $\frac{80}{3}$

۱۲۳۵- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+4ax & x>2\\ ax^3+2x & x\leq 2\end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $f'(4a)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{11}{4}$ ۴) $\frac{13}{4}$

۱۲۳۶- دامنهٔ تابع مشتق تابع $f(x)=|x|+|x-1|$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,1\}$

۱۲۳۷- اگر $f(x)=x|x^2-x|$، دامنهٔ تابع f' کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,1\}$

۱۲۳۸- تابع $f(x)=|x^3-x^2|$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲۳۹- اگر تابع $f(x)=|x^2-2x+m|$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m\geq 1$ ۲) $m>1$ ۳) $m>0$ ۴) $m\geq 0$

۱۲۴۰- تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -1

سؤال
۱۲۳۱
۱۲۳۲
۱۲۳۳
۱۲۳۴
۱۲۳۵
۱۲۳۶
۱۲۳۷
۱۲۳۸
۱۲۳۹
۱۲۴۰

آزمون ۱۲۵ مشتق‌پذیری (۳)

سؤال	گام
۱۲۴۱	۱۴۱ ۱۹۴
۱۲۴۲	۱۸۸
۱۲۴۳	۱۸۴ ۱۹۳
۱۲۴۴	۱۹۳ ۱۹۶
۱۲۴۵	۱۹۳ ۱۹۴
۱۲۴۶	۱۹۳ ۱۹۴
۱۲۴۷	۱۹۶
۱۲۴۸	۱۹۶
۱۲۴۹	۱۹۶
۱۲۵۰	۱۹۶

۱۲۴۱- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} a\sin x & x\geq\frac{\pi}{2} \\ b\cos 2x+b\cos x+1 & x<\frac{\pi}{2} \end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{2}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۱۲۴۲- تابع $f(x)=[\cos x]\sin 2x$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$،

۱) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد. ۲) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

۳) مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد. ۴) مشتق‌پذیر است.

۱۲۴۳- اگر $f(x)=\big||x+1|-1\big|$، دامنهٔ تابع f' کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\pm1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,-1,-2\}$

۱۲۴۴- چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع مشتق تابع $f(x)=\frac{|x|+|x-1|}{x+1}$ قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۴۵- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & |x|\leq1 \\ \frac{-2}{x} & |x|>1 \end{cases}$، دامنهٔ تابع مشتق تابع f کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\pm1\}$

۱۲۴۶- اگر $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & |x|\geq1 \\ \sqrt[3]{x} & |x|<1 \end{cases}$، دامنهٔ تابع f' کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{\pm1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,\pm1\}$

۱۲۴۷- اگر تابع $f(x)=|x^2+ax-12|$ در نقطهٔ $x=3$ مشتق‌پذیر نباشد، مقدار $f'(-2)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -2

۱۲۴۸- تابع $f(x)=|x^3+ax^2-ax|$ در سه نقطه مشتق ندارد. حدود a کدام است؟

۱) $a<0$ یا $a>4$ ۲) $0<a<4$ ۳) $-4<a<0$ ۴) $a<-4$ یا $a>0$

۱۲۴۹- تابع $f(x)=|x^3+ax^2-ax|$ فقط در یک نقطه مشتق ندارد. حدود a کدام است؟ $(a\neq0)$

۱) $0<a\leq1$ ۲) $-1\leq a<0$ ۳) $0<a\leq4$ ۴) $-4\leq a<0$

۱۲۵۰- تابع $f(x)=|\sin x-\sin^2 x|$ در کدام نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

درس پنجم: خط مماس بر نمودار تابع

۲۰۰

نکته شیب خط مماس

اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(a,f(a))$ برابر $f'(a)$ است.

تست ۱ **اگر خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-۴x+۳$ در نقطهٔ به طول ۲ روی این نمودار بر خط $y=-ax+۵$ عمود باشد، مقدار a کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

راه‌حل شیب خط $y=-ax+۵$ برابر با $-a$ است. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ برابر است با $f'(۲)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=۳x^۲-۴ \Rightarrow f'(۲)=۸$$

در نتیجه $-(a)(۸)=-۱$، پس $a=\frac{۱}{۸}$.

تست ۲ **اگر خط $۴x-۲y+b=۰$ در نقطهٔ به طول ۱ بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{x+۱}$ مماس باشد، مقدار b کدام است؟**

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۷ ۴) -۱۰

راه‌حل ابتدا توجه کنید که شیب خط $۴x-۲y+b=۰$ برابر ۲ است. پس مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۱$ باید برابر ۲ باشد تا خط بر نمودار تابع f در این نقطه مماس باشد. پس

$$f'(x)=\frac{۱-a}{(x+۱)^۲}, \quad f'(۱)=۲ \Rightarrow \frac{۱-a}{۴}=۲ \Rightarrow a=-۷$$

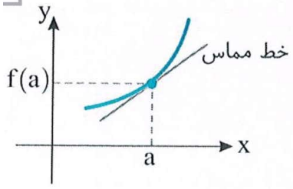
پس $f(x)=\frac{x-۷}{x+۱}$. همچنین خط $۴x-۲y+b=۰$ در نقطهٔ $(۱,f(۱))$ بر نمودار تابع f مماس است، یعنی این نقطه روی خط قرار دارد و مختصات آن در معادلهٔ خط صدق می‌کنند. با توجه به اینکه $f(۱)=\frac{۱-۷}{۱+۱}=-۳$، پس

$$۴\times۱-۲f(۱)+b=۰ \Rightarrow ۴-۲(-۳)+b=۰ \Rightarrow b=-۱۰$$

یادآوری برای نوشتن معادلهٔ خط کافی است شیب این خط و یک نقطه از آن را بدانیم. در حقیقت، اگر شیب خط برابر m و نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی این خط باشد، معادلهٔ آن به‌صورت $y-y_۰=m(x-x_۰)$ است.

۲۰۱

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع



فرض کنید تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد. نقطهٔ $A(a,f(a))$ روی نمودار تابع f را درنظر بگیرید. خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه، خطی است که شیب آن برابر $f'(a)$ است. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ است.

تست ۳ **دربارهٔ تابع f می‌دانیم $f'(۲)=\frac{۱}{۲}$. اگر خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول ۲ روی نمودار تابع، محور y را در نقطهٔ به عرض ۲ قطع کرده باشد، طول نقطهٔ برخورد آن با محور x چقدر است؟**

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۴

راه‌حل چون شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول ۲ برابر است با $f'(۲)=\frac{۱}{۲}$، پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=\frac{۱}{۲}x+b$ است. چون این خط محور y را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کرده است، پس از نقطهٔ $(۰,۲)$ می‌گذرد. در نتیجه $۲=\frac{۱}{۲}\times۰+b$، یعنی $b=۲$. به این ترتیب، معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ است. اگر این خط محور x را در نقطهٔ $(x_۰,۰)$ قطع کرده باشد، آن‌گاه $۰=\frac{۱}{۲}x_۰+۲$، یعنی $x_۰=-۴$.

تست ۴ معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۲۵x}{x^۲+۱}$ در نقطهٔ به طول ۲ روی نمودار تابع کدام است؟

۱) $y=-۳x+۴$ ۲) $y=۳x-۱۰$ ۳) $y=-۳x+۱۶$ ۴) $y=۳x+۴$

راه‌حل شیب خط مماس در نقطهٔ $x=۲$ برابر مقدار مشتق تابع در این نقطه است. پس

$$f'(x)=\frac{۲۵(x^۲+۱)-۲x\times ۲۵x}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-۲۵x^۲+۲۵}{(x^۲+۱)^۲}\Rightarrow f'(۲)=\frac{-۲۵\times ۴+۲۵}{(۴+۱)^۲}=\frac{-۷۵}{۲۵}=-۳$$

نقطه‌ای به طول ۲ روی نمودار تابع نقطهٔ $(۲,\frac{۲۵\times ۲}{۴+۱})$، یعنی $(۲,۱۰)$ است و معادلهٔ خط مماس در این نقطه به‌صورت زیر است:

$$y-۱۰=-۳(x-۲)\Rightarrow y=-۳x+۱۶$$

تست ۵ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴x}}$ در نقطهٔ به طول ۲ روی نمودار تابع، محور y را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که عرض نقطهٔ به طول ۲ روی نمودار تابع برابر است با $y=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴\times ۲}}=\frac{۱}{۲}$. از طرف دیگر، شیب خط مماس در یک نقطه برابر با مقدار مشتق تابع در این نقطه است. پس

$$x>۰\Rightarrow f(x)=(۴x)^{\frac{-۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{۳}(۴x)^{\frac{-۴}{۳}}\times ۴=\frac{-۴}{۳\sqrt[۳]{(۴x)^۴}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{-۴}{۳\sqrt[۳]{۸^۴}}=\frac{-۴}{۳\times ۲^۴}=\frac{-۱}{۱۲}$$

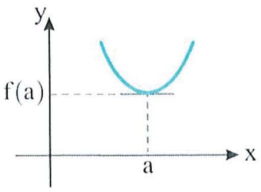
بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۱۲}(x-۲)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۱۲}x+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{-۱}{۱۲}x+\frac{۲}{۳}$$

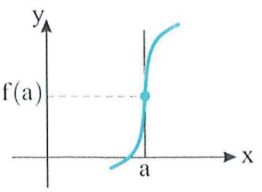
محل تلاقی این خط با محور y همان عرض از مبدأ خط، یعنی $\frac{۲}{۳}$ است.

نکته مماس افقی و مماس قائم ۲۰۲

اگر $f'(a)=۰$، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(a,f(a))$ به‌صورت $y=f(a)$ است. در این حالت می‌گوییم تابع f در این نقطه مماس افقی دارد.



همچنین اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نامتناهی باشند، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(a,f(a))$ به‌صورت $x=a$ است. در این صورت می‌گوییم تابع f در این نقطه مماس قائم دارد.



تست ۶ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۱}$ در نقطهٔ $(۱,۰)$، خط مماس بر نمودار این تابع در نقطهٔ $(۰,-۱)$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

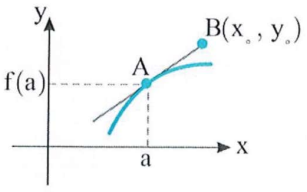
۱) $(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(۱,۱)$ ۳) $(۱,-۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}\Rightarrow f'(۱)=+\infty\ ,\quad f'(۰)=۰$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول صفر روی نمودار تابع به صورت $y=f(۰)=-۱$ و معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول ۱ روی نمودار تابع به‌صورت $x=۱$ است. پس این خطوط یکدیگر را در نقطهٔ $(۱,-۱)$ قطع می‌کنند.

۲۰۳ معادلهٔ خط مماس از نقطه‌ای خارج نمودار تابع



می‌خواهیم از نقطهٔ $B(x_0, y_0)$ مطابق شکل مماسی بر نمودار تابع f رسم کنیم. فرض می‌کنیم این خط در نقطهٔ $A(a, f(a))$ بر نمودار مماس باشد. شیب خط مماس برابر $f'(a)$ و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

اگر مقدار a معلوم باشد، معادلهٔ خط مماس هم معلوم می‌شود. برای معلوم کردن مقدار a کافی است مختصات $B(x_0, y_0)$ را در معادلهٔ خط مماس قرار دهیم.

تست ۷ از نقطهٔ $A(0, -3)$ دو مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^2+1$ رسم می‌کنیم. حاصل‌ضرب طول نقاط تماس کدام است؟

۱) -4 ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) -2

راه‌حل اول اگر مختصات نقطهٔ تماس (α, α^2+1) باشد، معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-(\alpha^2+1)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ است. چون $f'(\alpha)=2\alpha$، پس $y-\alpha^2-1=2\alpha(x-\alpha)$. نقطهٔ $(0, -3)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$-3-\alpha^2-1=2\alpha(0-\alpha)\Rightarrow\alpha^2=4\Rightarrow\alpha=\pm2$$

بنابراین طول نقاط تماس ۲ و -2 هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها -4 است.

راه‌حل دوم فرض کنید خطی که از نقطهٔ $A(0, -3)$ می‌گذرد در نقطهٔ $B(\alpha, f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر است با $\frac{f(\alpha)+3}{\alpha-0}=\frac{\alpha^2+1+3}{\alpha}=\frac{\alpha^2+4}{\alpha}$. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس $f'(\alpha)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=x^2+1\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow f'(\alpha)=2\alpha$$

پس $\frac{\alpha^2+4}{\alpha}=2\alpha$، یعنی $\alpha=\pm2$. بنابراین طول نقاط تماس -2 و ۲ هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها -4 است.

نکته

اگر خط $y=ax+b$ بر نمودار تابع f مماس باشد، آن‌گاه معادلهٔ $f(x)=ax+b$ ریشهٔ مکرر دارد. به ویژه اگر این معادله از درجهٔ دوم باشد، باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد $(\Delta=0)$.

تست ۸ خط $y=ax-3$ بر نمودار تابع $f(x)=x^2+1$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ±1 ۲) ±2 ۳) ±3 ۴) ±4

راه‌حل توجه کنید که باید معادلهٔ $x^2+1=ax-3$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$x^2+1=ax-3\Rightarrow x^2-ax+4=0\Rightarrow\Delta=a^2-16=0\Rightarrow a=\pm4$$

دست‌گرمی

۱۸۷- عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$ که در آن خط مماس بر نمودار موازی محور x است، چقدر است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۱۸۸- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول -2 روی این نمودار کدام است؟

۱) $y=2x-4$ ۲) $y=4x$ ۳) $y=2x+8$ ۴) $y=4x+12$

۱۸۹- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=2x^2-4x+6$ که با خط $y=x+5$ موازی است، کدام است؟

۱) $4y-4x-12=0$ ۲) $4y-4x+12=0$ ۳) $8y-8x+23=0$ ۴) $8y-8x-23=0$

۱۹۰- از نقطهٔ $(3, 0)$ مماسی بر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ رسم می‌کنیم. عرض از مبدأ خط مماس کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

آزمون ۱۲۶ خط مماس بر نمودار تابع (۱)

۱۲۵۱- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x-\frac{۱}{x}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر نمودار تابع f کدام است؟

۱) $۵x-۴y-۴=۰$
۲) $۴x-۵y-\frac{۱}{۲}=۰$
۳) $۳x-۴y=۰$
۴) $۴x-۲y-۵=۰$

۱۲۵۲- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ در نقطه‌ای به عرض ۲ روی این نمودار کدام است؟

۱) $۴y-x=۳$
۲) $۲y-x=-۱$
۳) $۲y+x=۰$
۴) $۴y+x=۳$

۱۲۵۳- در چند نقطه از نمودار تابع $f(x)=x^۳+\frac{۱}{x}$ خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۵۴- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+۱۵$ در نقطه‌ای با طول مثبت موازی خط $y=۹x-۱$ است. مقدار تابع در این نقطه کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) -۱۵
۴) ۱۵

۱۲۵۵- به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع $f(x)=x^۳+mx-۵۴$ بر محور طول‌ها مماس است؟

۱) ۹
۲) -۹
۳) ۲۷
۴) -۲۷

۱۲۵۶- اگر خط $y=-x+b$ بر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{x+۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ روی این نمودار مماس باشد. مقدار a کدام است؟

۱) ۵
۲) -۶
۳) ۷
۴) -۱۲

۱۲۵۷- اگر خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-mx+۱}{x+۲}$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی این نمودار، با خط $y=\frac{۲}{۹}x+۱$ موازی باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۵۸- خط $y=x+k$ بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-x^۲$ در سمت چپ محور عرض‌ها مماس است. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$
۲) $-\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۵}{۲۷}$
۴) $-\frac{۵}{۲۷}$

۱۲۵۹- خط $y=ax+b$ بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-x$ مماس است. حدود a کدام است؟

۱) $-۱\le a\le ۱$
۲) $a\le ۱$
۳) $a\ge -۱$
۴) $a\ge ۰$

۱۲۶۰- نمودار تابع $y=-x^۲$ را چند واحد به سمت بالا انتقال دهیم تا بر خط $y=۲x+۳$ مماس شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

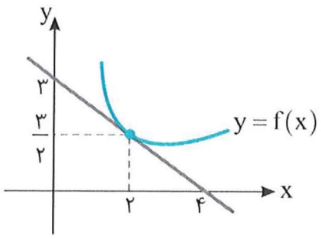
سؤال	گام
۱۲۵۱	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۱
۱۲۵۲	۱۹۱ ۲۰۱
۱۲۵۳	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰
۱۲۵۴	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰
۱۲۵۵	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰
۱۲۵۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰
۱۲۵۷	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰
۱۲۵۸	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰
۱۲۵۹	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰
۱۲۶۰	۳۱ ۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۰

آزمون ۱۲۷ خط مماس بر نمودار تابع (۲)

۱۲۶۱- در کدام نقطه خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin x}$ موازی محور طول‌هاست؟

۱) $(0,0)$ ۲) $(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})$ ۳) $(-\frac{\pi}{6},-1)$ ۴) $(\pi,0)$

۱۲۶۲- با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=4f^2(x)+x$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر نمودار تابع کدام است؟



۱) $y=-3x+17$

۲) $y=-9x+18$

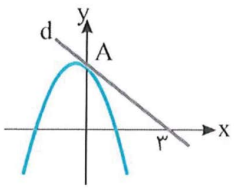
۳) $y=-10x+31$

۴) $y=-8x+27$

۱۲۶۳- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x+\frac{2}{x}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۲۶۴- در شکل زیر، خط d بر سهمی به معادلهٔ $y=-x^2+bx+2$ در نقطهٔ A که روی محور y است، مماس است. مقدار b کدام است؟



۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۲

۱۲۶۵- خط $y=ax+b$ بر نمودار تابع $y=2\tan(\frac{x}{3})$ مماس است. حدود a کدام است؟

۱) $a<\frac{2}{3}$ ۲) $a\geq\frac{3}{2}$ ۳) $a\geq\frac{2}{3}$ ۴) $a\leq\frac{3}{2}$

۱۲۶۶- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=ax^3+bx^2+2x+2$ در نقطهٔ به طول -1 روی نمودار، به‌صورت $y=3x+1$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) -8 ۴) -10

۱۲۶۷- در دو نقطه از نمودار تابع $f(x)=\frac{5x+2}{x+2}$ خط مماس بر نمودار تابع بر خط $2x+y=3$ عمود است. فاصلهٔ این دو نقطه کدام است؟

۱) $\sqrt{87}$ ۲) $\sqrt{93}$ ۳) $\sqrt{80}$ ۴) $\sqrt{97}$

۱۲۶۸- خطی که نقاط با طول‌های ۱ و -1 روی نمودار تابع $f(x)=x^4-x^2$ را به هم وصل می‌کند، در نقطهٔ دیگری بر نمودار تابع مماس است. طول این نقطه کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۲۶۹- از نقطهٔ $A(4,1)$ دو مماس بر نمودار تابع $f(x)=2x-x^2$ رسم می‌کنیم. مجموع شیب‌های این دو خط کدام است؟

۱) -6 ۲) -8 ۳) -10 ۴) -12

۱۲۷۰- از نقطهٔ $A(0,2)$ دو خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{5x+1}{x-1}$ می‌توان رسم کرد. مجموع طول‌های نقاط تماس این خطوط با نمودار تابع کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) -3

درس ششم: آهنگ تغییر

از درس فیزیک به یاد دارید که سرعت متوسط برابر نسبت تغییرات مکان به تغییرات زمان است. همین‌طور سرعت لحظه‌ای برابر است با حد سرعت متوسط وقتی که تغییرات زمان بسیار کوچک است. به همین ترتیب، می‌توان تغییرات تابع را نسبت به تغییرات متغیرش بررسی کرد. مثلاً دما تابعی از زمان است و فشار تابعی از ارتفاع است. پس می‌توان تغییرات دما را نسبت به تغییرات زمان یا تغییرات فشار را نسبت به تغییرات ارتفاع بررسی کرد.

آهنگ تغییر متوسط

تعریف

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

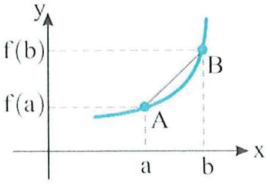
$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

که اگر فرض کنیم $b=a+h$، آن‌گاه

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

نکته

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$ همان شیب پاره‌خط واصل نقاط $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ روی نمودار تابع f است.



تست ۱

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{۶}{\sqrt{x}}$ در بازهٔ $[۱,۴]$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازهٔ $[۴,۹]$ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل

مقدار دو آهنگ تغییر را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} A_۱ = \text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۱,۴] = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{۳-۶}{۳} = -۱ \\ A_۲ = \text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۴,۹] = \frac{f(۹)-f(۴)}{۹-۴} = \frac{۲-۳}{۵} = -\frac{۱}{۵} \end{array}\right\} \Rightarrow A_۱ = ۵A_۲$$

تست ۲

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=-\frac{۱}{x}$ در بازهٔ $[\frac{۱}{۲},a]$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[\frac{۱}{۲},a]$ برابر $\frac{f(a)-f(\frac{۱}{۲})}{a-\frac{۱}{۲}}$ است:

$$\frac{f(a)-f(\frac{۱}{۲})}{a-\frac{۱}{۲}} = \frac{-\frac{۱}{a}+۲}{a-\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{a} \Rightarrow \frac{۲}{a} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow a = ۳$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای

تعریف

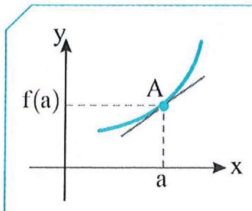
مقدار حد آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,a+h]$ را وقتی که h بسیار کوچک باشد، **آهنگ تغییر لحظه‌ای** تابع f در نقطهٔ a می‌نامند.

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع } f \text{ در } x=a = \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a همان $f'(a)$ است.

نکته

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ است.



تست ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x-\frac{۴}{x}$ در بازهٔ $[۱,۴]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه از این بازه برابر است؟

۱) $x=\sqrt{۲}$ ۲) $x=۲$ ۳) $x=۳$ ۴) $x=\sqrt{۵}$

راه‌حل مقدار آهنگ تغییر متوسط را در بازهٔ $[۱,۴]$ حساب می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{۳-(-۳)}{۳}=۲$$

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای همان مشتق تابع است که باید برابر ۲ باشد. پس

$$f'(x)=۱+\frac{۴}{x^۲}=۲\Rightarrow\frac{۴}{x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=-۲\,(\text{غ.ق.ق.}),\ x=۲$$

تست ۴ اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ با سه برابر آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازهٔ $[۲,a]$ برابر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

راه‌حل آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ برابر $f'(-۱)$ است. پس $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$، در نتیجه $f'(-۱)=\frac{۱}{۲}$.

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۲,a]$ برابر است با $\frac{f(a)-f(۲)}{a-۲}=\frac{\sqrt{a+۲}-۲}{a-۲}$. بنابراین

$$۳\times\frac{\sqrt{a+۲}-۲}{a-۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\sqrt{a+۲}-۲}{a-۲}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow۶\sqrt{a+۲}-۱۲=a-۲\Rightarrow۶\sqrt{a+۲}=a+۱۰$$

$$\xrightarrow{a\geq-۱۰}۳۶a+۷۲=a^۲+۲۰a+۱۰۰\Rightarrow a^۲-۱۶a+۲۸=۰\Rightarrow a=۲\,(\text{غ.ق.ق.}),\ a=۱۴$$

تست ۵ مساحت دایره (S) تابعی از محیط دایره (P) است. وقتی محیط دایره برابر π است، آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت دایره کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا مساحت دایره را برحسب محیط آن می‌نویسیم:

$$P=۲\pi r\Rightarrow r=\frac{P}{۲\pi},\quad S=\pi r^۲=\pi(\frac{P}{۲\pi})^۲=(\frac{۱}{۴\pi})P^۲$$

اکنون مشتق S را نسبت به P پیدا می‌کنیم: $S'=\frac{۱}{۴\pi}\times۲P=\frac{P}{۲\pi}$. وقتی $P=\pi$، $S'=\frac{\pi}{۲\pi}=\frac{۱}{۲}$.

دست‌گرمی

۱۹۱- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در بازهٔ $[۱,۴]$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازهٔ $[۴,۴/۴۱]$ است؟

۱) ۲/۵۱ ۲) ۲/۸۷ ۳) ۱/۲۷ ۴) ۱/۴۱

۱۹۲- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ در بازهٔ $[۱,۲]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه از این بازه برابر است؟

۱) $x=\sqrt{۲}$ ۲) $x=\sqrt{۳}$ ۳) $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $x=\frac{۳}{۲}$

۱۹۳- بیشترین مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)=-x^۳+۳x^۲-۶x+۱$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

آزمون ۱۲۸

۱۲۷۱- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-۲$ در بازهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲۷۲- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در بازهٔ $[۱,a]$ برابر $-\frac{۲}{۳}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۳

۱۲۷۳- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[۴,a]$ برابر $\frac{۱}{۶}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۳۶

۱۲۷۴- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۴}$ در بازهٔ $[-a,a]$ برابر $-\frac{۱}{۷}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۱۲۷۵- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x-\frac{۱}{x}$ در بازهٔ $[a-۱,a]$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱- یا ۲ ۲) ۱- یا ۲- ۳) ۱ یا ۲ ۴) ۱ یا ۲-

۱۲۷۶- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^۳+x$ در بازهٔ $[-۳,۰]$، با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام نقطه از این بازه برابر است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

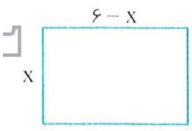
۱۲۷۷- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^۳-kx^۲$ در بازهٔ $[۰,۱]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=۱$ برابر است. مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۷۸- محیط هر دایره تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییر لحظه‌ای محیط یک دایره وقتی که مساحت دایره برابر ۴π است، کدام است؟

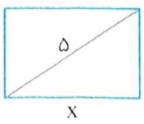
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۱۲۷۹- مساحت مستطیل مقابل (S) تابعی از عرض آن (x) است. آهنگ تغییر لحظه‌ای S وقتی که $x=۲$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۲۸۰- در شکل مقابل، محیط مستطیل (P) تابعی از طول آن (x) است. آهنگ تغییر لحظه‌ای P وقتی که $x=۴$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

سؤال	گام
۱۲۷۱	۲۰۴
۱۲۷۲	۲۰۴ ۳۰۶
۱۲۷۳	۲۰۴ ۳۲۰
۱۲۷۴	۲۰۴ ۳۰۶
۱۲۷۵	۲۰۴ ۳۰۶
۱۲۷۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۴ ۲۰۵
۱۲۷۷	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۴ ۲۰۵
۱۲۷۸	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۵
۱۲۷۹	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۵
۱۲۸۰	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۵

درس هفتم: مشتق دوم

مشتق دوم

تابع مشتق یک تابع، خودش تابع است. بنابراین می‌توانیم مشتق آن را پیدا کنیم. مشتق تابع مشتق تابع f را مشتق دوم آن می‌نامیم.

تعریف

اگر تابع f روی بازهٔ بازی شامل نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد، مقدار این حد را **مشتق دوم تابع** f **در نقطهٔ** a می‌نامند و با $f''(a)$ نشان می‌دهند:

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

تعریف

تابع f مفروض است. **تابع مشتق دوم** تابع f، که آن را با f'' نشان می‌دهیم، تابعی است که دامنه‌اش مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی است که تابع f' در آن‌ها مشتق‌پذیر است و مقدار آن در نقطهٔ x از دامنه‌اش برابر است با $f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$.

تست ۱ اگر $f(x)=2x^3-3x^2+x$، مقدار $f''(2)-f''(1)$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $f'(x)=6x^2-6x+1$ و $f''(x)=12x-6$. بنابراین

$$f''(2)=24-6=18\,,\ f''(1)=12-6=6\Rightarrow f''(2)-f''(1)=18-6=12$$

تست ۲ اگر $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$، مقدار $f'(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $\sqrt{3}$

راه‌حل توجه کنید که

$$f'(x)=2\times(-\sin(2x+\frac{\pi}{6}))=-2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$$

در نتیجه $f'(\frac{\pi}{12})=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

تست ۳ اگر $f(x)=x^3+ax^2+3x-1$ و $f''(2)=4$، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

راه‌حل ابتدا مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم $f'(x)=3x^2+2ax+3$ و $f''(x)=6x+2a$. بنابراین

$$f''(2)=12+2a=4\Rightarrow 2a=-8\Rightarrow a=-4$$

تست ۴ اگر $f(x)=x^3-2x+1$، مجموع جواب‌های معادلهٔ $f''(x)+f'(x)-x=0$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $f'(x)=3x^2-2$ و $f''(x)=6x$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$6x+(3x^2-2)-x=0\Rightarrow 3x^2+5x-2=0$$

مجموع جواب‌های این معادله برابر است با $-\frac{5}{3}$.

تست ۵ اگر $f(x)=ax^۳+bx+c$، $f(۰)=۷$، $f'(-۱)=-۶$ و $f''(۱)=۱۲$، مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۳ax^۲+b$ و $f''(x)=۶ax$. بنابراین $f''(۱)=۱۲\Rightarrow ۶a=۱۲\Rightarrow a=۲$

پس $f'(x)=۶x^۲+b$ و در نتیجه $f'(-۱)=-۶\Rightarrow ۶+b=-۶\Rightarrow b=-۱۲$

بنابراین $f(x)=۲x^۳-۱۲x+c$ و در نتیجه $f(۰)=۷$. پس $c=۷$. به این ترتیب $a+b+c=-۳$.

تست ۶ اگر $f(x)=\frac{x^۲+۴x+۱}{x+۲}$، مقدار $f''(-۱)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) -۶

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $f(x)=\frac{x^۲+۴x+۴-۳}{x+۲}=\frac{(x+۲)^۲}{x+۲}-\frac{۳}{x+۲}=x+۲-\frac{۳}{x+۲}$

بنابراین $f'(x)=۱-\frac{-۳}{(x+۲)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{-۶}{(x+۲)^۳}\Rightarrow f''(-۱)=\frac{-۶}{(-۱+۲)^۳}=-۶$

تست ۷ اگر $f(x)=x^۲|x^۲-۲|$، مقدار $f''(۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) ۱

راه‌حل توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=۱$، $x^۲-۲<۰$، پس $f(x)=x^۲(-(x^۲-۲))=-x^۴+۲x^۲$

در نتیجه $f'(x)=-۴x^۳+۴x$ و $f''(x)=-۱۲x^۲+۴$. پس $f''(۱)=-۸$.

تست ۸ اگر $g(x)=f(\sin x-x)$ و $f''(-\pi)=۲$، مقدار $g''(\pi)$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) -۲π ۳) ۸ ۴) -۸

راه‌حل از دو طرف تساوی $g(x)=f(\sin x-x)$ مشتق می‌گیریم: $g'(x)=(\cos x-۱)f'(\sin x-x)$

مجدداً از دو طرف تساوی بالا مشتق می‌گیریم: $g''(x)=-\sin x f'(\sin x-x)+(\cos x-۱)^۲ f''(\sin x-x)$

اکنون $x=\pi$ را در تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم: $g''(\pi)=-\sin\pi f'(\sin\pi-\pi)+(\cos\pi-۱)^۲ f''(\sin\pi-\pi)=۰+۴f''(-\pi)=۸$

دست‌گرمی

۱۹۴- اگر $f(x)=ax^۲+bx+۲$ و $f'(۲)=f''(۲)=-۲$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) -۳

۱۹۵- اگر $f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۲x+۱$ و $f''(a)=۰$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۱۹۶- اگر $f(x)=x+\frac{۱}{x}$، مقدار $f''(-۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۹۷- اگر $f(x)=۱+\sin ۲x$، مقدار $f''(\frac{\pi}{۱۲})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

۱۹۸- اگر $f(x)=(\sin x-\cos x)^۲$، حاصل $f''(x)$ کدام است؟

۱) $۲\sin ۲x$ ۲) $-۲\sin ۲x$ ۳) $-۴\sin ۲x$ ۴) $۴\sin ۲x$

آزمون ۱۲۹

۱۲۸۱- اگر $f(x)=x^۳-x^۲+x$، در چند نقطه تساوی $f'(x)=xf''(x)$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲۸۲- اگر $f(x)=x^۴+ax^۲+bx$، $f'(۱)=۱۴$ و $f''(۱)=۱۶$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۲۸۳- اگر $f(x)=(x+k)^۲(x-۱)$ و $f''(۲)=۲$، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۳

۱۲۸۴- مشتق دوم تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲+۴}$ در چند نقطه برابر صفر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۸۵- اگر $f(x)=\frac{x^۶+x^۴+x^۲+۱}{x^۲}$، مقدار $f''(۱)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۱۲۸۶- اگر $f(x)=(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)$، مقدار $f''(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۹}$

۱۲۸۷- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$، مقدار $f''(\sqrt{۳})$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۲۸۸- اگر $f(۲x-۳)=x^۳+ax^۲+bx+c$ و $f''(-۱)=۴$، مقدار a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۲۸۹- مشتق دوم تابع $f(x)=|x|$ در نقطهٔ $x=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۱۲۹۰- مشتق دوم تابع $f(x)=x^۴+۲ax^۳+۶x^۲+۵$ همواره مخالف صفر است. حدود a کدام است؟

۱) $|a|>۲$ ۲) $|a|<۲$ ۳) $|a|>۱$ ۴) $|a|<۱$

سؤال گا
۱۲۸۱ ۸۶ ۸۷ ۰۶
۱۲۸۲ ۸۶ ۸۷ ۰۶
۱۲۸۳ ۸۶ ۸۷ ۰۶
۱۲۸۴ ۸۶ ۸۷ ۰۶
۱۲۸۵ ۸۶ ۸۷ ۰۶
۱۲۸۶ ۸۶ ۸۷ ۰۶
۱۲۸۷ ۸۶
۱۲۸۸ ۸۶ ۸۷ ۰۶
۱۲۸۹
۱۲۹۰ ۸۶

آزمون ۱۳۰ مشتق دوم (۲)

۱۲۹۱- اگر $f(3x-2)=x^3+ax^2+bx+c$ و $f''(-5)=2$، مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۲۹۲- اگر $f(0)=1$، $f'(0)=1$، $f''(0)=0$ و $(gof)(x)=x^4+2x^2$، مقدار $g''(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۹۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & x\le 1 \\ \frac{c}{x} & x>1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق دوم داشته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -1 ۴) $-\frac{2}{3}$

۱۲۹۴- اگر $f(x)=x\cos x+k\sin x$ و $f''(\frac{\pi}{2})=-4$، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۴ ۴) -4

۱۲۹۵- اگر $f(x)=\sin^2 x$، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ کدام است؟

۱) $2\sin x$ ۲) $2\sin 2x$ ۳) $2\cos x$ ۴) $2\cos 2x$

۱۲۹۶- اگر $f(x)=\sin ax$ و $f''(x)=-64f(x)$، مقدار a کدام است؟

۱) ± 4 ۲) ± 8 ۳) ± 10 ۴) ± 16

۱۲۹۷- اگر $f(x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$، مقدار $f''(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۱۲۹۸- اگر $y=\sin kx-\cos kx$ و $\frac{y''}{y}=-16$، مقدار $|k|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۹۹- اگر $f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x$ و $f''(\frac{\pi}{4})=24$، $f'(\frac{\pi}{4})=2$، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

۱۳۰۰- اگر $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$، حاصل $f''(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -1

سؤال	گام
۱۲۹۱	۱۸۷ ۱۹۰ ۲۰۶
۱۲۹۲	۱۸۷ ۱۹۰ ۲۰۶
۱۲۹۳	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۶
۱۲۹۴	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۶
۱۲۹۵	۱۹۱ ۲۰۶
۱۲۹۶	۱۹۱ ۲۰۶
۱۲۹۷	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۶
۱۲۹۸	۱۹۱ ۲۰۶
۱۲۹۹	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۶
۱۳۰۰	۱۰۳ ۱۸۸ ۱۹۱ ۲۰۶

درس هشتم: قاعدهٔ هوپیتال

برای رفع ابهام از حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌توانیم از مشتق استفاده کنیم.

قاعدهٔ هوپیتال

فرض کنید تابع‌های f و g در یک بازه شامل نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشند و به‌ازای هر x از این بازه $g'(x)\neq 0$. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. مطابق قاعدهٔ هوپیتال برای رفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$ می‌توانیم از صورت کسر و مخرج آن به‌صورت جداگانه مشتق بگیریم سپس حد عبارت به‌دست آمده را حساب کنیم.

مثال: برای پیدا کردن $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$، مشتق x^2-1 و x^3-1 را به‌دست می‌آوریم. چون $(x^2-1)'=2x$ و $(x^3-1)'=3x^2$، پس

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

تست ۱ مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{2x^3-5x+3}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) -3 ۴) -1

راه‌حل حد مورد نظر حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{2x^3-5x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x}{6x^2-5}=\frac{-3}{1}=-3.$$

تست ۲ مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-x\sqrt{x}}{x^2-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{12}$ ۲) $-\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{11}{12}$ ۴) $\frac{1}{12}$

راه‌حل از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-x\sqrt{x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{3}{2}}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{2x}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{7}{12}$$

تست ۳ اگر $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=3$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -2 ۴) ۲

راه‌حل چون حد مخرج کسر صفر است، باید حد صورت آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد مورد نظر وجود ندارد. بنابراین

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0\Rightarrow 4+2a+b=0$$

از طرف دیگر، از قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌شود $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+a}{1}=4+a=3$. در نتیجه $a=-1$. پس

$$4+2a+b=0\Rightarrow 4-2+b=0\Rightarrow b=-2$$

بنابراین $a-b=1$.

تست ۴ مقدار $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+\cos 2x}{\sin x-\sin 2x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد

راه‌حل: از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+\cos 2x}{\sin x-\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x-2\sin 2x}{\cos x-2\cos 2x}=\frac{0-0}{-1-2}=0$$

تست ۵ مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan(\pi x)}{\sqrt{x+3}-2}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) 4π ۳) 2π ۴) ۲

راه‌حل: از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan(\pi x)}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi(1+\tan^2(\pi x))}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=\frac{\pi(1+0)}{\frac{1}{2\sqrt{4}}}=4\pi$$

تست ۶ اگر $f'(x)=\frac{x+5}{x+3}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-1)-f(2h-1)}{h^2+2h}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -1

راه‌حل: ابتدا توجه کنید که $f'(-1)=2$. اکنون از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1)-f(2h-1)}{h^2+2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h-1)-2f'(2h-1)}{2h+2}=\frac{f'(-1)-2f'(-1)}{2}=-\frac{1}{2}f'(-1)=-\frac{1}{2}\times 2=-1$$

تست ۷ اگر $f(x)=x^2-5x$، مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f^2(2x)-f^2(6)}{x^2-9}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

راه‌حل: از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: $L=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f^2(2x)-f^2(6)}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{4f'(2x)f(2x)-0}{2x}=\frac{4f'(6)f(6)}{6}$. از طرف دیگر،

$$f(x)=x^2-5x\Rightarrow f(6)=6\ ,\quad f'(x)=2x-5\Rightarrow f'(6)=7$$

بنابراین $L=\frac{4\times 6\times 7}{6}=28$.

تست ۸ اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 1\\ x^3 & x<1\end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۵

راه‌حل: از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f'(1+h)+f'(1-h)}{1}=f'_+(1)+f'_-(1)$$

اکنون تابع مشتق را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 3x^2 & x<1\end{cases}$. واضح است که $f'_+(1)=2$ و $f'_-(1)=3$. بنابراین $L=2+3=5$.

۱۹۹- حاصل $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{۲x^۳-۳x^۲+۵}{x^۳+۳x^۲-۲}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۴ ۳) -۲ ۴) -۱

۲۰۰- مقدار $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{\sqrt{۳x}-x}{x^۲-۷x+۱۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۴}$

۲۰۱- اگر $f(x)=\begin{cases} x^۳ & x\geq ۱ \\ x^۴ & x<۱ \end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^+} \frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) ۷

۲۰۲- مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x-\cos x}{۴x-\pi}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

آزمون ۱۳۱ قاعدهٔ هوپیتال (۱)

سؤال	گام
۱۳۰۱	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۷
۱۳۰۲	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۷
۱۳۰۳	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۷
۱۳۰۴	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۷
۱۳۰۵	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۷
۱۳۰۶	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۷
۱۳۰۷	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۷
۱۳۰۸	۱۸۷ ۱۸۸ ۱۹۱ ۲۰۷
۱۳۰۹	۱۸۷ ۱۸۸ ۱۹۱ ۲۰۷
۱۳۱۰	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۷

۱۳۰۱- مقدار $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^7+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{10}{21}$ ۴) $\frac{5}{7}$

۱۳۰۲- حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^4+x^3+x+1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۱۳۰۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)^4-(2x-3)^4}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -1 ۴) 1

۱۳۰۴- اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^2-1}=10$، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۲

۱۳۰۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-8}-2}{\sqrt{5x+10}-5}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۰۶- مقدار $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^3-8}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{144}$ ۲) $\frac{1}{48}$ ۳) $\frac{1}{36}$ ۴) $\frac{1}{64}$

۱۳۰۷- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos 2-\cos 2x}{x^2-x}$ برابر است با:

۱) $2\sin 2$ ۲) $2\cos 2$ ۳) $\cos 2$ ۴) $-2\sin 2$

۱۳۰۸- حاصل حد تابع $f(x)=\frac{|\cos 3x|}{\cot x}$، وقتی $x\to(\frac{\pi}{2})^-$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -3 ۳) 3 ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳۰۹- حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{\tan \pi x}{|x^2-1|}$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۳۱۰- به ازای چه مقادیری از a، مقدار $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{1+\cos(\frac{\pi x}{a})}$ برابر $\frac{2}{\pi^2}$ است؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) ± 1 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) ± 2

آزمون ۱۳۲ — قاعدهٔ هوپیتال (۲)

۱۳۱۱- مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۱۴}-۲x}{\sqrt[۳]{x+۲۵}-۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۸}$ ۲) $-\frac{۴۰۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۵}{۸}$ ۴) $\frac{۸۱}{۸}$

۱۳۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲\sqrt[۳]{x}-\sqrt{x+۳}}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۱۳۱۳- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۴]{x^۳}}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۶ ۴) ۶

۱۳۱۴- اگر $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۹}-۳}{x}=۴$ ، مقدار a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۳۱۵- اگر $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt[n]{\cos x}}{x^۲}=\frac{۱}{۸}$ ، آن‌گاه مقدار n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۱۶- اختلاف حد چپ و راست تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۱+\cos ۲x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{۲x}}$ ، وقتی $x\to\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲\pi}$ ۲) ۲π ۳) $۲\sqrt{\pi}$ ۴) $۲\sqrt{۲\pi}$

۱۳۱۷- حد چپ تابع $y=\frac{\sqrt{۱-\sin ۲x}}{\tan x-۱}$ ، وقتی $x\to\frac{\pi}{۴}$ ، کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$

۱۳۱۸- مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\cos ۳x-\cos^۳ x}{x^۲}$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۳۱۹- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۳x}{۲-\sqrt{۴-x^۲}}$ ، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۳۲۰- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\tan(\pi x)}{x^۲-\sqrt{x}}$ کدام است؟

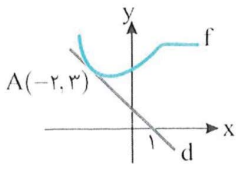
۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $-\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

سؤال	گا
۱۳۱۱	۸۷ ۹۱ ۰۷
۱۳۱۲	۸۷ ۹۱ ۰۷
۱۳۱۳	۸۶ ۸۷ ۰۷
۱۳۱۴	۸۶ ۱۱ ۰۷
۱۳۱۵	۰۷ ۱۱ ۷
۱۳۱۶	۰۷ ۱ ۷
۱۳۱۷	۷ ۱ ۷
۱۳۱۸	۷ ۱ ۷
۱۳۱۹	۷ ۱ ۷
۱۳۲۰	۷ ۱ ۷

آزمون ۱۳۳ آزمون فصل چهارم (۱)

سؤال	گام
۱۳۲۱	۱۷۲ ۱۷۳
۱۳۲۲	۱۷۲ ۱۷۵ ۱۹۱ ۲۰۷ ۲۸۱
۱۳۲۳	۱۷۷ ۲۰۷
۱۳۲۴	۱۷۷ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۴
۱۳۲۵	۱۳۷ ۱۷۲
۱۳۲۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۳۲۷	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۳۲۸	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۰
۱۳۲۹	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۶
۱۳۳۰	۲۰۴

۱۳۲۱- در شکل زیر خط d بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(-۲,۳)$ مماس است. مقدار $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{۲f(x)-۶}{x+۲}$ کدام است؟



۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۳۲۲- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-x+۳}$، مقدار $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{f^۳(x)-f^۳(-۲)}{x+۲}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴۵}{۲}$ ۲) -۴۵ ۳) $\frac{۴۵}{۲}$ ۴) ۴۵

۱۳۲۳- اگر $f'_+(۲)=۳$ و $f'_-(۲)=-۶$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-h^۲)-f(۲)}{h^۲-h^۴}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۶ ۴) ۶

۱۳۲۴- اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲+۴x & x\geq ۲\\ x^۳+x^۲ & x<۲\end{cases}$، مقدار $f'_+(۲)-f'_-(۲)$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۸ ۳) ۲۴ ۴) -۲۴

۱۳۲۵- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin ۲x}{x} & x\neq ۰\\ -۱ & x=۰\end{cases}$، مقدار مشتق تابع $g(x)=\frac{x^۲-۲x}{f(x)}$ در نقطهٔ $x=۰$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) وجود ندارد.

۱۳۲۶- اگر $f(x)=\frac{ax^۲+۲}{\sqrt{۳x+۱}}$ و $f'(۱)=\frac{۷}{۱۶}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۲۷- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$، عبارت $f'(x)g'(x)$ با کدام‌یک برابر است؟

۱) $\frac{-g^۲(x)}{f(x)}$ ۲) $\frac{g^۲(x)}{f(x)}$ ۳) $\frac{f(x)}{g^۳(x)}$ ۴) $\frac{-f(x)}{g^۳(x)}$

۱۳۲۸- اگر $f(x^۳+x)=g(\frac{۴}{x})$ و $g'(۴)=-۴$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۳۲۹- اگر $f(x)=\frac{ax-۱}{x^۲+۱}$ و $f''(۱)=۴$، مقدار a کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) -۹ ۴) -۱۱

۱۳۳۰- مجموع آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=-x^۲+۲x$ در بازهٔ $[a,۰]$ و آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازهٔ $[۰,a+۱]$ برابر ۴ است. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

آزمون ۱۳۴ — آزمون فصل چهارم (۲)

۱۳۳۱- اگر $f(x)=2x(2x-1)(2x-2)\dots(2x-12)$، مقدار $f'(1)$ کدام است؟

۱) $2\times10!$ ۲) $-2\times10!$ ۳) $4\times10!$ ۴) $-4\times10!$

۱۳۳۲- مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x^3+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt[3]{x}}$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{12}$ ۲) $-\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{5}{12}$

۱۳۳۳- اگر $f(x)=\frac{|x^2-x|}{x^3-[3x]}$، مقدار $f'(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{6}{49}$ ۲) $-\frac{12}{49}$ ۳) $\frac{12}{49}$ ۴) $-\frac{6}{49}$

۱۳۳۴- اگر $f(x)=\begin{cases}x^3+3x & x\geq1\\ 3x^2+1 & x<1\end{cases}$، مقدار $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x^3-x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۱۳۳۵- اگر تابع f در نقطهٔ $x=4$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to4}\frac{f(x)+5}{x-4}=5$، مقدار مشتق تابع $g(x)=\frac{x}{f(2x)}$ در نقطهٔ $x=2$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) -1 ۴) ۱

۱۳۳۶- اگر $f(x)=4x+|x|$ و $g(x)=4x-|x|$، مقدار مشتق تابع gof در نقطهٔ $x=0$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) وجود ندارد.

۱۳۳۷- اگر تابع $f(x)=|x^2-6x+m|$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، m چند مقدار طبیعی نمی‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

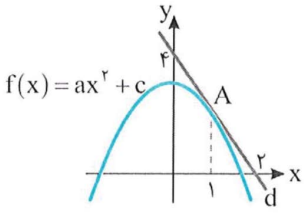
۱۳۳۸- اگر $f(x)=\frac{1-\cos2x}{\sin2x}$، مقدار $f''(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۳۳۹- خط $y=4x+2$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر نمودار تابع $f(x)=x^3-3ax+b$ مماس است. مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۴۰- در شکل زیر خط d در نقطهٔ A به طول ۱ بر نمودار تابع $f(x)=ax^2+c$ مماس است. مقدار c کدام است؟



۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

سؤال
۱۳۳۱
۱۳۳۲
۱۳۳۳
۱۳۳۴
۱۳۳۵
۱۳۳۶
۱۳۳۷
۱۳۳۸
۱۳۳۹
۱۳۴۰

آزمون ۱۳۵ آزمون فصل چهارم (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۱۳۴۱- در تابع $f(x)=(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}})^۳$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) -۲۱ ۲) -۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۳۴۲- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+۴ & x\geq -۲ \\ x^۳-x & x<-۲ \end{cases}$ همواره مشتق‌پذیر باشد، مقدار $f'(۱)$ کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) -۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۴۳- تابع $f(x)=\begin{cases} \sin^۲ x-\cos ۲x & ۰<x\leq \frac{\pi}{۴} \\ a\tan x+b\sin ۲x & \frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲} \end{cases}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۳۴۴- مقدار مشتق تابع $y=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟ (خارج از کشور تجربی ۹۶)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۴۵- تابع $f(x)=x\sqrt{x^۲}$ از نظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=۰$ چگونه است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است.
۲) پیوسته است. ولی مشتق‌پذیر نیست.
۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر.
۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.

۱۳۴۶- تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $f(x)=||x|-۱|$ روی $\mathbb{R}$ کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۴۷- مشتق عبارت $(\frac{۱۶}{x}-\sqrt[۳]{x^۲})^۲$ به ازای $x=-۸$ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۴۸- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، حاصل $f'(x)g'(f(x))$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۲)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) x ۴) $\frac{۱}{۲}x$

۱۳۴۹- در تابع $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ تغییر متوسط تابع از نقطهٔ $x=۴$ تا $x=۶/۲۵$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=۴$ چقدر کمتر است؟ (خارج از کشور تجربی ۹۳)

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۱۳۵۰- به ازای کدام مقادیر m، خط $y=۲x-۴$ بر نمودار تابع $y=(m+۳)x^۲+mx$، مماس است؟ (ریاضی ۹)

۱) ۱۸ و ۲ ۲) ۲۲ و -۲
۳) ۲۲ و ۲ ۴) ۱۱ و ۴

سؤال	گام
۱۳۴۱	۱۷۲ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۳۴۲	۱۴۱ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۴
۱۳۴۳	۱۴۱ ۱۹۴
۱۳۴۴	۱۸۷ ۱۸۸
۱۳۴۵	۱۴۱ ۱۷۲
۱۳۴۶	۳۱ ۳۸ ۱۹۹
۱۳۴۷	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۱
۱۳۴۸	۲۷ ۱۸۶ ۱۹۰
۱۳۴۹	۱۸۶ ۲۰۴ ۲۰۵
۱۳۵۰	۲۰۳ ۲۹۴

۱۳۵۱- اگر تابع f در نقطهٔ $x=۴$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=\frac{-۳}{۲}$، مقدار مشتق تابع $y=\frac{f(۲x)}{x}$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟

ریاضی - ۹۶

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۵۲- در تابع $f(x)=\begin{cases}x-\frac{۱}{x} & x\geq ۱\\ x^۲+ax+b & x<۱\end{cases}$، مقدار $f'(۱)$ موجود است. مقدار $f(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱) $۳-\sqrt{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۲}$ ۳) $۲-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

۱۳۵۳- مقدار مشتق تابع $y=۲\sin^۲(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۴})$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۳}$ کدام است؟

تجربی - ۹۳

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

۱۳۵۴- مشتق تابع $f(x)=\tan^۳ ۲x$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۵۴ ۴) ۷۲

۱۳۵۵- اگر $f(x)=۱-|x|$، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع $y=f(f(x))$ کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۳۵۶- اگر $f(x)=\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x)=۴x+|x|$، مشتق تابع fog کدام است؟

تجربی - ۹۴

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشتق ندارد.

۱۳۵۷- اگر $f'(۰)=g(۰)=۱$ و $f(x)=x+۱+(g(x))^۵$، مقدار $f''(۰)$ برابر کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱) $۴g''(۰)$ ۲) $۵g''(۰)$ ۳) $۴g''(۰)+۲$ ۴) $۵g''(۰)+۲۰$

۱۳۵۸- در تابع $f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x}}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۱,۱/۴۴]$، از آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=۱$، چقدر کمتر است؟

خارج از کشور تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۳۵۹- خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{۲x-۱}{x+۱}$، در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطهٔ $(-۱,۰)$ می‌گذرد. مقدار α کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۳۶۰- به‌ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $(m+۲)y=mx$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\sqrt{۱+x^۲}$ است؟

ریاضی - ۹۵

۱) $m>-۱$ ۲) $m<-۱$ ۳) $m>۱$ ۴) $m<۱$

سؤال
۱۳۵۱ ۱۳۵۲ ۱۳۵۳ ۱۳۵۴ ۱۳۵۵ ۱۳۵۶ ۱۳۵۷ ۱۳۵۸ ۱۳۵۹ ۱۳۶۰

آزمون ۱۳۷ آزمون فصل چهارم (۵) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۱۳۶۱- در تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}$، حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۵

۱) $\frac{۷}{۴۸}$ ۲) $\frac{۵}{۲۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۱۳۶۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{x}-۵ & x\geq ۱\\ x^۲+ax+b & x<۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۶۳- اگر $f(x)=x^۳-[۲x^۲]x$، مقدار $f'_+(\sqrt{۲})$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۴ با کمی تغییر

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۶۴- اگر $f'(x)=\frac{۱}{x}$، مشتق تابع $f(x+\sqrt{۱+x^۲})$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۸۵

۱) $-x+\sqrt{۱+x^۲}$ ۲) $x-\sqrt{۱+x^۲}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ ۴) $\sqrt{۱+x^۲}$

۱۳۶۵- اگر $f(x)=\frac{x^۳-۲}{۱+x^۳}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$، حاصل $f'(g(x))\times g'(x)$ کدام است؟ تجربی ۹۲

۱) $\frac{۳}{x}$ ۲) $\frac{۳}{x^۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳x}$ ۴) $\frac{x-۳}{x^۲}$

۱۳۶۶- دو تابع $f(x)=۳x+|x|$ و $g(x)=\frac{۳}{۴}x+a|x|$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقدار a، تابع gof در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۳

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

۱۳۶۷- اگر $f(x)=\sin^۲ \pi x$ و $g(x)=\frac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹}$، مشتق تابع fog به‌ازای $x=۲$ کدام است؟ ریاضی ۹۱

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}\pi$ ۴) $\frac{۵}{۸}\pi$

۱۳۶۸- مقدار مشتق تابع $y=\sin^۳ \sqrt{۲x}$ به‌ازای $x=\frac{\pi^۲}{۱۸}$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۳

۱) $\frac{۹}{۸\pi}$ ۲) $\frac{۹}{۴\pi}$ ۳) $\frac{۲۷}{۸\pi}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴\pi}$

۱۳۶۹- به‌ازای کدام مقدار a، خط $y=۵x+a$ بر نمودار تابع $y=۲x^۲-۳x+۶$ مماس است؟ خارج از کشور تجربی ۹۷

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۷۰- خطی که دو نقطه به طول‌های ۱ و -۱، از نمودار تابع $y=x^۳+ax^۲+۲x$ را به هم وصل می‌کند، بر این منحنی مماس است. مقدار a کدام است؟ ریاضی ۹

۱) ۱ و -۱ ۲) ۲ و -۱ ۳) ۲ و ۱ ۴) ۱ و -۲

سؤال	گام
۱۳۶۱	۱۷۱، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۹۱
۱۳۶۲	۱۴۱، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۹۴
۱۳۶۳	۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸
۱۳۶۴	۱۸۶، ۱۸۷، ۱۹۰، ۱۹۱
۱۳۶۵	۲۷، ۱۸۶، ۱۸۷
۱۳۶۶	۲۷، ۱۷۸، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۹۴
۱۳۶۷	۱۹۰، ۱۹۱
۱۳۶۸	۱۹۱
۱۳۶۹	۱۸۶، ۱۸۷، ۲۰۰
۱۳۷۰	۱۸۶، ۱۸۷، ۱۹۱

آزمون ۱۳۸ آزمون فصل چهارم (۶) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۱۳۷۱- اگر $f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$، **حاصل** $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ **کدام است؟** ریاضی - ۹۲

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۱۳۷۲- تابع $f(x)=\begin{cases}ax^۳+bx & x<۱\\ ۲\sqrt{۴x-۳} & x\geq ۱\end{cases}$ **روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. مقدار** b **کدام است؟** ریاضی - ۹۲

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۳۷۳- تابع $f(x)=\sqrt{۱+|x|}$ **در نقطهٔ** $x=\alpha$ **مشتق ندارد. مقدار** $f'_+(\alpha)-f'_-(\alpha)$ **کدام است؟** خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

۱۳۷۴- تابع $f(x)=[\frac{۱}{x}]$ **روی کدام بازه مشتق‌پذیر است؟** ریاضی - ۹۱

۱) $[۰,۱]$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

۱۳۷۵- اگر $f(x)=\dfrac{۲x}{x+۳}$ **و** $g(x)=\dfrac{x+۲}{x-۴}$، **تابع** fog **در کدام مجموعهٔ نقاط مشتق‌پذیر نیست؟** ریاضی - ۸۴

۱) $\{۴,-۳\}$ ۲) $\{۴,\frac{۵}{۲}\}$ ۳) $\{۴,-۳,\frac{۵}{۲}\}$ ۴) $\{۴,-۳,-۶\}$

۱۳۷۶- اگر تابع f **در نقطهٔ** $x=-۲$ **مشتق‌پذیر باشد و** $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{۱}{۲}$، **مقدار مشتق تابع** $g(x)=x^۲f(x)$ **در نقطهٔ** $x=-۲$ **کدام است؟** خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۳۷۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۱+a\cos \pi x & x>۱\\ bx^۲+x & x\leq ۱\end{cases}$ **روی** $\mathbb{R}$ **مشتق‌پذیر باشد، مقدار** a **کدام است؟** خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۷۸- در تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{۱+\cos x} & x>۰\\ \sin ۲x & x\leq ۰\end{cases}$، **مقدار** $f'_-(۰)-f'_+(۰)$ **کدام است؟** خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۱۳۷۹- در تابع $f(x)=\sqrt{x}$، **آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ** $[۱,۱/۲۱]$، **از آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ** $x=۱$، **چقدر کمتر است؟** تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۱) $\frac{۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۳}{۴۲}$ ۴) $\frac{۲}{۲۱}$

۱۳۸۰- به‌ازای کدام مقدار m **نمودار تابع** $y=۲x^۲+(m+۱)x+m+۶$ **بر نیمساز ناحیهٔ اول محورهای مختصات مماس است؟** خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱) -۴ ۲) ۴ یا -۱۲ ۳) -۴ یا ۱۲ ۴) ۱۲

آزمون ۱۳۹ آزمون فصل چهارم (۷) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۱۳۸۱- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۲\sqrt{x}}{x} & x\geq ۱\\ ax^۲+bx & x<۱\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟ ریاضی ۹۳

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۳۸۲- مقدار مشتق راست تابع $f(x)=([x]-|x|)\sqrt[۳]{۹x}$ در نقطهٔ $x=-۳$ کدام است؟ ریاضی ۹۲

۱) $-\frac{۱۶}{۳}$ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۱۳۸۳- مشتق چپ تابع $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در نقطهٔ $x=۰$ کدام است؟ ریاضی ۸۹

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۳۸۴- تابع $f(x)=[x+\frac{۱}{۳}]+[x]$ روی بازهٔ $(۰,۳)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟ خارج از کشور ریاضی ۸۶

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۸۵- اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{-۱}{۳}$، مشتق تابع $f(\sqrt{|x|+۳})$ در نقطهٔ $x=-۱$ کدام است؟ ریاضی ۸۷

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

۱۳۸۶- اگر $f(x)=\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}$، مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟ ریاضی ۸۹

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۱۳۸۷- در تابع $f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}$، آهنگ تغییر متوسط تابع از نقطهٔ $x=۴$ تا $x=۱۲$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=۴$، چقدر بیشتر است؟ تجربی ۹۳

۱) $\frac{۷}{۵۴۰}$ ۲) $\frac{۱۱}{۵۴۰}$ ۳) $\frac{۷}{۲۷۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۷۰}$

۱۳۸۸- خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ بر نمودار تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=۳$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}$ وقتی $x\to ۳$، کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۲

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۸۹- حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{۱+\cos \pi x}{x^۳-x^۲-x+۱}$، کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۸۵

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi^۲}{۴}$ ۴) $\frac{\pi^۲}{۲}$

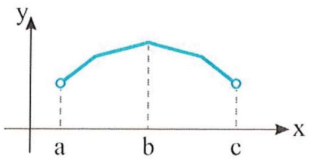
۱۳۹۰- حاصل $\lim_{x\to ۴}\frac{۱-\cos \pi x}{x-۴\sqrt{x}+۴}$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۵

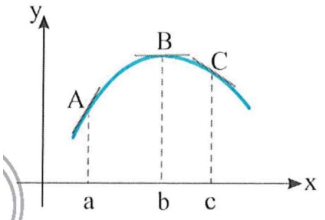
۱) صفر ۲) ۴π ۳) $۴\pi^۲$ ۴) $۸\pi^۲$

سؤال	گام
۱۳۸۱	۱۴۱ ۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۴
۱۳۸۲	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۸۸ ۱۹۱
۱۳۸۳	۱۳۴ ۱۷۷
۱۳۸۴	۱۴۵ ۱۹۳ ۱۹۷
۱۳۸۵	۱۷۲ ۱۸۸ ۱۹۰ ۱۹۱
۱۳۸۶	۱۸۶ ۱۸۷ ۱۹۰ ۱۹۱
۱۳۸۷	۱۹۱ ۲۰۴ ۲۰۵
۱۳۸۸	۱۳۲ ۱۷۲ ۱۷۳
۱۳۸۹	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۷
۱۳۹۰	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۷

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع





همان‌طور که به یاد می‌آورید، می‌گوییم تابع f روی بازهٔ I اکیداً صعودی است، هرگاه به‌ازای هر a و b در I، اگر $a<b$، آن‌گاه $f(a)<f(b)$. همین‌طور، می‌گوییم تابع f روی بازهٔ I اکیداً نزولی است، هرگاه به‌ازای هر a و b در I، اگر $a<b$، آن‌گاه $f(a)>f(b)$. همان‌طور که در شکل نشان داده‌ایم، لزومی ندارد تابعی که روی بازه‌ای اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است، روی این بازه مشتق‌پذیر هم باشد.

تابع f روی بازهٔ (a,b) اکیداً صعودی است اما مشتق‌پذیر نیست. همین‌طور روی بازهٔ (b,c) اکیداً نزولی است اما مشتق‌پذیر نیست. با این حال، اگر تابعی روی بازه‌ای مشتق‌پذیر باشد، رابطهٔ ساده‌ای بین علامت مشتق آن و اکیداً صعودی بودن یا اکیداً نزولی بودن آن روی این بازه وجود دارد. در شکل روبه‌رو نمودار تابع f را رسم کرده‌ایم. از روی این نمودار معلوم است که شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌های بین A و B مثبت است و شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌های بین B و C منفی است. بنابراین به نظر می‌رسد روی بازه‌ای که f' مثبت است تابع اکیداً صعودی است و روی بازه‌ای که f' منفی است تابع اکیداً نزولی است.

۲۰۸

قضیه

فرض کنید تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر به‌ازای هر x از بازهٔ (a,b)،

الف) $f'(x)>0$، آن‌گاه f روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی است. **ب) $f'(x)<0$، آن‌گاه f روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است.**

پ) $f'(x)=0$، آن‌گاه f روی بازهٔ $[a,b]$ ثابت است.

تذکر می‌توان قضیه‌های مشابه قضیهٔ بالا را در مورد هر یک از بازه‌های $[a,+\infty)$، $(-\infty,a]$، $(a,+\infty)$، $(-\infty,a)$ و $(-\infty,+\infty)$ نیز بیان کرد.

مثال: به کمک مشتق می‌توان بازه‌های یکنوایی تابع $f(x)=x^3-6x^2$ را مشخص کرد. کافی است مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. توجه کنید که $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		اکیداً صعودی ↗		اکیداً نزولی ↘		اکیداً صعودی ↗	

پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,0]$ و تمام بازه‌های زیرمجموعهٔ آن اکیداً صعودی است، روی بازهٔ $[0,4]$ و تمام بازه‌های زیرمجموعهٔ آن اکیداً نزولی است و روی بازهٔ $[4,+\infty)$ و تمام بازه‌های زیرمجموعهٔ آن اکیداً صعودی است. جدول بالا را **جدول تغییرات** تابع می نامیم.

۲۰۹

نکته

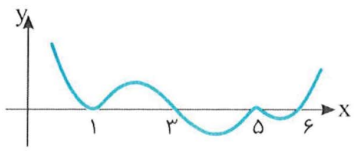
اگر مشتق تابع f روی بازهٔ (a,b) نامنفی باشد، یعنی $f'(x)\geq 0$ و نقاطی از این بازه که مشتق تابع f در آن‌ها برابر صفر است یک یا چند بازه تشکیل ندهند، باز هم تابع f روی بازهٔ (a,b) اکیداً صعودی است. همچنین اگر مشتق تابع f روی بازهٔ (a,b) نامثبت باشد، یعنی $f'(x)\leq 0$ و نقاطی از این بازه که مشتق تابع f در آن‌ها برابر صفر است یک یا چند بازه تشکیل ندهند، تابع f روی بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است.

مثال: فرض کنید $f(x)=x^3$. در این صورت $f'(x)=3x^2$. چون $f'(x)$ فقط در $x=0$ برابر صفر است و در بقیهٔ نقاط مثبت است، پس تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

تست ۱

نمودار تابع مشتق تابع f به شکل مقابل است. تابع f روی بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟



۱) ۱ **۲) ۲**

۳) ۳ **۴) ۴**

راه‌حل روی بازهٔ $(3,6)$ نمودار تابع مشتق زیر محور x است و فقط در نقطهٔ $x=5$ مشتق برابر صفر است. پس تابع فقط روی بازهٔ $(3,6)$ و زیرمجموعه‌های آن اکیداً نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۳ است.

تست ۲ کدام تابع روی دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟

۱) $f(x)=x^۳+۶x+۱$ ۲) $f(x)=x^۳-۱۲x+۱$ ۳) $f(x)=x^۳-x^۲$ ۴) $f(x)=-۲x^۳+x^۲-۳x$

راه‌حل در گزینهٔ (۱)، $f'(x)=۳x^۲+۶>۰$. بنابراین تابع اکیداً صعودی است. در گزینهٔ (۲)، $f'(x)=۳x^۲-۱۲$. مشتق در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ تغییر علامت می‌دهد و تابع نه صعودی است و نه نزولی. در گزینهٔ (۳)، $f'(x)=۳x^۲-۲x$. مشتق در نقاط $x=۰$ و $x=\frac{۲}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد و تابع غیریکنواست. در گزینهٔ (۴)، $f'(x)=-۶x^۲+۲x-۳<۰$. بنابراین تابع اکیداً نزولی است. توجه کنید که عبارت $-۶x^۲+۲x-۳$ همواره منفی است، زیرا $\Delta<۰$ و $a<۰$.

تست ۳ تابع $f(x)=x+\frac{۴}{x^۲}$ روی کدام‌یک از بازه‌های زیر صعودی است؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۱,۲]$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $(۰,۲]$

راه‌حل باید محدوده‌ای را تعیین کنیم که $f'(x)\geq۰$. توجه کنید که $f'(x)=۱-\frac{۸}{x^۳}=\frac{x^۳-۸}{x^۳}$. بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است. بنابراین تابع f روی بازه‌های $[۲,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ صعودی است.

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	

تست ۴ تابع $f(x)=x^۳-۴x^۲+۵x+۱$ روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

راه‌حل مشتق تابع را پیدا می‌کنیم: $f(x)=x^۳-۴x^۲+۵x+۱\Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۸x+۵\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=\frac{۵}{۳}$

بنابراین کمترین مقدار a برابر ۱ و بیشترین مقدار b برابر $\frac{۵}{۳}$ است. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $\frac{۵}{۳}-۱=\frac{۲}{۳}$.

x	$-\infty$		۱		$\frac{۵}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

تست ۵ رفتار تابع $f(x)=\frac{-۲x-۱}{x^۲-۲x+۱}$ روی بازهٔ $(-\infty,۱)$ به چه صورت است؟

۱) صعودی ۲) نزولی

۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

راه‌حل مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم: $f'(x)=\frac{-۲(x^۲-۲x+۱)-(۲x-۲)(-۲x-۱)}{(x^۲-۲x+۱)^۲}=\frac{۲x+۴}{(x-۱)^۳}$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	ت ن	$+$	

طبق این جدول، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۱)$ ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

تست ۶ تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}(m-۱)x^۳+mx^۲+(۳m-۲)x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. حدود مقادیر m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\leq m<۱$ ۲) $m\leq\frac{۱}{۲}$ ۳) $m<۱$ ۴) $۱<m\leq۲$

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=(m-۱)x^۲+۲mx+۳m-۲$. اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، باید $f'(x)$ به ازای هر x نامثبت باشد. پس

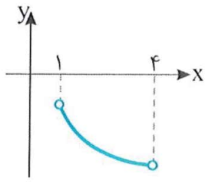
$$m-۱<۰\,,\quad \Delta=۴m^۲-۴(m-۱)(۳m-۲)\leq۰\Rightarrow\Delta=-۸m^۲+۲۰m-۸=-۲(۴m^۲-۱۰m+۴)=-۲(۲m-۱)(۲m-۴)$$

بنابراین

$$\begin{cases} m-1<0 \\ -2(2m-1)(2m-4)\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\le\frac{1}{2} \text{ یا } m\ge 2 \end{cases} \Rightarrow m\le\frac{1}{2}$$

توجه کنید که اگر $m=1$، آن‌گاه $f(x)=x^2+x$ که در این صورت تابع f غیریکنواست.

تست ۷ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $xf'(x)<0$
۲) $f(x)+f'(x)<0$
۳) $x-f'(x)>0$
۴) $(f^2)'(x)<0$

راه‌حل از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(1,4)$ مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی است. بنابراین $f'(x)<0$. همچنین، مقادیر تابع f منفی‌اند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. در مورد گزینهٔ (۴) توجه کنید که $(f^2)'(x)=2f'(x)f(x)>0$. با توجه به اینکه تابع f و f' در این بازه منفی‌اند. حاصل‌ضربشان مثبت است. پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

گزینهٔ (۱) $\underset{+}{x}\underbrace{f'(x)}_{-}<0$ ✓

گزینهٔ (۲) $\underbrace{f(x)}_{-}+\underbrace{f'(x)}_{-}<0$ ✓

گزینهٔ (۳) $\underset{+}{x}-\underbrace{f'(x)}_{-}>0$ ✓

تست ۸ رفتار تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ روی بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ چگونه است؟

۱) ابتدا اکیداً صعودی، سپس اکیداً نزولی
۲) ابتدا اکیداً نزولی، سپس اکیداً صعودی
۳) اکیداً صعودی
۴) اکیداً نزولی

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=\cos x-\sin x=\cos x(1-\tan x)$. از طرف دیگر، اگر $x\in(0,\frac{\pi}{2})$، آن‌گاه $\cos x>0$ و چون تابع تانژانت روی بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است و $\tan\frac{\pi}{4}=1$، پس

$$0<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow \tan x<\tan\frac{\pi}{4}=1, \quad \frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \tan x\ge 1$$

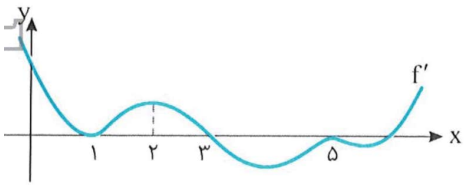
x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

در نتیجه

بنابراین تابع f ابتدا اکیداً صعودی و سپس اکیداً نزولی است.

دست‌گرمی

۲۰۳- نمودار تابع مشتق تابع f به شکل مقابل است. تابع f روی بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی است. بیشترین مقدار ممکن a کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۵

۲۰۴- تابع $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+1$ روی کدام بازه اکیداً صعودی نیست؟

۱) $(-1,2)$
۲) $(-2,-1)$
۳) $(1,2)$
۴) $(2,+\infty)$

۲۰۵- تابع $f(x)=-x^3+x^2-5$ روی بازهٔ $(0,a)$ اکیداً صعودی است. بیشترین مقدار ممکن a کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{3}{4}$

۲۰۶- تابع $f(x)=-x^3+mx^2-12x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. m چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۱۱
۴) ۱۳

۲۰۷- تابع $f(x)=\frac{1}{\cos 2x}$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(\pi,\frac{3\pi}{2})$
۲) $(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6})$
۳) $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$
۴) $(-\frac{5\pi}{8},-\frac{7\pi}{12})$

آزمون ۱۴۰ ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (۱)

سؤال	گام
۱۳۹۱	۲۰۸ ۳۱۲
۱۳۹۲	۲۰۸ ۲۰۹ ۳۱۲
۱۳۹۳	۲۰۹ ۳۱۳
۱۳۹۴	۲۰۸ ۳۱۱
۱۳۹۵	۱۹۱ ۲۰۸ ۳۱۱
۱۳۹۶	۲۰۸ ۲۰۹ ۳۱۶
۱۳۹۷	۲۰۸ ۲۰۹ ۳۱۶
۱۳۹۸	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۸
۱۳۹۹	۱۸۶ ۱۸۷ ۲۰۸
۱۴۰۰	۲۰۹ ۳۱۳

۱۳۹۱- تابع $f(x)=x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲-۶x+۱$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(۰,۴)$

۱۳۹۲- تابع $f(x)=-۳x^۳+\frac{۹}{۲}x^۲-۲x+۱$ روی بازهٔ $[a,b]$ صعودی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۹۳- کدام تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است؟

۱) $y=x^۳-x+۱$ ۲) $y=x^۳+x^۲+۱$

۳) $y=x^۳+x^۲-x+۱$ ۴) $y=x^۳+x^۲+x-۱$

۱۳۹۴- اگر $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-۲x^۲+۳x-۵$، تابع f' روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $(-۳,۳)$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $(-۱,۳)$ ۴) $(۳,۵)$

۱۳۹۵- تابع $f(x)=\sqrt{۳x^۲-x+۱}$ روی کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $(-\infty,\frac{۱}{۶})$ ۳) $(\frac{۱}{۶},۶)$ ۴) $(۱,۶)$

۱۳۹۶- تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲x}+\frac{۱}{x}$ روی بازهٔ $(۰,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۳۹۷- تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}+\sqrt{x+۱}$ روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۳۹۸- تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) همواره صعودی ۲) همواره نزولی

۳) ابتدا صعودی سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

۱۳۹۹- تابع $f(x)=x\cos x-\sin x$ روی کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$ ۲) $(-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳})$ ۳) $(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$ ۴) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$

۱۴۰۰- تابع $f(x)=x^۳-ax^۲+۳x$ اکیداً صعودی است. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $[-۳,۳]$ ۳) $(-۳,۳)$ ۴) $[۰,۳]$

۱۴۰۱- تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ روی بازهٔ $[a,b]$ صعودی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۰۲- تابع $f(x)=\sqrt{x^3-4x^2+5x-2}$ روی بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۴۰۳- تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$ روی بازهٔ $[a,+\infty)$ صعودی است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt[3]{2}$ ۳) $\sqrt[4]{8}$ ۴) $\sqrt[4]{27}$

۱۴۰۴- تابع $f(x)=x^2-8\sqrt{x+3}$ روی بازهٔ $[a,+\infty)$ صعودی است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۴۰۵- تابع $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$ روی بازهٔ $[0,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) $(\frac{2}{3})^6$ ۲) $(\frac{3}{2})^6$ ۳) $(\frac{2}{3})^4$ ۴) $(\frac{3}{2})^4$

۱۴۰۶- تابع $f(x)=3\sqrt[3]{x}-x$ روی بازهٔ $[-a,a]$ صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

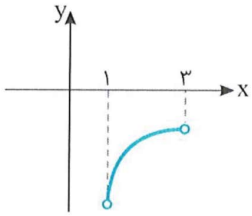
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt[3]{2}$ ۴) $\sqrt[3]{3}$

۱۴۰۷- تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ ..... است.

۱) همواره صعودی است. ۲) همواره نزولی است.

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی است. ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی است.

۱۴۰۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $xf'(x)>0$

۲) $f(x)-f'(x)<0$

۳) $x+f'(x)>0$

۴) $(f^2)'(x)>0$

۱۴۰۹- تابع $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x$ روی کدام بازه صعودی است؟

۱) $(\frac{\pi}{3},\pi)$ ۲) $(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$ ۳) $(\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3})$ ۴) $(\frac{4\pi}{3},2\pi)$

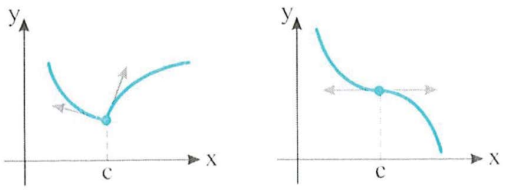
۱۴۱۰- تابع $f(x)=\frac{x+a}{x^2+a^2}$ روی بازه $[0,1]$ اکیداً صعودی است و a عددی مثبت است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) $\sqrt{2}+1$ ۳) ۱ ۴) ۲

سؤال
۱۴۰۱
۱۴۰۲
۱۴۰۳
۱۴۰۴
۱۴۰۵
۱۴۰۶
۱۴۰۷
۱۴۰۸
۱۴۰۹
۱۴۱۰

درس دوم: نقاط بحرانی

به نمودارهای مقابل توجه کنید. در نمودار سمت چپ تابع در نقطهٔ $x=c$ مشتق‌پذیر نیست و در نمودار سمت راست، مشتق تابع در نقطهٔ $x=c$ برابر صفر است.

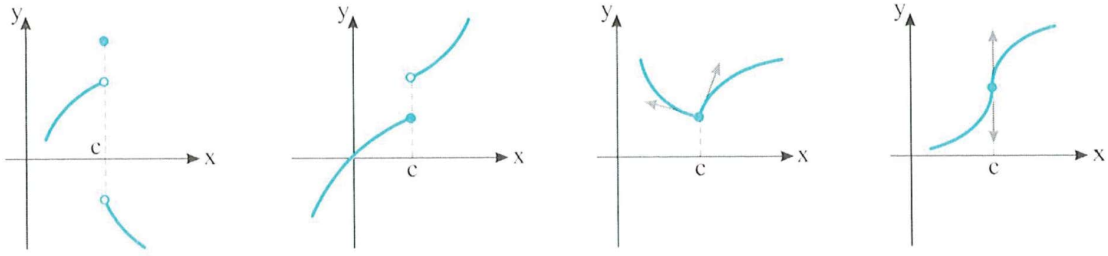


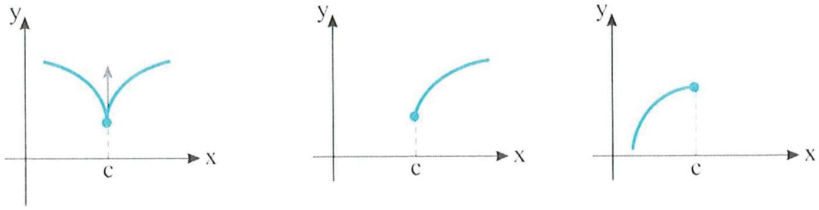
نقطه‌هایی از دامنهٔ تابع که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست یا مشتق آن برابر صفر است، نقطهٔ بحرانی نامیده می‌شوند.

تعریف

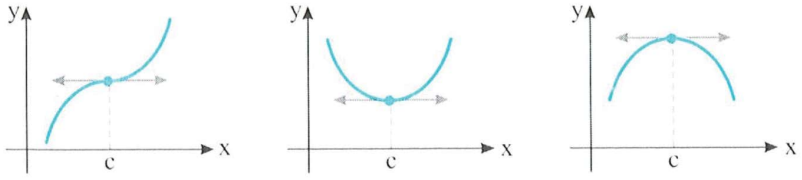
نقطهٔ $(c, f(c))$ را نقطهٔ بحرانی تابع f می‌نامیم به شرطی که $f'(c)=0$ یا تابع f در نقطهٔ $x=c$ مشتق‌پذیر نباشد.

در شکل‌های زیر نقطهٔ مشخص شده نقطهٔ بحرانی تابع است. زیرا تابع f در نقطهٔ $x=c$ مشتق‌پذیر نیست.





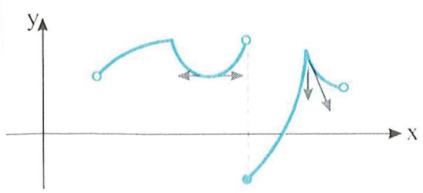
در شکل‌های زیر نقطهٔ مشخص شده نقطهٔ بحرانی تابع است، زیرا $f'(c)=0$.



تست ۱

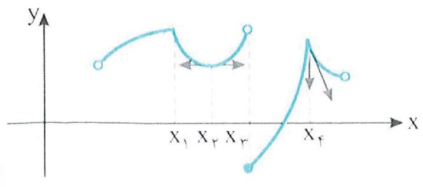
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تعداد نقاط بحرانی تابع کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵



راه‌حل

توجه کنید که تابع f در نقطهٔ x_1 مشتق‌پذیر نیست، زیرا $f'_-(x_1)\neq f'_+(x_1)$. همچنین تابع f در نقطهٔ x_3 مشتق‌پذیر نیست، زیرا تابع در این نقطه پیوسته نیست. تابع f در نقطهٔ x_4 مشتق‌پذیر نیست، زیرا این نقطه برای تابع f نقطهٔ گوشه‌ای است. از طرف دیگر $f'(x_2)=0$. پس x_1، x_2، x_3 و x_4 طول نقطه‌های بحرانی تابع f هستند.



تست ۲ کدام گزینه طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=x^{۲}(۱-x)^{۳}$ نیست؟

۱) $x=۱$ ۲) $x=۰$ ۳) $x=-۲$ ۴) $x=\frac{۲}{۵}$

راه‌حل چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، برای پیدا کردن نقاط بحرانی، معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x)=۲x(۱-x)^{۳}-۳x^{۲}(۱-x)^{۲}=۰\Rightarrow x(۱-x)^{۲}(۲(۱-x)-۳x)=۰\Rightarrow x(۱-x)^{۲}(-۵x+۲)=۰\Rightarrow x=۰,۱,\frac{۲}{۵}$$

تست ۳ تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۱}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل توجه کنید که دامنهٔ تابع برابر $(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$ است. مشتق تابع را پیدا می‌کنیم و نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}-۱}}$$

چون $x=۰$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد، پس معادلهٔ $f'(x)=۰$ جواب ندارد. از طرف دیگر تابع در نقطه‌های $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق‌پذیر نیست، پس f دو نقطهٔ بحرانی دارد.

تست ۴ تابع $f(x)=x-\sin x$ چند نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(-۲\pi,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل توجه کنید که f تابعی مشتق‌پذیر است، پس کافی است نقاطی را که در آن‌ها مشتق f برابر صفر است پیدا کنیم.

$$f'(x)=۱-\cos x=۰\Rightarrow \cos x=۱\Rightarrow x=۰$$

پس تابع فقط یک نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(-۲\pi,۲\pi)$ دارد.

تست ۵ تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۳}-۳x & -۲<x\le ۲\\ x^{۳}-۱۸x & ۲<x<۴\end{cases}$ چند نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(-۲,۴)$ دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۶

راه‌حل تابع f در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته نیست، بنابراین $x=۲$ طول نقطهٔ بحرانی است. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^{۲}-۳ & -۲<x<۲\\ ۳x^{۲}-۱۸ & ۲<x<۴\end{cases}\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}۳x^{۲}-۳=۰\Rightarrow x=\pm ۱\\ ۳x^{۲}-۱۸=۰\Rightarrow x=\sqrt{۶}\ ,\quad x=-\sqrt{۶}\ \text{(غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\{-۱,۱,۲,\sqrt{۶}\}$ است.

دست‌گرمی

۲۰۸- اگر $f(x)=-۲x^{۳}+۳x^{۲}$، فاصلهٔ نقاط بحرانی تابع f از یکدیگر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

۲۰۹- مجموع عرض‌های نقاط بحرانی تابع $f(x)=۲|x+۲|-x^{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) -۴ ۴) صفر

۲۱۰- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x^{۲}-۴)\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۱- تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}+\sqrt{۳-x}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۲- تابع $f(x)=|\sin x|$ چند نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

آزمون ۱۴۲ نقاط بحرانی (۱)

۱۴۱۱- مجموع مقادیر تابع $f(x)=x^۴-۴x^۳+۱$ در نقاط بحرانی آن کدام است؟

۱) -۲۵ ۲) -۲۸ ۳) -۳۰ ۴) -۳۲

۱۴۱۲- مساحت مثلثی که رأس‌های آن نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^۴-۴x^۲$ هستند، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۴۱۳- تابع $f(x)=\frac{۱}{۲+\sin x}$ چند نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۴۱۴- فاصلهٔ نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases}۲-x & x\geq ۰\\ -(x+۱)^۲ & x<۰\end{cases}$ از یکدیگر کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۱۴۱۵- در تابع $f(x)=۲x-|x|+۳$ عرض نقطهٔ بحرانی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۴۱۶- مجموع عرض‌های نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases}|x-۱|-۱ & x>۰\\ x^۲+۲x & x\leq ۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۱۷- در تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-۴\sqrt{x+۱}$ و دامنهٔ $(۰,+\infty)$ عرض نقطهٔ بحرانی تابع کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۵

۱۴۱۸- تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۱}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۱۹- نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x^۳-۳x^۲|$ رأس‌های یک مثلث‌اند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۴۲۰- تابع $f(x)=|x|+|x^۲-۱|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

سؤال	گام
۱۴۱۱	۲۱۰
۱۴۱۲	۲۱۰
۱۴۱۳	۱۸۷ ۲۱۰
۱۴۱۴	۱۹۹ ۲۱۰
۱۴۱۵	۱۹۶ ۲۱۰
۱۴۱۶	۱۹۴ ۱۹۹ ۲۱۰
۱۴۱۷	۲۱۰
۱۴۱۸	۱۸۰ ۱۹۱ ۲۱۰
۱۴۱۹	۱۹۴ ۱۹۶ ۲۱۰
۱۴۲۰	۱۹۴ ۲۱۰

آزمون ۱۴۳ نقاط بحرانی (۲)

۱۴۲۱- در تابع $f(x)=x^۳-۳x+۱$ مجموع عرض نقاط بحرانی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۲۲- محیط مثلثی که رأس‌های آن نقاط بحرانی تابع $f(x)=۲x^۴-x^۲$ هستند، کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۱۷}$ ۲) $۱+\frac{\sqrt{۱۷}}{۸}$ ۳) $۲+\sqrt{۱۷}$ ۴) $۱+\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$

۱۴۲۳- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x\sqrt{۱-x^۲}$ و دامنهٔ $(-۱,۱)$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۲۴- تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}\times\sqrt{x-۲}}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۴۲۵- تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۴x-x^۲}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۲۶- تابع $f(x)=x^۲+\sqrt[۳]{x^۲-۱}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۲۷- مجموع عرض نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۴x & x>۰\\ ۲x+۳ & x\le ۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۲۸- تابع $f(x)=\sqrt[۳]{\sin x}$ چند نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۲۹- تابع $f(x)=\big|x|x|-۱\big|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

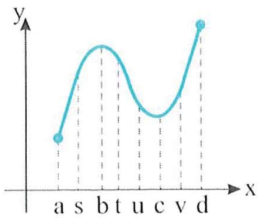
۱۴۳۰- تابع $f(x)=(-۱)^{[x]}x$ با دامنهٔ $(-۲,۱)$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال	گا
۱۴۲۱	۱۰
۱۴۲۲	۱۰
۱۴۲۳	۸۷ ۹۱ ۱۰
۱۴۲۴	۸۷ ۱۱ ۱۰
۱۴۲۵	۱۰ ۱۱ ۱۰
۱۴۲۶	۱۰ ۱ ۰
۱۴۲۷	۴ ۹ ۰
۱۴۲۸	۱ ۰
۱۴۲۹	۹ ۰
۱۴۳۰	۹ ۰

درس سوم: اکسترمم‌های نسبی

مفهوم ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی



شکل مقابل نمودار تابع f را نشان می‌دهد. از روی این نمودار معلوم است که ماکزیمم مقادیر تابع f برابر با $f(d)$ و مینیمم مقادیر تابع f برابر با $f(a)$ است. از طرف دیگر، اگر مقادیر تابع f را در نزدیکی نقطهٔ b در نظر بگیریم (مثلاً روی بازهٔ (s,t))، آن‌گاه ماکزیمم این مقادیر برابر $f(b)$ است. در این حالت، $f(b)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم. همین‌طور، اگر مقادیر تابع f در نزدیکی نقطهٔ c را در نظر بگیریم (مثلاً روی بازهٔ (u,v))، آن‌گاه مینیمم این مقادیر برابر $f(c)$ است. در این حالت، $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

تعریف

می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه بازه‌ای مانند (a,b) شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد که تابع f روی آن تعریف شده باشد و به‌ازای هر x از این بازه $f(x)\le f(c)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم. نقطهٔ $(c,f(c))$ را نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

مثال: در نمودارهای زیر، نقطهٔ مشخص شده نقطهٔ ماکزیمم نسبی است:



تعریف

می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ مینیمم نسبی دارد، هرگاه بازه‌ای مانند (a,b) شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد که تابع f روی آن تعریف شده باشد و به‌ازای هر x از این بازه $f(x)\ge f(c)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم. نقطهٔ $(c,f(c))$ را نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

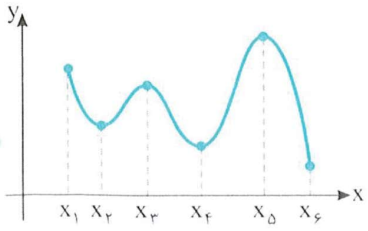
مثال: در نمودارهای زیر، نقطهٔ مشخص شده نقطهٔ مینیمم نسبی است:



تعریف

نقطه‌های ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی تابع را نقطه‌های اکسترمم نسبی آن می‌نامند.

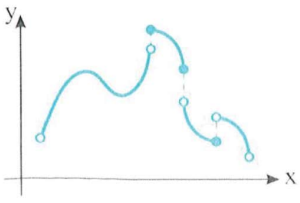
مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. توجه کنید که تابع f



- در نقطهٔ x_1 اکسترمم نسبی ندارد.
- در نقطهٔ x_2 مینیمم نسبی دارد.
- در نقطهٔ x_3 ماکزیمم نسبی دارد.
- در نقطهٔ x_4 مینیمم نسبی دارد.
- در نقطهٔ x_5 ماکزیمم نسبی دارد.
- در نقطهٔ x_6 اکسترمم نسبی ندارد.

تست ۱

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. این تابع چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟



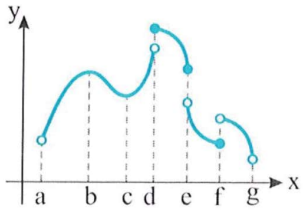
۱) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و سه نقطهٔ مینیمم نسبی

۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چهار نقطهٔ مینیمم نسبی

۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

۴) سه نقطهٔ ماکزیمم نسبی و سه نقطهٔ مینیمم نسبی

راه‌حل



b و d طول نقاط ماکزیمم نسبی و f و c طول نقاط مینیمم نسبی هستند.

آزمون مشتق اول

۲۱۲

فرض کنید تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته باشد و $c\in(a,b)$ طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. همچنین تابع f در نقاط دیگر این بازه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

الف) اگر جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل زیر باشد، تابع در نقطهٔ $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد.

x	a	c	b
$f'(x)$	+		−

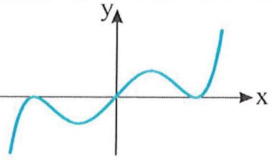
ب) اگر جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل زیر باشد، تابع در نقطهٔ $x=c$ مینیمم نسبی دارد.

x	a	c	b
$f'(x)$	−		+

یعنی اگر علامت $f'(x)$ در دو طرف نقطهٔ بحرانی یکسان نباشد، آن‌گاه نقطهٔ بحرانی، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است. اگر تغییر علامت $f'(x)$ از مثبت به منفی باشد (یعنی علامت $f'(x)$ در سمت چپ نقطهٔ بحرانی مثبت و در سمت راست آن منفی باشد)، تابع f در نقطهٔ بحرانی ماکزیمم نسبی دارد و اگر تغییر علامت $f'(x)$ از منفی به مثبت باشد، تابع f در نقطهٔ بحرانی مینیمم نسبی دارد.

تست ۲

نمودار تابع مشتق تابع f به شکل مقابل است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع f کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

راه‌حل

با توجه به نمودار تابع f'، تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است. مشتق فقط در $x=0$ تغییر علامت داده است، پس بنابر آزمون مشتق اول، $x=0$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	min نسبی	↗	

تست ۳

دربارهٔ تابع f می‌دانیم که روی $\mathbb{R}$، $f'(x)=x^3-3x^2+2x$. تابع f چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی
۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی
۴) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

راه‌حل

توجه کنید که $f'(x)=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$. جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$		↘	min نسبی	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗	

طبق جدول، تابع دو نقطهٔ مینیمم نسبی و یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.

تست ۴ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $f(x)=2x^3-3x^2+7$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) صفر

راه‌حل توجه کنید که چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس تابع نقطهٔ بحرانی که در آن مشتق‌پذیر نباشد، ندارد و در نتیجه طول نقاط اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. از طرف دیگر، $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$. بنابراین

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗	

در نتیجه طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f برابر ۱ است.

تست ۵ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=(\frac{3}{4}x-\frac{1}{7}x^2)\sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۱) $x=0$ ۲) $x=1$ ۳) $x=2$ ۴) $x=3$

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=(\frac{3}{4}-\frac{2}{7}x)\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(\frac{3}{4}x-\frac{1}{7}x^2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(3x-x^2)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(\frac{9}{4}x-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{7}x^2)$.

جدول تعیین علامت مشتق به‌صورت مقابل است:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
			min نسبی		max نسبی		

پس $x=3$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

تست ۶ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ در اطراف نقطهٔ $x=-1$ چگونه است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

راه‌حل مشتق تابع را پیدا و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗	

با توجه به جدول، تابع در $x=-1$ ماکزیمم نسبی دارد. بنابراین نمودار آن در اطراف این نقطه به‌صورت شکل گزینهٔ (۴) است.

نکته (۲۱۳)

اگر $f'(a)=0$، آن‌گاه تابع f ممکن است در نقطهٔ $x=a$ اکسترمم نسبی نداشته باشد و تغییر علامت $f'(x)$ در این نقطه مهم است.

تست ۷ مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=(x+2)^2(x-3)^3$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -2 ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع، جواب‌هایی از معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند که تابع f' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد.

اکنون توجه کنید که $f'(x)=2(x+2)(x-3)^3+(x+2)^2\times 3(x-3)^2=(x+2)(x-3)^2(2(x-3)+3(x+2))=(x+2)(x-3)^2(5x)$

بنابراین

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗		↗	

در نتیجه تابع f فقط در نقطه‌هایی به طول -2 و صفر اکسترمم نسبی دارد و مجموع این عددها برابر -2 است.

تست ۸ طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\sin 2x-x$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{\pi}{4}$ ۲) $\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $\pm\frac{\pi}{2}$

راه‌حل چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f آن ریشه‌هایی از معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند که تابع f' در آنها تغییر علامت می‌دهد. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=2\cos 2x-1,\quad f'(x)=0\Rightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\xrightarrow{x\in(-\pi,\pi)}x=\pm\frac{\pi}{6}$$

توجه کنید که f' در نقطه‌های $-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6}$ تغییر علامت می‌دهد.

تست ۹ تابع $f(x)=\tan^2 x-2\tan x$ روی بازهٔ $(-\pi,\pi)$ چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

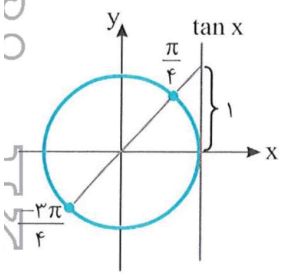
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\tan^2 x-2\tan x\Rightarrow f'(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)-2(1+\tan^2 x)=2(1+\tan^2 x)(\tan x-1)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\tan x=1\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\xrightarrow{x\in(-\pi,\pi)}x=\frac{-3\pi}{4},\frac{\pi}{4}$$

در اطراف این دو نقطه، به کمک دایرهٔ مثلثاتی مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:



x		$\frac{\pi}{4}$	
$f'(x)$	−	0	+
f	↘	min نسبی	↗

x		$-\frac{3\pi}{4}$	
$f'(x)$	−	0	+
f	↘	min نسبی	↗

این تابع در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ فقط دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

تست ۱۰ تابع $f(x)=|\sin x-\cos x|$ روی بازهٔ $(0,\pi)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق آن را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-\sin x+\cos x & 0<x\le\frac{\pi}{4}\\ \sin x-\cos x & \frac{\pi}{4}<x<\pi\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\cos x-\sin x & 0<x<\frac{\pi}{4}\\ \cos x+\sin x & \frac{\pi}{4}<x<\pi\end{cases}$$

تابع در $x=\frac{\pi}{4}$ مشتق ندارد و مشتق آن در $x=\frac{3\pi}{4}$ برابر صفر است.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		−	ت ن	+	0	−	
f		↘	min نسبی	↗	max نسبی	↘	

با توجه به جدول بالا، تابع یک نقطهٔ مینیمم نسبی و یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد (تعیین علامت مشتق را می‌توانید به کمک عددگذاری انجام دهید).

۲۱۴

نکته

فرض کنید $x=a$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f باشد. در این صورت

۱) f می‌تواند در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد.

۲) اگر f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(a)=0$.

۳) نقطهٔ $(a, f(a))$ روی نمودار تابع f قرار دارد، یعنی مختصات این نقطه در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

تست ۱۱

اگر تابع $f(x)=x^3-2x^2+mx+1$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ اکسترمم نسبی داشته باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. اکنون توجه کنید که $f'(x)=3x^2-4x+m$. بنابراین

$$f'(1)=0 \Rightarrow 3-4+m=0 \Rightarrow m=1$$

توجه کنید که اگر $m=1$، آن‌گاه $f'(x)=3x^2-4x+1$ و Δ در عبارت $f'(x)$ صفر نیست. پس عبارت $f'(x)$ در $x=1$ تغییر علامت می‌دهد.

تست ۱۲

اگر طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ برابر -3 و ۱ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -4 ۳) -6 ۴) -8

راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس طول نقطه‌های اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. از طرف دیگر، $f'(x)=3x^2+2ax+b$. بنابراین

$$\begin{cases} f'(-3)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27-6a+b=0 \\ 3+2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases} \Rightarrow a+b=-6$$

راه‌حل دوم توجه کنید که چون -3 و ۱ جواب‌های معادلهٔ $3x^2+2ax+b=0$ هستند، پس مجموع آن‌ها برابر $\frac{-2a}{3}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $\frac{b}{3}$ است. پس

$$-\frac{2a}{3}=-2 \Rightarrow a=3, \quad \frac{b}{3}=-3 \Rightarrow b=-9 \Rightarrow a+b=-6$$

تست ۱۳

اگر $(-2, 3)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

راه‌حل

توجه کنید که نقطهٔ ماکزیمم نسبی روی نمودار تابع است، پس $f(-2)=3$. از طرف دیگر، چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن جواب معادلهٔ $f'(x)=0$ است، یعنی $f'(-2)=0$. اکنون توجه کنید که $f'(x)=3x^2+2ax+b$. در نتیجه

$$\begin{cases} f(-2)=3 \\ f'(-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8+4a-2b+1=3 \\ 12-4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{2} \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow ab=7$$

تست ۱۴

نقطهٔ $(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3})$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=a\cos x+x+b$ است. مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) $-\frac{\pi}{6}$

راه‌حل

مشتق تابع به‌ازای $x=\frac{\pi}{6}$ صفر است. پس

$$f'(x)=-a\sin x+1 \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=\frac{-a}{2}+1=0 \Rightarrow a=2$$

از طرف دیگر مقدار تابع در این نقطه برابر با $\sqrt{3}$ است. پس

$$f(x)=2\cos x+x+b \Rightarrow f(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}+b=\sqrt{3} \Rightarrow b=\frac{-\pi}{6}$$

۲۱۵

نکته

گاهی پیدا کردن نقاط یا مقادیر اکسترمم نسبی تابع با رسم نمودار آن ساده‌تر است. به ویژه وقتی‌که تابعی در نقاط ناپیوستگی‌اش اکسترمم نسبی دارد، این مورد درست است.

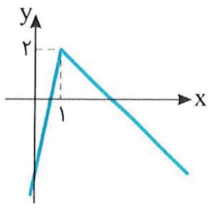
تست ۱۵

تعداد نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع $f(x)=2x-3|x-1|$ کدام است؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و صفر نقطهٔ مینیمم نسبی
۳) صفر نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۴) صفر نقطهٔ ماکزیمم نسبی و صفر نقطهٔ مینیمم نسبی

راه‌حل تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x-3(x-1) & x\geq 1\\ 2x+3(x-1) & x\leq 1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-x+3 & x\geq 1\\ 5x-3 & x\leq 1\end{cases}$$



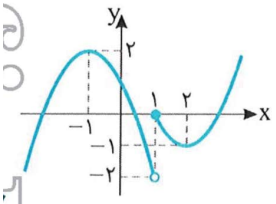
در نتیجه تابع در نقطهٔ $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد و نقطهٔ مینیمم نسبی ندارد.

تست ۱۶

تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3 & x\geq 1\\ -x^2-2x+1 & x<1\end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی
۴) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

راه‌حل با رسم نمودار تابع متوجه می‌شویم که تابع در نقاط $x=-1$ و $x=1$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=2$ مینیمم نسبی دارد.



تست ۱۷

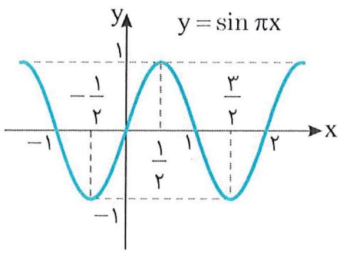
تابع $f(x)=[x]+\sin(\pi x)$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی در بازهٔ $(-1,2)$ دارد؟

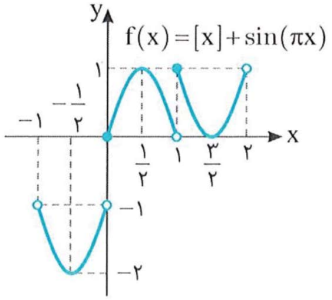
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-1+\sin(\pi x) & -1<x<0\\ \sin(\pi x) & 0\leq x<1\\ 1+\sin(\pi x) & 1\leq x<2\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f با توجه به نمودار تابع $y=\sin(\pi x)$ به‌صورت زیر است:

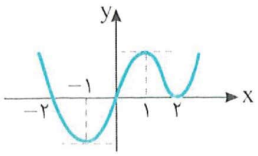




واضح است که تابع روی بازهٔ $(-1,2)$ در نقاط $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$ ماکزیمم نسبی و در نقاط $x=\frac{3}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$ مینیمم نسبی دارد. بنابراین چهار نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

دست‌گرمی

۲۱۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع طول نقطه‌های مینیمم نسبی تابع f کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۲-

۲۱۴- اگر برای هر x، $f'(x)=(x+۲)(x-۲)^۲$، آن‌گاه تابع f چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۲) فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی
۳) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی

۲۱۵- تابع $f(x)=۲x^۴-x^۳$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۶- تابع $f(x)=\begin{cases}|x-۱| & x\geq ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۲) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۳) فقط دو نقطهٔ مینیمم نسبی
۴) فقط دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی

۲۱۷- تابع $f(x)=|\sin x|$ روی بازهٔ $(۰,\frac{۷\pi}{۴})$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

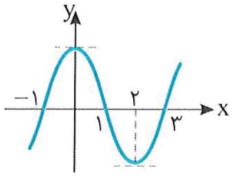
۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی
۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۴) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

۲۱۸- تابع $f(x)=x-۲\sin x$ روی بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

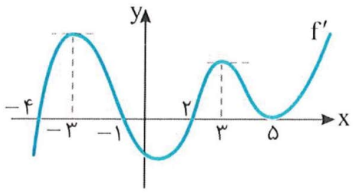
آزمون ۱۴۴ اکسترمم‌های نسبی (۱)

۱۴۳۱- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. تابع f در چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۴۳۲- نمودار تابع مشتق تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل‌ضرب طول نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع f کدام است؟



۱) -۳۶۰
۲) -۹
۳) ۸
۴) ۴۰

۱۴۳۳- تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\geq ۰ \\ x^۲+۱ & x<۰ \end{cases}$ به‌ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) صفر و ۱ ۲) ۱ و صفر ۳) ۱ و ۱ ۴) صفر و صفر

۱۴۳۴- دربارهٔ تابع f می‌دانیم که روی $\mathbb{R}$، $f'(x)=(x-۱)(x-۲)^۲(x-۳)^۳(x-۴)^۴$. تعداد نقطه‌های مینیمم نسبی تابع f چند است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۳۵- اگر $f(x)=x^۵-۵x^۳$، حاصل‌ضرب طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f کدام است؟

۱) -۹ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) صفر

۱۴۳۶- در تابع $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$، .....

۱) مقدار ماکزیمم نسبی برابر صفر است.
۲) مقدار ماکزیمم نسبی برابر -۱ است.
۳) مقدار مینیمم نسبی برابر صفر است.
۴) مقدار مینیمم نسبی برابر -۱ است.

۱۴۳۷- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\sqrt{x^۳-۳x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۴۳۸- مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x)=x-۴\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۱۴۳۹- کدام‌یک طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\cos^۲ x-۲\sin x$ نیست؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۱۴۴۰- مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\sin^۲ x-\cos x$ روی بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) ۳π ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

سؤال	گاه
۱۴۳۱	۱۱
۱۴۳۲	۱۲
۱۴۳۳	۱۵
۱۴۳۴	۱۲ ۱۵ ۱۶
۱۴۳۵	۱۲ ۱۲
۱۴۳۶	۱۷ ۱۲ ۱۵
۱۴۳۷	۲
۱۴۳۸	۲ ۶
۱۴۳۹	۲ ۶
۱۴۴۰	۲ ۶

آزمون ۱۴۵ اکسترمم‌های نسبی (۲)

۱۴۴۱- دربارهٔ تابع f می‌دانیم روی $\mathbb{R}$، $f'(x)=x(x+1)(x-3)^2(x+2)^3$. مجموع طول نقطه‌هایی که تابع f در آن‌ها اکسترمم نسبی دارد، کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) -3

۱۴۴۲- اگر $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-2$، مقدار ماکزیمم نسبی تابع f کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۷ ۴) صفر

۱۴۴۳- حاصل‌ضرب عرض نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{12}$

۱۴۴۴- مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) -2

۱۴۴۵- کدام‌یک طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ نیست؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{5\pi}{6}$ ۴) π

۱۴۴۶- مینیمم نسبی تابع $f(x)=\cos^2 x-\cos x$ در بازهٔ $(0,\pi)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{3}{4}$

۱۴۴۷- تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+x-1$ نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد. حدود مقادیر a کدام است؟

۱) $-1\le a\le 1$ ۲) $-\sqrt{3}\le a\le\sqrt{3}$

۳) $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ ۴) $-1<a<1$

۱۴۴۸- اگر $x=7$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax+\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{32}$ ۳) $\frac{1}{36}$ ۴) $\frac{1}{48}$

۱۴۴۹- اگر $(-1,-1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۱

۱۴۵۰- اگر مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{kx+1}{\sqrt{x}}$ برابر ۴ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال	گام
۱۴۴۱	۲۱۲ ۳۱۵ ۳۱۶
۱۴۴۲	۲۱۲ ۳۱۶
۱۴۴۳	۲۱۲ ۳۱۲
۱۴۴۴	۲۱۲ ۳۱۵
۱۴۴۵	۲۱۲ ۳۱۶
۱۴۴۶	۲۱۲ ۳۱۶
۱۴۴۷	۲۱۲ ۳۱۳
۱۴۴۸	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۱۳
۱۴۴۹	۱۸۷ ۲۱۴
۱۴۵۰	۱۸۷ ۲۱۴

آزمون ۱۴۶ — اکسترمم‌های نسبی (۳)

۱۴۵۱- فاصلهٔ نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=2x^3-3x^2-12x-8$ از یکدیگر کدام است؟

۱) $\sqrt{735}$ ۲) $\sqrt{736}$ ۳) $\sqrt{737}$ ۴) $\sqrt{738}$

۱۴۵۲- حاصل‌جمع مقادیر اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-x+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{8}{3}$

۱۴۵۳- اگر نقطهٔ $(\frac{1}{2},1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{4x+a}{4x^2+a+1}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

۱۴۵۴- اگر اختلاف مقدارهای ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{5x}{x^2+k^2}$ برابر ۱۰ باشد، مقدار k کدام است؟ $(k\neq 0)$

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) $\pm\frac{1}{2}$ ۴) ± 4

۱۴۵۵- اگر $(-1,4)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^3-bx+2$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۵۶- اگر طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=a^2x^3+2ax^2+x-1$ برابر -1 باشد، مقدار a کدام است؟

۱) فقط $\frac{1}{3}$ ۲) فقط ۱ ۳) ۱ و $\frac{1}{3}$ ۴) -1 و $-\frac{1}{3}$

۱۴۵۷- مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x)=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۵۸- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x-3\sqrt[3]{x+2}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) صفر ۴) ۲

۱۴۵۹- تابع $f(x)=x\sin x+\cos x$ در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی
۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی
۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی

۱۴۶۰- تابع $f(x)=[x]+\cos(\pi x)$ روی بازهٔ $(-1,2)$ چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال	گاه
۱۴۵۱	۱۲ ۵۲
۱۴۵۲	۸۷ ۱۲
۱۴۵۳	۸۷ ۱۴
۱۴۵۴	۸۷ ۱۲
۱۴۵۵	۱۴
۱۴۵۶	۴
۱۴۵۷	۲
۱۴۵۸	۱ ۲ ۶
۱۴۵۹	۲ ۶
۱۴۶۰	۵

آزمون ۱۴۷ اکسترمم‌های نسبی (۴)

۱۴۶۱- تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+۹x-۱$ در نقطهٔ $x=a$ مینیمم نسبی و در نقطهٔ $x=b$ ماکزیمم نسبی دارد. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۴۶۲- اگر نقطهٔ $x=۱$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^۲-ax}{x+۱}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) -۳

۱۴۶۳- طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۱۴۶۴- دربارهٔ تابع $f(x)=x-\sqrt{۲x-۱}$ کدام درست است؟

۱) مقدار ماکزیمم نسبی برابر ۱ است.
۲) مقدار ماکزیمم نسبی برابر صفر است.
۳) مقدار مینیمم نسبی برابر ۱ است.
۴) مقدار مینیمم نسبی برابر صفر است.

۱۴۶۵- تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+۱۸x^۲$ سه نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. حدود مقادیر a کدام است؟

۱) $|a|>۴$ ۲) $|a|>۸$ ۳) $۴<|a|<۸$ ۴) $۸<|a|<۱۶$

۱۴۶۶- تابع $f(x)=\begin{cases}۱-x^۲ & x\neq ۰\\ k-۱ & x=۰\end{cases}$ نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. حدود k کدام است؟

۱) $k>۲$ ۲) $k>۱$ ۳) $k<۱$ ۴) $k<۲$

۱۴۶۷- اگر $(\frac{\pi}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=a\sin ۲x-b\cos x$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $-۲\sqrt{۳}$ ۳) -۳ ۴) ۳

۱۴۶۸- تابع $f(x)=x+۲\cos^۲ x$ روی بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۳) فقط دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.
۴) فقط دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۱۴۶۹- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\cos^۲ x-\cos x+۱$ روی بازهٔ $(\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۴۷۰- تابع $f(x)=x+[\sin x]$ به‌ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

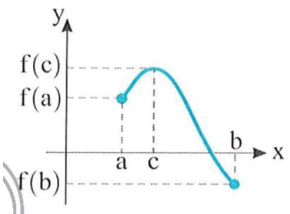
۱) ۱، ۱ ۲) ۲، صفر ۳) صفر، ۱ ۴) ۱، صفر

سؤال	گام
۱۴۶۱	۲۱۲ ۳۱۲
۱۴۶۲	۱۸۷ ۲۱۴
۱۴۶۳	۲۱۲ ۳۱۵
۱۴۶۴	۲۱۲ ۳۱۶
۱۴۶۵	۲۱۲ ۳۱۳
۱۴۶۶	۲۱۱ ۲۱۵
۱۴۶۷	۲۱۴
۱۴۶۸	۲۱۲ ۳۱۶
۱۴۶۹	۲۱۲ ۳۱۶
۱۴۷۰	۲۱۵

درس چهارم: اکسترمم‌های مطلق

مفهوم ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق

نمودار تابع f در شکل مقابل را در نظر بگیرید. از روی این شکل معلوم است که $f(b)$ کمترین مقدار و $f(c)$ بیشترین مقدار تابع f است.

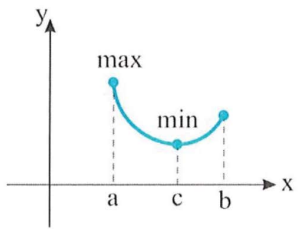


تعریف

می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ ماکزیمم مطلق دارد، هرگاه به‌ازای هر x از دامنهٔ f، $f(x)\le f(c)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق تابع f می‌نامیم. همچنین می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=c$ مینیمم مطلق دارد، هرگاه به‌ازای هر x از دامنهٔ f، $f(x)\ge f(c)$. در این صورت $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق تابع f می‌نامیم.

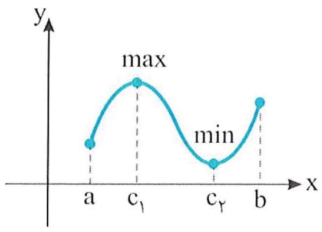
تذکر اگر $A\subseteq D_f$ و ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f روی مجموعهٔ A را بخواهیم، دامنهٔ تابع f را به مجموعهٔ A محدود می‌کنیم.

مثال:



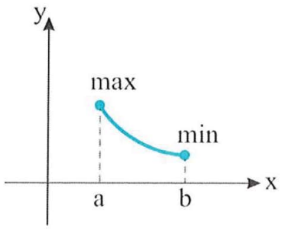
$f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع است.

$f(c)$ مقدار مینیمم مطلق تابع است.



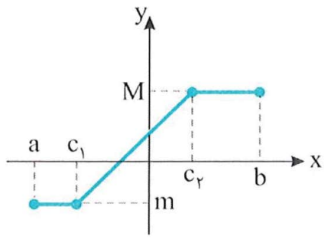
$f(c_1)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع است.

$f(c_2)$ مقدار مینیمم مطلق تابع است.

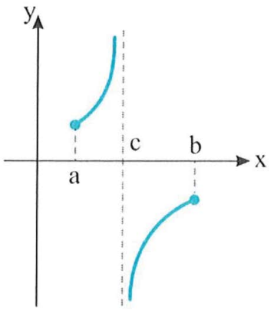


$f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع است.

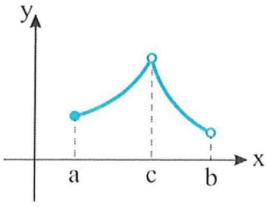
$f(b)$ مقدار مینیمم مطلق تابع است.



تابع در تمام نقاط بازهٔ $[a,c_1]$ مینیمم مطلق، m و در تمام نقاط بازهٔ $[c_2,b]$ ماکزیمم مطلق، M دارد.



تابع نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق.



تابع نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق.

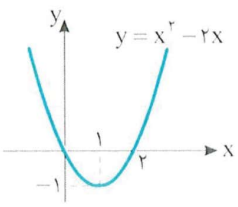
تعریف

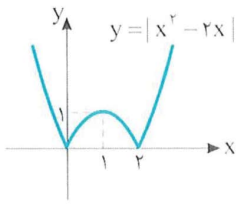
به نقطهٔ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع نقطهٔ اکسترمم مطلق آن می‌گوییم.

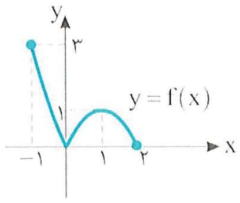
تست ۱ مقدار ماکزیمم مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x^۲-۲x|$ و دامنهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم می‌شود







بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ است.

تست ۲ تابع $f(x)=(m-۱)x^۲-۴x-۱$ نقطهٔ مینیمم مطلق دارد. این نقطه در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

راه‌حل در تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ اگر $a>۰$، آن‌گاه تابع نقطهٔ مینیمم مطلق دارد. طول این نقطه برابر با $\frac{-b}{۲a}$ و عرض آن برابر $\frac{-\Delta}{۴a}$ است. بنابراین در تابع f، باید $m-۱>۰$. اکنون توجه کنید که $\frac{-b}{۲a}=\frac{۴}{۲(m-۱)}=\frac{۲}{m-۱}>۰$ و $\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(۱۶+۴(m-۱))}{۴(m-۱)}<۰$.

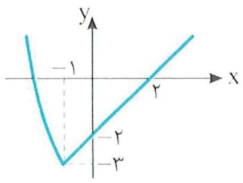
پس طول نقطهٔ مینیمم مطلق مثبت و عرض آن منفی است. در نتیجه این نقطه در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

تست ۳ اگر نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۴ & x\le -۱\\ x-۲ & x>-۱\end{cases}$ روی خط $x+۲y+k=۰$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

راه‌حل نمودار تابع f را در شکل مقابل رسم کرده‌ایم. از روی این نمودار معلوم است که نقطهٔ $(-۳,-۱)$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع f است. چون این نقطه روی خط $x+۲y+k=۰$ است، پس

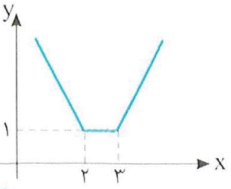
$$-۱-۶+k=۰\Rightarrow k=۷$$



تست ۴ تابع $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ در چند نقطه با طول صحیح مینیمم مطلق دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل نمودار تابع را رسم می‌کنیم. واضح است که مقدار مینیمم مطلق تابع روی بازهٔ $[۲,۳]$ برابر ۱ است که به‌ازای دو نقطهٔ صحیح $x=۲$ و $x=۳$ به‌دست می‌آید.



قضیه اگر تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه در این بازه ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق دارد.

نکته روش پیدا کردن اکسترمم‌های مطلق در توابع پیوسته ۲۱۷

برای محاسبهٔ اکسترمم‌های مطلق تابع پیوستهٔ f روی بازهٔ $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازهٔ (a,b) پیدا می‌کنیم، سپس مقدار تابع در نقاط بحرانی و $f(a)$ و $f(b)$ را حساب می‌کنیم. بیشترین مقدار و کمترین مقدار از بین این مقادیر، به‌ترتیب مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ هستند.

تست ۵ مجموع مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x)=x^۳-x^۲-x$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=۳x^۲-۲x-۱=۰\Rightarrow(x-۱)(۳x+۱)=۰\Rightarrow x=۱, x=-\frac{۱}{۳}$

اکنون مقادیر تابع در نقاط $x=۱$، $x=-\frac{۱}{۳}$ و دو سر بازه را حساب می‌کنیم: $f(۱)=-۱$، $f(-\frac{۱}{۳})=\frac{۵}{۲۷}$، $f(-۱)=-۱$ و $f(۲)=۲$. پس مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به‌ترتیب برابر ۲ و -۱ هستند. بنابراین مجموع مقادیر اکسترمم مطلق تابع برابر است با $۱=۲+(-۱)$.

تست ۶ مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x-۳}{x+۲}$ روی بازهٔ $[۰,۳]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱۴}{۵}$

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x+۲)-(۱)(x^۲+۲x-۳)}{(x+۲)^۲}=\frac{x^۲+۴x+۷}{(x+۲)^۲}=\frac{(x+۲)^۲+۳}{(x+۲)^۲}$, $x\in(۰,۳)$

بنابراین معادلهٔ $f'(x)=۰$ جواب ندارد. از طرف دیگر، $f(۰)=-\frac{۳}{۲}$ و $f(۳)=\frac{۱۲}{۵}$، پس مقدار ماکزیمم مطلق تابع f برابر $\frac{۱۲}{۵}$ است.

تست ۷ حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{۴-۲x}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

راه‌حل دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x}+\sqrt{۴-۲x}$ بازهٔ $[۰,۲]$ است. پس باید مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f روی این بازه را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{۲}{۲\sqrt{۴-۲x}}=\frac{\sqrt{۴-۲x}-۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\sqrt{۴-۲x}},\quad f'(۰)=۰\Rightarrow\sqrt{۴-۲x}=۲\sqrt{x}\Rightarrow۴-۲x=۴x\Rightarrow۶x=۴\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

اکنون مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{۲}{۳}$ را با مقدار تابع در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ مقایسه می‌کنیم: $f(۰)=۲$, $f(۲)=\sqrt{۲}$, $f(\frac{۲}{۳})=\sqrt{۶}$

پس بیشترین مقدار تابع برابر $\sqrt{۶}$ و کمترین مقدار آن برابر $\sqrt{۲}$ است. در نتیجه حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع برابر با $\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$ است.

تذکر

اگر بخواهیم اکسترمم‌های مطلق تابع f روی بازهٔ (a,b) را پیدا کنیم، می‌توانیم در روش فوق به جای $f(a)$ از $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و به جای $f(b)$ از $\lim_{x\to b^-} f(x)$ استفاده کنیم. اگر هر کدام از این مقادیر حدی، بیشترین مقدار به‌دست آمده باشد، تابع f روی بازهٔ (a,b) ماکزیمم مطلق ندارد و اگر کمترین مقدار به‌دست آمده باشند، تابع f روی این بازه مینیمم مطلق ندارد.

در مورد بازه‌های $[a,b)$، $(a,b]$، $(-\infty,a)$، $[-\infty,a]$، $(a,+\infty)$، $[a,+\infty)$ و $(-\infty,+\infty)$ نیز به همین روش عمل می‌کنیم.

تست ۸ مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{۲x^۲-۱}{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و باید مقدار مینیمم مطلق تابع f را روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیدا کنیم. تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم: $f(۰)=-۱$, $f'(x)=۰\Rightarrow x=۰$, $f'(x)=\frac{۴x(x^۲+۱)-۲x(۲x^۲-۱)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۶x}{(x^۲+۱)^۲}$

از طرف دیگر $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=۲$، پس مقدار مینیمم مطلق تابع برابر است با $f(۰)=-۱$.

تست ۹ مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) وجود ندارد.

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و باید ماکزیمم مطلق تابع f را روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیدا کنیم. تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲x(x^۲+۱)-۲x^۳}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲x}{(x^۲+۱)^۲}\quad,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\quad,\quad f(۰)=۰$$

از طرف دیگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=۱$. بنابراین تابع f ماکزیمم مطلق ندارد.

تست ۱۰ کمترین مقدار تابع $f(x)=\sin^۲ x+\cos x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

راه‌حل توجه کنید که

$$f'(x)=۲\cos x\sin x-\sin x=\sin x(۲\cos x-۱)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sin x=۰\Rightarrow x=\pi\quad,\quad \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}$$

اکنون توجه کنید که

$$f(۰)=f(۲\pi)=۱,\quad f(\pi)=-۱,\quad f(\frac{\pi}{۳})=f(\frac{۵\pi}{۳})=\frac{۵}{۴}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f برابر -۱ است.

دست‌گرمی

۲۱۹- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=۲x^۲-۸x+۱$ روی بازهٔ $[۰,۵]$ چقدر از مقدار مینیمم مطلق آن بیشتر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۲۲۰- اختلاف مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x & ۰\le x\le ۳\\ x-۱ & -۱\le x<۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۲۱- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$ روی بازهٔ $[۰,+\infty)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۲۲- بیشترین مقدار تابع $f(x)=\cos ۲x+۲\sin x$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

آزمون ۱۴۸ اکسترمم‌های مطلق (۱)

۱۴۷۱- مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}$ در بازهٔ $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۹ ۳) -۲۷ ۴) صفر

۱۴۷۲- اگر مجموع بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x)=x^{۳}-۳x+k$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر ۴ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۷۳- حاصل‌ضرب مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x)=\frac{۴x}{x^{۲}+۱}$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

۱۴۷۴- اگر (a,b) نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۵}-x^{۴}-۳x^{۳}+۹$ روی بازهٔ $[-۲,۱]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱۷ ۲) -۱۱ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۴۷۵- مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} ۲-x^{۳} & -۱\le x<۰ \\ x^{۲}+x-۱ & ۰\le x\le ۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۷۶- مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۳|x|$ روی بازهٔ $[-۱,۱]$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) -۸

۱۴۷۷- ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=|x^{۲}-۴|x||$ با دامنهٔ $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۷۸- حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{۸-x}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۶\sqrt{۲}$

۱۴۷۹- نسبت کمترین مقدار به بیشترین مقدار تابع $f(x)=x-\sqrt{۴-x^{۲}}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

۱۴۸۰- بیشترین مقدار تابع $f(x)=\sin ۲x+۲\sin x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

آزمون ۱۴۹ اکسترمم‌های مطلق (۲)

۱۴۸۱- اختلاف ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^4+16x^2+1$ در بازهٔ $[-1,1]$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۴۸۲- کمترین مقدار تابع $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ روی بازهٔ $[-\frac{1}{2},2]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱۴۸۳- مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2+a$ روی بازهٔ $[-1,2]$ برابر ۴ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۴۸۴- اگر (a,b) نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{10}-10x+1$ روی بازهٔ $[-1,2]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) -7 ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۸۵- اگر $f(x)=mx^3+3mx^2$ و بیشترین مقدار تابع f' برابر ۱۲ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) ۶ ۴) ۴

۱۴۸۶- اختلاف مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=(x-1)|x-2|$ روی بازهٔ $[0,3]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۸۷- حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) $5\sqrt{5}$

۱۴۸۸- کمترین مقدار تابع $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$ روی بازهٔ $(0,+\infty)$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۱۴۸۹- حداکثر مقدار تابع $f(x)=\big||x|-2\big|-1$ روی بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۴۹۰- کمترین مقدار تابع $f(x)=\sin^2 x+\sin x$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},0]$ کدام است؟

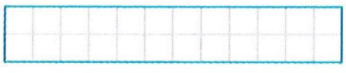
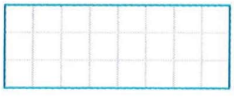
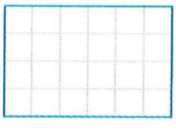
۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{4}$

سؤال	گام
۱۴۸۱	۲۱۷
۱۴۸۲	۱۸۷ ۲۱۷
۱۴۸۳	۲۱۷
۱۴۸۴	۲۱۷
۱۴۸۵	۲۱۸
۱۴۸۶	۱۹۴ ۲۱۷
۱۴۸۷	۱۹۱ ۲۱۷
۱۴۸۸	۲۱۸
۱۴۸۹	۳۱ ۳۸ ۲۱۶
۱۴۹۰	۱۹۱ ۲۱۷

درس پنجم: بهینه‌سازی

به مسائلی که هدف آن‌ها ماکزیمم یا مینیمم کردن مقدار یک کمیت است، **مسائل بهینه‌سازی** می‌گوییم. برخی از این مسائل را در لیست زیر می‌بینید:
در بین مستطیل‌های با محیط ثابت، کدام‌یک بیشترین مساحت را دارد؟ کمترین فاصلهٔ یک نقطهٔ ثابت از نمودار یک تابع چقدر است؟ حجم بزرگ‌ترین استوانه‌ای که در یک کرهٔ ثابت محاط است، چقدر است؟ در یک کارخانه، به‌ازای چه تعداد تولید محصول، کمترین هزینه یا بیشترین سود حاصل می‌شود؟

مثال: فرض کنید می‌خواهیم دور تا دور زمینی به شکل مستطیل را که مساحت آن برابر ۲۴ متر مربع است، با نرده محصور کنیم. مجموعهٔ مستطیل‌های با طول و عرض متفاوت که مساحت آن‌ها برابر ۲۴ متر مربع است، نامتناهی است. طول این مستطیل‌ها را با x و عرض آن‌ها را با y نشان می‌دهیم. بعضی از مستطیل‌ها را در شکل‌های زیر می‌بینید:

$x=۱۲\ ,\ y=۲$	$x=۸\ ,\ y=۳$	$x=۶\ ,\ y=۴$	$x=۵\ ,\ y=۴/۸$
			
$S=xy=۲۴$	$S=xy=۲۴$	$S=xy=۲۴$	$S=xy=۲۴$

کدام‌یک از مستطیل‌ها محیط کمتری دارد؟ به عبارت دیگر، طول و عرض این زمین مستطیل شکل را چگونه باید انتخاب کنیم تا کمترین مقدار نرده را به کار ببریم؟

اگر محیط این مستطیل‌ها را با P نمایش دهیم، P از رابطهٔ $P=۲(x+y)$ به‌دست می‌آید. در واقع می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چه مقادیری از x و y کمترین مقدار P به‌دست می‌آید. در رابطهٔ فوق P تابعی از x و y است. ابتدا این تابع را طوری می‌نویسیم که یک متغیر داشته باشد. برای این منظور از رابطهٔ $xy=۲۴$ مقدار y را برحسب x محاسبه کرده و در تابع P قرار می‌دهیم:

$$xy=۲۴\Rightarrow y=\frac{۲۴}{x}\Rightarrow P(x)=۲(x+\frac{۲۴}{x})$$

بنابراین P را به‌صورت تابعی از x نوشته‌ایم. واضح است که در این تابع x باید مثبت باشد. زیرا طول مستطیل نمی‌تواند مقداری منفی یا صفر داشته باشد. بنابراین دامنهٔ این تابع بازهٔ $(۰,+\infty)$ است. اکنون مسئله یافتن مینیمم مطلق تابع $P(x)=۲x+\frac{۴۸}{x}, x>۰$ است.

مشتق این تابع را محاسبه می‌کنیم و نقاط بحرانی آن را می‌یابیم:

$$P'(x)=۲+\frac{-۴۸}{x^۲}=۰\Rightarrow x^۲=۲۴\Rightarrow x=\sqrt{۲۴}$$

اکنون مقادیر زیر را، برای یافتن مینیمم مطلق تابع، مقایسه می‌کنیم:

$$P(\sqrt{۲۴})=۲\sqrt{۲۴}+\frac{۴۸}{\sqrt{۲۴}}=۸\sqrt{۶}\ ,\quad \lim_{x\to ۰^+}P(x)=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to +\infty}P(x)=+\infty$$

واضح است که مینیمم مطلق تابع به‌ازای $x=\sqrt{۲۴}$ به‌دست می‌آید و برابر $P=۸\sqrt{۶}$ است. در ضمن در این حالت $y=\sqrt{۲۴}$. یعنی اگر زمین را به‌صورت مربعی انتخاب کنیم، کمترین مقدار نرده برای محصور کردن آن مورد نیاز است.

نکته — **مراحل حل مسائل بهینه‌سازی**

در حل مسائل بهینه‌سازی مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) معلومات و مجهولات مسئله را مشخص می‌کنیم. در صورت امکان یا نیاز، نمودار یا شکلی از مسئله رسم می‌کنیم.

۲) تابعی را که می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم شود برحسب متغیرهای مسئله مشخص می‌کنیم.

۳) به کمک اطلاعاتی که از معلومات مسئله، هندسه، مثلثات، فیزیک و ... داریم، رابطه‌ای بین متغیرها پیدا می‌کنیم و به کمک آن تابع مورد نظر را به یک تابع یک‌متغیره تبدیل می‌کنیم.

۴) حدود تغییرات متغیر مسئله را مشخص می‌کنیم.

۵) به کمک مشتق، نقاط اکسترمم مطلق تابع را روی حدود متغیر آن تعیین می‌کنیم.

تذکر در مسائل بهینه‌سازی، ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع مورد نظر معمولاً در نقطه‌های بحرانی اتفاق می‌افتد. بنابراین برای سادگی راه‌حل‌ها از پیدا کردن مقدار تابع در نقاط ابتدا و انتهای دامنهٔ تابع صرف نظر می‌کنیم. همچنین اگر تابعی دارای یک نقطهٔ بحرانی باشد و مسئله ماکزیمم مطلق (یا مینیمم مطلق) تابع را خواسته باشد از بررسی نوع اکسترمم مطلق در نقطهٔ بحرانی صرف نظر می‌کنیم.

تست ۱ اگر $x+y=a$ ، بیشترین مقدار xy کدام است؟

۱) $\frac{a^۲}{۸}$ ۲) $\frac{a^۲}{۴}$ ۳) $-\frac{a^۲}{۸}$ ۴) $-\frac{a^۲}{۴}$

راه‌حل چون $y=a-x$ ، پس $xy=x(a-x)$. بنابراین

$$A(x)=x(a-x)=-x^۲+ax\ ,\quad A'(x)=۰\Rightarrow -۲x+a=۰\Rightarrow x=\frac{a}{۲}$$

بنابراین بیشترین مقدار xy برابر است با $-(\frac{a}{۲})^۲+a(\frac{a}{۲})=\frac{a^۲}{۴}$.

تست ۲ اگر x و y دو عدد مثبت باشند که $xy=۶$ ، مقدار مینیمم عبارت $P=۲x+۳y$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۹ ۴) $۵\sqrt{۶}$

راه‌حل چون $xy=۶$ ، پس $y=\frac{۶}{x}$. بنابراین $P(x)=۲x+\frac{۱۸}{x}$. در نتیجه

$$P'(x)=۲-\frac{۱۸}{x^۲}\ ,\quad P'(x)=۰\Rightarrow x=۳\ (x \text{ مثبت است})$$

بنابراین کمترین مقدار عبارت P به‌ازای $x=۳$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۶+۶=۱۲$.

تست ۳ در بین مستطیل‌هایی با محیط ۸۰، مستطیلی که بیشترین مساحت را دارد، مساحتش چقدر است؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۳۸۰ ۴) ۳۶۰

راه‌حل فرض کنید طول مستطیل برابر x و عرض آن برابر y باشد. در این صورت

$$۲x+۲y=۸۰\Rightarrow x+y=۴۰\Rightarrow y=۴۰-x$$

در نتیجه $f(x)=x(۴۰-x)$ مساحت مستطیل. بنابراین باید بیشترین مقدار ممکن تابع $=xy=x(۴۰-x)$ را به‌دست بیاوریم. توجه کنید که

$$f'(x)=۴۰-۲x\ ,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۲۰$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر، به‌ازای $x=۲۰$ به‌دست می‌آید و برابر است با $f(۲۰)=۴۰۰$.

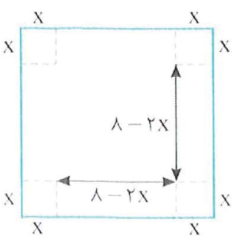
تست ۴ با مقوایی مربعی به طول ضلع ۸ ، جعبه‌ای بدون در درست می‌کنیم. حجم این جعبه حداکثر چقدر است؟

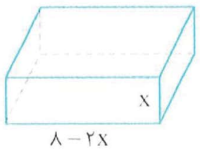
۱) ۳۲ ۲) $\frac{۵۱۲}{۲۷}$ ۳) ۶۴ ۴) $\frac{۱۰۲۴}{۲۷}$

راه‌حل فرض می‌کنیم از هر گوشهٔ مربع، باید مربعی به طول ضلع x جدا کنیم (شکل روبه‌رو را ببینید). در این صورت حجم جعبه برابر است با $x(۸-۲x)^۲$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x(۸-۲x)^۲$ را پیدا کنیم $(۰<x<۴)$. توجه کنید که

$$f'(x)=(۸-۲x)^۲-۴x(۸-۲x)=(۸-۲x)(۸-۲x-۴x)=(۸-۲x)(۸-۶x)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}\ ,\quad x=۴\ (\text{غ.ق.ق.})$$





در نتیجه، بیشترین مقدار ممکن برای تابع f ، یعنی بیشترین مقدار ممکن حجم جعبهٔ مورد نظر، به‌ازای $x=\frac{۴}{۳}$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(\frac{۴}{۳})=\frac{۱۰۲۴}{۲۷}$$

تست ۵

اگر P نقطه‌ای روی نمودار تابع $g(x)=\sqrt{x+1}$ باشد، حداقل فاصلهٔ نقطهٔ P تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

راه‌حل

فرض کنید طول نقطهٔ P برابر x باشد $(x\geq -1)$. در این صورت عرض نقطهٔ P برابر $\sqrt{x+1}$ است. به این ترتیب، اگر نقطهٔ O مبدأ مختصات باشد،

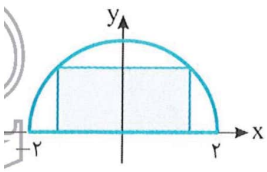
$PO=\sqrt{x^2+(\sqrt{x+1})^2}=\sqrt{x^2+x+1}$. در نتیجه باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}},\quad f'(x)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f، یعنی کمترین مقدار ممکن فاصلهٔ نقطهٔ P تا مبدأ مختصات، به‌ازای $x=-\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $f(-\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

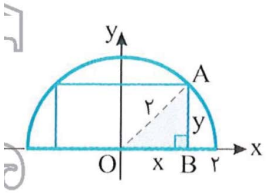
تست ۶

مستطیلی در یک نیم‌دایره به شعاع ۲ محاط شده است و یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره منطبق است. بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟



۱) ۴ ۲) $2\sqrt{2}$
۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{2}$

راه‌حل



در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، y را برحسب x پیدا می‌کنیم: $x^2+y^2=4\Rightarrow y=\sqrt{4-x^2}$

همچنین مساحت مستطیل از رابطهٔ $S=2xy$ به‌دست می‌آید. بنابراین $0<x<2$ ، $S=2xy\Rightarrow S(x)=2x\sqrt{4-x^2}$

می‌خواهیم بیشترین مقدار تابع S را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$S'(x)=2\left(\sqrt{4-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}}\right)=0\Rightarrow\sqrt{4-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0\Rightarrow 4-x^2-x^2=0\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

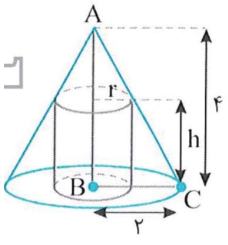
بنابراین بیشترین مقدار S به‌ازای $x=\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$.

تست ۷

استوانه‌ای را درون یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۴ محاط کرده‌ایم. ارتفاع استوانه کدام باشد تا حجم آن بیشترین مقدار شود؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

راه‌حل



حجم استوانه از رابطهٔ $V=\pi r^2h$ به‌دست می‌آید. با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABC می‌توان رابطه‌ای بین r و h به‌دست آورد:

$$\frac{r}{2}=\frac{4-h}{4}\Rightarrow 4-h=2r\Rightarrow h=4-2r$$

اکنون حجم استوانه را برحسب متغیر r می‌نویسیم:

$$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2(4-2r)=2\pi(2r^2-r^3)$$

پس

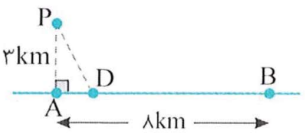
$$V'(r)=2\pi(4r-3r^2)=0\Rightarrow r=\frac{4}{3}\ ,\ r=0\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین بیشترین مقدار حجم استوانه وقتی به‌دست می‌آید که $r=\frac{4}{3}$ و در این صورت ارتفاع آن برابر است با

$$h=4-2r=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

تست ۸

احمد درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک‌ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A، برابر ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطهٔ B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق $2km/h$ و سرعت پیاده‌روی احمد در ساحل $4km/h$ باشد. اگر او بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به B برسد و در نقطهٔ D در ساحل از قایق پیاده شود، طول BD برحسب کیلومتر چقدر است؟



۱) $8-\sqrt{2}$ ۲) $8-\sqrt{3}$ ۳) $8-\sqrt{5}$ ۴) $8-\sqrt{6}$

راه‌حل می‌دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، آن‌گاه $x=vt$. پس $t=\frac{x}{v}$. بنابراین

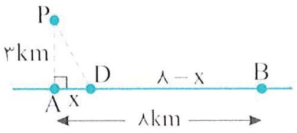
$t_2=\frac{DB}{4}=\frac{8-x}{4}=2-\frac{1}{4}x$: زمان پیاده‌روی مسیر D تا B ، $t_1=\frac{PD}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+9}$: زمان طی شدن مسیر P تا D

$t=t_1+t_2\Rightarrow t(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+9}+(2-\frac{1}{4}x)$: زمان کل رسیدن از P به B

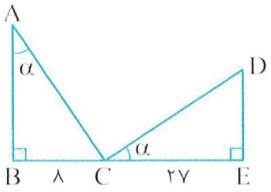
در نتیجه

$t'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{4}=\frac{2x-\sqrt{x^2+9}}{4\sqrt{x^2+9}}$ ، $t'(x)=0\Rightarrow 2x-\sqrt{x^2+9}=0\xrightarrow{x\geq 0}4x^2=x^2+9\Rightarrow x=-\sqrt{3}$ (غ.ق.ق.) ، $x=\sqrt{3}$

پس کمترین مقدار آن به ازای $x=\sqrt{3}$ به‌دست می‌آید. در نتیجه فاصلهٔ DB برحسب کیلومتر برابر $8-\sqrt{3}$ است.



تست ۹ در شکل مقابل اگر AC+CD کمترین مقدار ممکن باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

راه‌حل توجه کنید که

$\triangle ABC:\sin\alpha=\frac{BC}{AC}\Rightarrow AC=\frac{8}{\sin\alpha}$ ، $\triangle CDE:\cos\alpha=\frac{CE}{CD}\Rightarrow CD=\frac{27}{\cos\alpha}$

بنابراین $AC+CD=\frac{8}{\sin\alpha}+\frac{27}{\cos\alpha}$. بنابراین باید مشخص کنیم که وقتی تابع $f(x)=\frac{8}{\sin\alpha}+\frac{27}{\cos\alpha}$ کمترین مقدار ممکن است. مقدار $\tan\alpha$ چقدر است. توجه کنید که

$f'(x)=0\Rightarrow\frac{8\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{27\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{8}{27}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{2}{3}$ ، $f''(x)=\frac{-8\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{27\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$

دست‌گرمی

۲۲۳- اگر $2x-y=a$، کمترین مقدار xy کدام است؟

۱) $\frac{a^2}{8}$ ۲) $\frac{a^2}{4}$ ۳) $-\frac{a^2}{8}$ ۴) $-\frac{a^2}{4}$

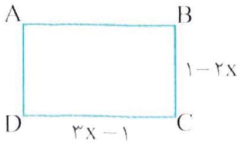
۲۲۴- طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۴ است. بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۲۲۵- کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,0)$ از نقاط منحنی نمودار تابع $y=\sqrt{2x+9}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۶- در شکل مقابل، بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD کدام است؟

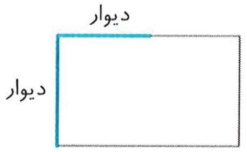


۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{24}$

۱۴۹۱- اگر $۰\leq x\leq ۱$ و $x+y=۴$ ، بیشترین مقدار ممکن xy کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۴۹۲- مطابق شکل مقابل، یک ضلع و نیمی از ضلعی دیگر از باغچه‌ای مستطیلی دیوار است. برای نرده‌کشی دور این باغچه، به ۱۲۰ متر نرده احتیاج داریم. مساحت این باغچه حداکثر چقدر است؟



۱) ۱۸۰۰ ۲) ۲۴۰۰
۳) ۳۰۰۰ ۴) ۴۲۰۰

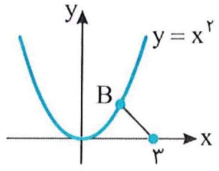
۱۴۹۳- اگر مجموع محیط‌های دو دایره برابر ۱۰π باشد، حداقل مقدار ممکن برای مجموع مساحت‌های آن‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۱۰\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۵۰\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲۵\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲۵\pi}{۴}$

۱۴۹۴- مقدار x کدام باشد تا فاصلهٔ نقطه‌های $(x,۳)$ و $(۳x,x+۶)$ کمترین مقدار ممکن شود؟

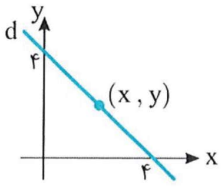
۱) -۱ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

۱۴۹۵- عرض نزدیک‌ترین نقطه مانند B روی نمودار تابع $y=x^۲$ به نقطهٔ $A(۳,۰)$ کدام است؟



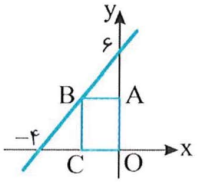
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۲

۱۴۹۶- در شکل روبه‌رو (x,y) نقطه‌ای روی خط راست d در ناحیهٔ اول است. کمترین مقدار ممکن $x^۲+y^۲$ کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۸
۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۴۹۷- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل $OABC$ کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۶
۳) ۸ ۴) ۹

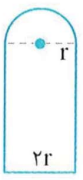
۱۴۹۸- می‌خواهیم مخزن بدون دری به شکل مکعب مستطیل بسازیم که حجم آن $۱۰m^۳$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود؟

۱) $\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}}$ ۲) $\sqrt[۳]{\frac{۵}{۲}}$ ۳) $\sqrt[۳]{\frac{۷}{۲}}$ ۴) $\sqrt[۳]{\frac{۹}{۲}}$

۱۴۹۹- هزینهٔ سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $۴v^۲$ واحد است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۲۰۰۰ واحد است. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینهٔ آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۵}$ ۳) $۸\sqrt{۵}$ ۴) $۱۰\sqrt{۵}$

۱۵۰۰- اگر محیط پنجره‌ای به شکل زیر که از یک مستطیل و یک نیم‌دایره تشکیل شده است، ۹ متر باشد، مقدار r کدام باشد تا پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد؟



۱) $\frac{۳}{\pi+۴}$ ۲) $\frac{۹}{۲\pi+۸}$
۳) $\frac{۳}{\pi+۲}$ ۴) $\frac{۹}{\pi+۴}$

آزمون ۱۵۱ — بهینه‌سازی (۲)

سؤال	گام
۱۵۰۱	۲۱۰ ۲۱۷ ۲۱۹
۱۵۰۲	۲۱۰ ۲۱۸ ۲۱۹
۱۵۰۳	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۱۵۰۴	۲۱۰ ۲۱۹
۱۵۰۵	۲۵ ۱۰۴ ۱۸۷ ۲۱۹
۱۵۰۶	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۱۵۰۷	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۱۵۰۸	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۱۵۰۹	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۱۵۱۰	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹

۱۵۰۱- اگر $\frac{۱}{۲}\le x\le ۳$ و $xy=۴$، کمترین مقدار ممکن $x+y$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۴

۱۵۰۲- اگر $x-y=۲$، کمترین مقدار ممکن $x^۳-y^۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

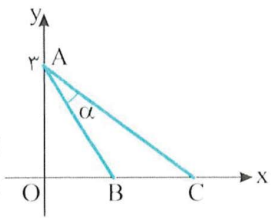
۱۵۰۳- می‌خواهیم دور زمینی مستطیلی به مساحت ده هزار مترمربع را نرده بکشیم. هزینهٔ نرده‌کشی در امتداد شمال - جنوب هر متر ۱۵ هزار تومان و در امتداد شرق - غرب هر متر ۶۰ هزار تومان است. اگر کمترین هزینهٔ ممکن را پرداخت کرده باشیم، محیط این زمین کدام است؟

۱) ۵۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۷۵۰۰ ۴) ۱۰۰۰۰

۱۵۰۴- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+x-(m^۲+m+۱)=۰$ باشند، بیشترین مقدار ممکن $x_۱^۳+x_۲^۳$ کدام است؟

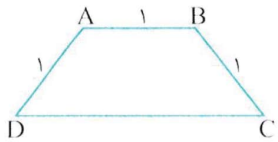
۱) $-\frac{۱۳}{۴}$ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۱۱}{۴}$ ۴) -۳

۱۵۰۵- در شکل مقابل $OB=BC$ و $\tan\alpha$ بیشترین مقدار ممکن است. طول پاره‌خط OB کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

۱۵۰۶- در ذوزنقهٔ شکل مقابل طول قاعدهٔ CD چقدر باشد تا مساحت ذوزنقه بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد؟

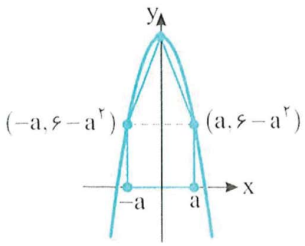


۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۱۵۰۷- می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و بدون در بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۲ لیتر باشد. شعاع قاعدهٔ استوانه برحسب سانتی‌متر چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

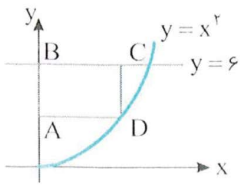
۱) $\sqrt[۳]{\frac{۴۰۰۰}{\pi}}$ ۲) $\sqrt[۳]{\frac{۲۰۰}{\pi}}$ ۳) $\sqrt[۳]{\frac{۲۰۰۰}{\pi}}$ ۴) $\sqrt[۳]{\frac{۴۰۰}{\pi}}$

۱۵۰۸- مطابق شکل مقابل، دو رأس از یک پنج‌ضلعی روی محور طول‌ها، یک رأس آن روی رأس سهمی به معادلهٔ $y=۶-x^۲$ و دو رأس دیگر آن روی قسمتی از سهمی که بالای محور طول‌هاست، قرار دارند. بیشترین مقدار ممکن مساحت پنج‌ضلعی کدام است؟



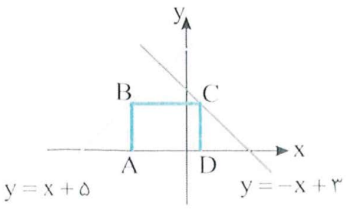
۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۵۰۹- در شکل مقابل، بیشترین مقدار محیط مستطیل ABCD کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۲}$ ۲) $\frac{۲۷}{۲}$ ۳) $\frac{۲۹}{۲}$ ۴) $\frac{۳۱}{۲}$

۱۵۱۰- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

آزمون ۱۵۲ بهینه‌سازی (۳)

۱۵۱۱- y عددی منفی است و $x+y=۴$. بیشترین مقدار ممکن $x^۲+y^۳$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲

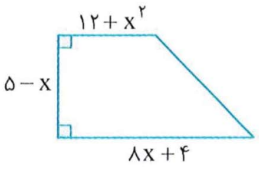
۱۵۱۲- اگر $۲x+y=۸$، بیشترین مقدار ممکن $xy^۳$ کدام است؟

۱) ۲۰۸ ۲) ۲۱۲ ۳) ۲۱۶ ۴) ۲۲۴

۱۵۱۳- P نقطه‌ای روی سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۵x$ و زیر محور x است. مجموع مختصات نقطهٔ P حداقل کدام است؟

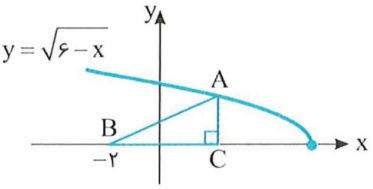
۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) -۶

۱۵۱۴- بیشترین مقدار ممکن مساحت ذوزنقهٔ شکل مقابل کدام است؟



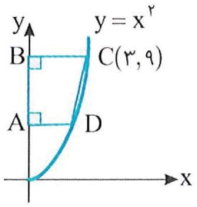
۱) ۵۴
۲) ۴۸
۳) ۴۵
۴) ۳۶

۱۵۱۵- در شکل مقابل اگر مساحت مثلث ABC بیشترین مقدار ممکن باشد، طول نقطهٔ C کدام است؟



۱) ۳ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۴

۱۵۱۶- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

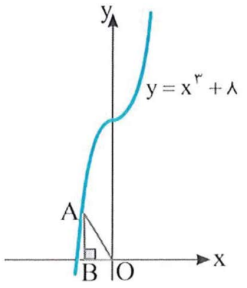
۱۵۱۷- اگر طول وتر مثلثی قائم‌الزاویه برابر ۲ باشد، بیشترین مقدار ممکن مساحتش کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۵۱۸- نزدیک‌ترین نقطه روی خط $y=۴x+۲$ به مبدأ مختصات کدام نقطه است؟

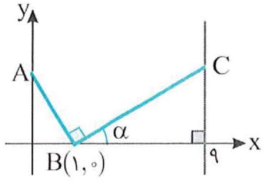
۱) $(-\frac{۱}{۴},۱)$ ۲) $(-\frac{۸}{۱۷},\frac{۲}{۱۷})$ ۳) $(-\frac{۳}{۱۷},\frac{۲۲}{۱۷})$ ۴) $(-\frac{۵}{۴},-۳)$

۱۵۱۹- در شکل مقابل، بیشترین مقدار ممکن مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB کدام است؟



۱) $۲\sqrt[۳]{۲}$
۲) $۳\sqrt[۳]{۲}$
۳) $\sqrt[۳]{۳}$
۴) $۳\sqrt[۳]{۳}$

۱۵۲۰- در شکل مقابل اگر $AB+BC$ کمترین مقدار ممکن باشد، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

سؤال
۱۵۱۱ ۱۵۱۲ ۱۵۱۳ ۱۵۱۴ ۱۵۱۵ ۱۵۱۶ ۱۵۱۷ ۱۵۱۸ ۱۵۱۹ ۱۵۲۰

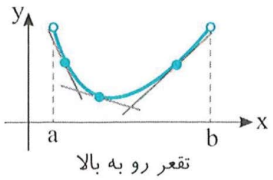
درس ششم: جهت تقعر

تعریف

۲۲۰

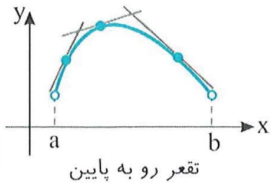
فرض کنید نمودار تابع f در هر نقطه از بازهٔ (a,b) خط مماس داشته باشد.

اگر خطوط مماس بر نمودار تابع f در هر نقطه از بازهٔ (a,b) زیر آن قرار گیرند، می‌گوییم جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به بالاست.



تقعر رو به بالا

اگر خطوط مماس بر نمودار تابع f در هر نقطه از بازهٔ (a,b) بالای آن قرار گیرند، می‌گوییم جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.



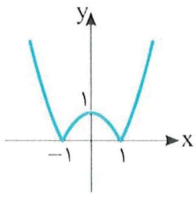
تقعر رو به پایین

تست ۱

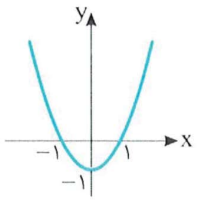
جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ چند بار تغییر می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

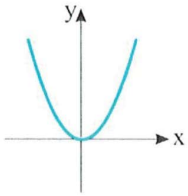
راه‌حل نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



$y=|x^۲-۱|$



$y=x^۲-۱$



$y=x^۲$

جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-۱)$ رو به بالا، روی بازهٔ $(-۱,۱)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ رو به بالاست. پس دوبار جهت تقعر نمودار تابع f تغییر کرده است.

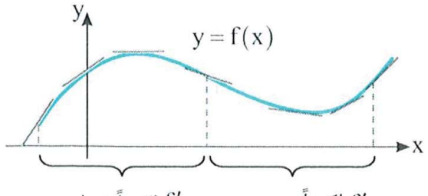
نکته

۲۲۱

فرض کنید تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

اگر تابع f' روی بازهٔ (a,b) اکیداً صعودی باشد، جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به بالاست.

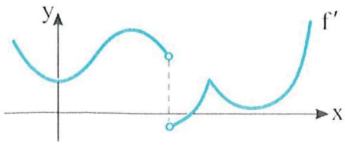
اگر تابع f' روی بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی باشد، جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.



تست ۲

نمودار تابع f' به شکل مقابل است. جهت تقعر نمودار تابع f چند بار تغییر می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



راه‌حل تابع f' در پنج نقطه از حالت صعودی به نزولی یا برعکس تغییر کرده است. پس جهت تقعر نمودار تابع f در این پنج نقطه تغییر می‌کند.

قضیه

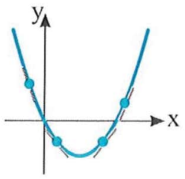
۲۲۲

فرض کنید تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق دوم داشته باشد.

۱) اگر به‌ازای هر x از بازهٔ (a,b)، $f''(x)>۰$، آن‌گاه جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به بالاست.

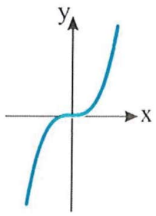
۲) اگر به‌ازای هر x از بازهٔ (a,b)، $f''(x)<۰$، آن‌گاه جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

مثال: ● فرض کنید $f(x)=x^2-2x$. در این صورت $f'(x)=2x-2 \Rightarrow f''(x)=2>0$



علامت $f''(x)$ همواره مثبت است، پس جهت تقعر نمودار تابع روی $\mathbb{R}$ رو به بالاست.

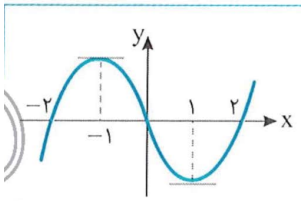
● فرض کنید $f(x)=x^3$. در این صورت $f'(x)=3x^2 \Rightarrow f''(x)=6x$



روی بازهٔ $(-\infty,0)$ علامت $f''(x)$ منفی است و جهت تقعر نمودار تابع رو به پایین است. روی بازهٔ $(0,+\infty)$ علامت $f''(x)$ مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع رو به بالاست.

تست ۳

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f'(x)f''(x)<0$ کدام است؟



۱) $(-\infty,1)$
۲) $(-1,+\infty)$
۳) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
۴) $(-1,0)$

راه‌حل توجه کنید تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی این بازه‌ها $f'(x)>0$ و روی بازهٔ $(-1,1)$ اکیداً نزولی است، پس روی این بازه $f'(x)<0$. همچنین، جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,0)$ رو به پایین است، پس روی این بازه $f''(x)<0$ و روی بازهٔ $(0,+\infty)$ رو به بالاست، پس روی این بازه $f''(x)>0$. بنابراین جدول زیر به‌دست می‌آید.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

از روی این جدول معلوم است که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ است.

تست ۴

جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^4-6x^2+4x+5$ روی کدام بازه رو به پایین است؟

۱) $(-1,1)$
۲) $(0,2)$
۳) $(-2,2)$
۴) $(-1,2)$

راه‌حل چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، روی بازه‌هایی که تابع f'' منفی است، جهت تقعر نمودار تابع f رو به پایین است. اکنون توجه کنید که $f'(x)=4x^3-12x+4$ و $f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$. بنابراین

$$f''(x)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

در نتیجه

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-1,1)$ رو به پایین است.

تست ۵

جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$ روی بازهٔ $(-a,a)$ رو به پایین است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) ۲

راه‌حل مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+4)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2(x^2+4)^2+8x^2(x^2+4)}{(x^2+4)^4}=\frac{6x^2-8}{(x^2+4)^3} \quad , \quad f''(x)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

با توجه به جدول زیر، جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})$ رو به پایین است. پس بیشترین مقدار a برابر $\frac{2}{\sqrt{3}}$ است.

x	$-\infty$		$\frac{-2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

۲۲۳

نکته

اگر مشتق دوم تابع f روی بازهٔ (a,b) نامنفی باشد، یعنی $f''(x)\geq 0$ و نقاطی از این بازه که مشتق دوم تابع f در آنها برابر صفر است یک یا چند بازه تشکیل ندهند، باز هم جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ (a,b) رو به بالاست. همچنین، اگر مشتق دوم تابع f روی بازهٔ (a,b) نامثبت باشد، یعنی $f''(x)\leq 0$ و نقاطی از این بازه که مشتق دوم تابع در آنها برابر صفر است یک یا چند بازه تشکیل ندهند، جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ (a,b) رو به پایین است.

تست ۶

مجموعهٔ مقادیری از m جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=2x^4+2mx^3+3x^2$ روی $\mathbb{R}$ رو به بالاست کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[-2,0)$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $(-2,2)$

راه‌حل

باید مشتق دوم تابع روی $\mathbb{R}$ نامنفی باشد. پس $f'(x)=8x^3+6mx^2+6x \Rightarrow f''(x)=24x^2+12mx+6=6(4x^2+2mx+1)\geq 0$

در نتیجه باید $\Delta\leq 0 \Rightarrow 4m^2-16\leq 0 \Rightarrow m^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq m\leq 2$

تست ۷

جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^4}{x^3+2}$ روی بازهٔ (a,b) رو به بالاست. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) $-\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{4}$ ۳) $-\sqrt[3]{4}$ ۴) صفر

راه‌حل

توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt[3]{2}\}$ و

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3+2)-3x^2\times x^4}{(x^3+2)^2}=\frac{x^6+8x^3}{(x^3+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(6x^5+24x^2)(x^3+2)^2-(2)(3x^2)(x^3+2)(x^6+8x^3)}{(x^3+2)^4}=\frac{12x^2(-x^3+4)}{(x^3+2)^3}\quad ,\quad f''(x)=0\Rightarrow x=0,\sqrt[3]{4}$$

بنابراین

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		$\sqrt[3]{4}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	ت ن	$+$	0	$+$	0	$-$	

در نتیجه جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ رو به بالاست و کمترین مقدار a برابر $-\sqrt[3]{2}$ است.

تست ۸

جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ روی بازهٔ $(1,+\infty)$ کدام وضع را دارد؟

۱) ابتدا رو به پایین، بعد رو به بالا
۲) ابتدا رو به بالا، بعد رو به پایین
۳) همواره رو به بالا
۴) همواره رو به پایین

راه‌حل

مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم: $f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x)=2-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}=\frac{8\sqrt{x^3}-1}{4\sqrt{x^3}}$

توجه کنید که اگر $x>1$، آن‌گاه $f''(x)>0$ و در نتیجه جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(1,+\infty)$ رو به بالاست.

تست ۹

جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\sin^2 x-2\sin x$ روی بازهٔ $(0,\pi)$ چگونه است؟

۱) رو به بالا
۲) رو به پایین
۳) ابتدا رو به بالا سپس رو به پایین
۴) ابتدا رو به پایین سپس رو به بالا

راه‌حل

مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\sin^2 x-2\sin x \Rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x-2\cos x=\sin 2x-2\cos x$$

$$f''(x)=2\cos 2x+2\sin x=2(1-2\sin^2 x)+2\sin x=-4\sin^2 x+2\sin x+2=2(1-\sin x)(1+2\sin x)$$

روی بازهٔ $(0,\pi)$ می‌دانیم $0<\sin x\leq 1$، پس $f''(x)\geq 0$. بنابراین جهت تقعر نمودار تابع روی این بازه رو به بالاست.

تست ۱۰ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲}{۲}+\cos x$ در اطراف نقطهٔ به طول $\frac{\pi}{۲}$ چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

راه‌حل مقادیر مشتق اول و مشتق دوم تابع را در این نقطه پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=x-\sin x \Rightarrow f''(x)=۱-\cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi}{۲}-۱>۰\ ,\quad f''(\frac{\pi}{۲})=۱-۰=۱>۰$$

بنابراین تابع در اطراف نقطهٔ به طول $\frac{\pi}{۲}$ صعودی است و جهت تقعر نمودار آن رو به بالاست، پس گزینهٔ (۲) درست است.

دست‌گرمی

۲۲۷- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۲x|$ چند بار تغییر می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۸- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^۴-۶x^۲+x-۱$ روی بازهٔ (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۹- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲+۱۲}$ روی بازهٔ $(-a,a)$ رو به پایین است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۰- مجموعهٔ مقادیری از m جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=۲x^۴-۲mx^۳+۳x^۲$ روی $\mathbb{R}$ رو به بالاست کدام است؟

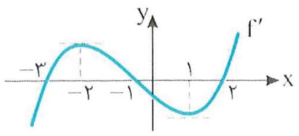
۱) $-۲\le m\le ۲$ ۲) $m\ge ۲$ ۳) $m\le -۲$ ۴) $۰\le m\le ۲$

۲۳۱- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^۲+\sqrt{x}$ روی بازهٔ $(۰,۱)$ کدام وضع را دارد؟

۱) ابتدا رو به پایین، بعد رو به بالا
۲) ابتدا رو به بالا، بعد رو به پایین
۳) همواره رو به بالا
۴) همواره رو به پایین

آزمون ۱۵۳ جهت تقعر (۱)

۱۵۲۱- نمودار تابع مشتق تابع f در شکل مقابل رسم شده است. جهت تقعر نمودار تابع f روی کدام بازه رو به پایین است؟



۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $(-۲,۲)$

۳) $(-\infty,-۲)$ ۴) $(-۲,۱)$

۱۵۲۲- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x-۲}$ چگونه است؟

۱) همواره رو به بالاست. ۲) همواره رو به پایین است.

۳) ابتدا رو به بالا سپس رو به پایین است. ۴) ابتدا رو به پایین سپس رو به بالاست.

۱۵۲۳- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۴+۲x^۳-۹x^۲+x-۱$ روی بازهٔ $(-\infty,a)$ رو به بالاست. بیشترین مقدار ممکن a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۵۲۴- اگر جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^۴-۲x^۳+mx^۲+x-۴$ روی $\mathbb{R}$ رو به بالا باشد. حدود مقادیر m کدام است؟

۱) $m\geq\frac{۳}{۲}$ ۲) $m\leq\frac{۳}{۲}$ ۳) $m>\frac{۳}{۲}$ ۴) $m<\frac{۳}{۲}$

۱۵۲۵- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲+۳}$ روی کدام بازه رو به بالاست؟

۱) $(-۳,-۲)$ ۲) $(۲,۳)$ ۳) $(-۲,۲)$ ۴) $(-۱,۱)$

۱۵۲۶- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x^۲-x+m}{x-۱}$ روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ رو به بالاست. حدود m کدام است؟

۱) $m>۱$ ۲) $m>-۱$ ۳) $m<-۱$ ۴) $m<۱$

۱۵۲۷- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲\sqrt{x}$ روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ چگونه است؟

۱) رو به بالاست. ۲) رو به پایین است.

۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است. ۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

۱۵۲۸- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x+\cos x$ روی کدام بازه رو به بالاست؟

۱) $(۰,\frac{\pi}{۲})$ ۲) $(۰,\pi)$ ۳) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ ۴) $(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$

۱۵۲۹- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=۲x^۲+۳\sin x$ چند بار تغییر می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

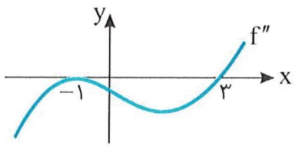
۱۵۳۰- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\cos x-\sin x$ روی کدام بازه رو به پایین است؟

۱) $(۰,\frac{\pi}{۴})$ ۲) $(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴})$ ۳) $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ ۴) $(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$

سؤال	گام
۱۵۲۱	۲۲۱
۱۵۲۲	۲۲۲ ۳۱۵
۱۵۲۳	۲۲۲ ۳۱۲
۱۵۲۴	۲۲۳ ۳۱۳
۱۵۲۵	۲۲۲ ۳۱۲
۱۵۲۶	۲۲۲ ۳۱۶
۱۵۲۷	۲۲۲ ۳۱۶
۱۵۲۸	۷۵ ۲۲۲
۱۵۲۹	۷۵ ۲۲۲
۱۵۳۰	۸۰ ۲۲۲

آزمون ۱۵۴ جهت تقعر (۲)

۱۵۳۱- نمودار تابع مشتق دوم تابع f در شکل مقابل رسم شده است. روی کدام بازه جهت تقعر نمودار تابع f رو به بالاست؟



۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $(۳,+\infty)$

۳) $(-۱,۳)$ ۴) $(-\infty,۳)$

۱۵۳۲- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۴-\frac{۷}{۶}x^۳+x^۲-x+۱$ روی کدام بازه رو به بالاست؟

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(\frac{۲}{۳},۳)$ ۴) $(\frac{۱}{۲},۱)$

۱۵۳۳- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۴}{۱۲}-\frac{۲x^۳}{۳}-۶x^۲+۵x+۴$ روی بازهٔ (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۵۳۴- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳-x^۲ & x\geq ۰ \\ x^۳+x^۲ & x<۰ \end{cases}$ چند بار عوض می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۳۵- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax-۱}{x+a}$ روی بازهٔ $(-\infty,\frac{-۱}{a})$ رو به بالا و روی بازهٔ $(\frac{-۱}{a},+\infty)$ رو به پایین است. مقدار a کدام است؟

۱) فقط ۱ ۲) فقط -۱ ۳) ± ۱ ۴) $\pm\frac{۱}{۲}$

۱۵۳۶- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{x\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}}$ روی دامنه‌اش چگونه است؟

۱) رو به بالاست. ۲) به سمت پایین است.

۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است. ۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

۱۵۳۷- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ چگونه است؟

۱) رو به بالاست. ۲) رو به پایین است.

۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است. ۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

۱۵۳۸- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=۲\sqrt{x}+۲\sqrt{۲-x}$ روی بازهٔ $(۰,۲)$ چگونه است؟

۱) رو به بالاست. ۲) رو به پایین است.

۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است. ۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

۱۵۳۹- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\sin^۲ x+۲\sin x$ روی بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ چگونه است؟

۱) رو به بالاست. ۲) رو به پایین است.

۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است. ۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

۱۵۴۰- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\tan^۲ x$ روی بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ چگونه است؟

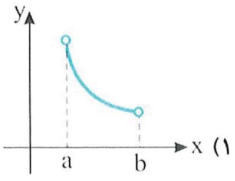
۱) رو به بالاست. ۲) رو به پایین است.

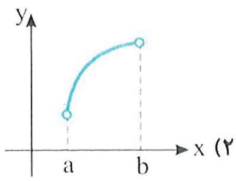
۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است. ۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

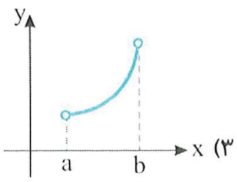
سؤال
۱۵۳۱
۱۵۳۲
۱۵۳۳
۱۵۳۴
۱۵۳۵
۱۵۳۶
۱۵۳۷
۱۵۳۸
۱۵۳۹
۱۵۴۰

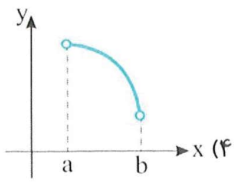
آزمون ۱۵۵ جهت تقعر (۳)

۱۵۴۱- اگر مشتق اول و مشتق دوم تابع f روی بازهٔ (a,b) هر دو مثبت باشند، نمودار تابع f به کدام شکل ممکن است باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۵۴۲- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^5-5x^4+x-1$ روی کدام بازه رو به پایین است؟

۱) $(3,+\infty)$ ۲) $(-\infty,3)$ ۳) $(-5,5)$ ۴) $(0,+\infty)$

۱۵۴۳- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=2x^4-mx^3+3x^2+x+1$ همواره رو به بالاست. حدود m کدام است؟

۱) $-2\le m\le 2$ ۲) $-4\le m\le 4$ ۳) $m\ge 2$ ۴) $m\le -4$

۱۵۴۴- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^3+x & x\ge 0 \\ x^3-x & x<0 \end{cases}$ چند بار عوض می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵۴۵- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2}$ روی دامنه‌اش چگونه است؟

۱) همواره رو به بالاست.
۲) همواره رو به پایین است.
۳) ابتدا رو به بالا سپس رو به پایین است.
۴) ابتدا رو به پایین سپس رو به بالاست.

۱۵۴۶- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{4\sqrt{x}}$ روی بازهٔ $(a,+\infty)$ رو به بالاست. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۵۴۷- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^2+\sqrt[3]{3x}$ روی بازهٔ (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۱

۱۵۴۸- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=3\sqrt[3]{x}-x^2$ روی بازهٔ $(0,+\infty)$ چگونه است؟

۱) رو به بالاست.
۲) رو به پایین است.
۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.
۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

۱۵۴۹- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^2-2\sin x$ چند بار تغییر می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵۵۰- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x\sin x+2\cos x$ روی بازهٔ $(0,\pi)$ چگونه است؟

۱) رو به بالاست.
۲) رو به پایین است.
۳) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین است.
۴) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

سؤال	گام
۱۵۴۱	۲۰۸ ۲۲۲
۱۵۴۲	۲۲۲
۱۵۴۳	۲۲۳ ۳۱۳
۱۵۴۴	۱۹۴ ۲۲۲
۱۵۴۵	۲۲۲
۱۵۴۶	۲۲۲ ۳۱۶
۱۵۴۷	۲۲۲ ۳۱۶
۱۵۴۸	۲۲۲ ۳۱۶
۱۵۴۹	۷۵ ۲۲۲
۱۵۵۰	۷۵ ۲۲۲

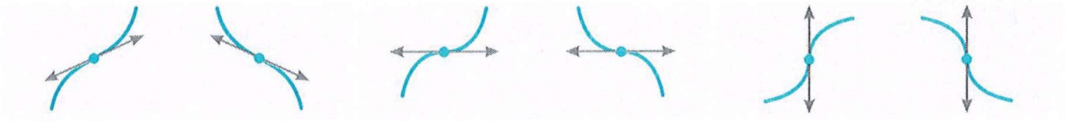
درس هفتم: نقطهٔ عطف

تعریف

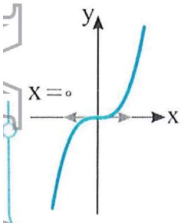
نقطهٔ $(c,f(c))$ را نقطهٔ عطف نمودار تابع f می‌نامیم، اگر و تنها اگر تابع در این نقطه خط مماس داشته باشد و جهت تقعر نمودار تابع در این نقطه تغییر کند.

برخی حالت‌های ممکن برای نمودار تابع در اطراف نقطهٔ عطف به شکل‌های زیر است:

$f'(c)=+\infty$ یا $f'(c)=-\infty$	$f'(c)=0$	$f'(c)\neq 0$
$f''(c)$ ناموجود	$f''(c)=0$	$f''(c)=0$



مثال: به نمودار تابع $f(x)=x^3$ توجه کنید. جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,0)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(0,+\infty)$ رو به بالاست. همچنین نمودار در این نقطه خط مماس دارد، پس در نقطهٔ به طول نقطهٔ عطف دارد.



تذکر وقتی می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $(c,f(c))$ خط مماس دارد، یعنی در این نقطه مشتق متناهی دارد یا در این نقطه پیوسته است و مشتق نامتناهی دارد.

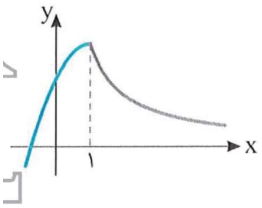
تست ۱

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+2 & x\leq 1\\ \frac{3}{x} & x>1\end{cases}$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. توجه کنید که جهت تقعر نمودار تابع f فقط در نقطهٔ به طول $x=1$ عوض می‌شود، اما نمودار تابع f در این نقطه خط مماس ندارد. در حقیقت،



$$f'(x)=\begin{cases}-2x+2 & x<1\\ -\frac{3}{x^2} & x>1\end{cases}$$

پس $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-2x+2)=0$ و $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-\frac{3}{x^2})=-3$، یعنی $f'_-(1)\neq f'_+(1)$. بنابراین نمودار تابع f نقطهٔ عطف ندارد.

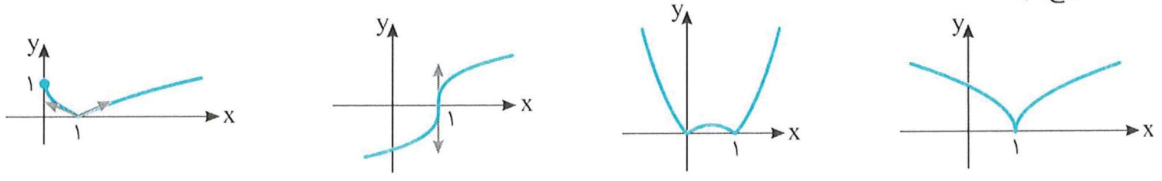
تست ۲

نمودار کدام تابع در نقطهٔ به طول $x=1$ نقطهٔ عطف دارد؟

۱) $y=\sqrt{|x-1|}$ ۲) $y=|x^2-x|$ ۳) $y=\sqrt[3]{x-1}$ ۴) $y=|\sqrt{x}-1|$

راه‌حل

به نمودار این توابع توجه کنید:



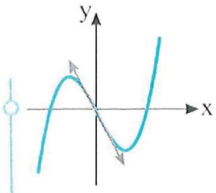
$y=|\sqrt{x}-1|$ $y=\sqrt[3]{x-1}$ $y=|x^2-x|$ $y=\sqrt{|x-1|}$

در تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$، در نقطهٔ $x=1$ جهت تقعر نمودار تغییر می‌کند و خط مماس بر نمودار وجود دارد. پس نقطهٔ به طول $x=1$ نقطهٔ عطف نمودار تابع است.

تذکر وقتی می‌گوییم جهت تقعر نمودار تابع f در نقطهٔ $(c, f(c))$ تغییر می‌کند، یعنی علامت $f''(x)$ در دو طرف $x=c$ یکسان نیست.

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^3-2x$ در مبدأ مختصات نقطهٔ عطف دارد، زیرا

$$f'(x)=3x^2-2 \Rightarrow f'(0)=-2$$



بنابراین تابع در این نقطه خط مماس دارد. همچنین $f''(x)=6x$. پس علامت مشتق دوم تابع در نقطهٔ $x=0$ تغییر می‌کند، یعنی جهت تقعر نمودار تابع در این نقطه عوض می‌شود.

تست ۳ نمودار تابع $f(x)=x^7-x^4$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل چون تابع f همه‌جا دو بار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطه‌های عطف نمودار تابع، آن جواب‌هایی از معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که تابع f' در آنها تغییر علامت می‌دهد. اکنون توجه کنید که $f''(x)=0 \Rightarrow x=0, x=\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ ،

$$f'(x)=7x^6-4x^3 \Rightarrow f''(x)=42x^5-12x^2=6x^2(7x^3-2)$$

بنابراین

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cap$		$\cap$	نقطهٔ عطف	$\cup$	

در نتیجه، نمودار تابع f فقط یک نقطهٔ عطف دارد.

تست ۴ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ و

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-2)^2-2x^3(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{x^3-6x^2}{(x-2)^3} \Rightarrow f''(x)=\frac{(3x^2-12x)(x-2)^3-(x^3-6x^2)\times 3(x-2)^2}{(x-2)^6}=\frac{24x}{(x-2)^4}$$

بنابراین

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	ت ن	$+$	
f		$\cap$	نقطهٔ عطف	$\cup$		$\cup$	

در نتیجه جهت تقعر نمودار تابع f فقط در نقطهٔ به طول $x=0$ عوض می‌شود و چون در این نقطه خط مماس بر نمودار تابع هم وجود دارد، پس این نقطه تنها نقطهٔ عطف نمودار تابع f است.

تست ۵ اگر نمودار تابع $f(x)=-x^4+2x^3+2(m-2)x^2+4$ نقطهٔ عطف نداشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $[-\frac{5}{4}, +\infty)$ ۲) $[\frac{5}{4}, +\infty)$ ۳) $(-\infty, -\frac{5}{4}]$ ۴) $(-\infty, \frac{5}{4}]$

راه‌حل چون تابع f همه‌جا دو بار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطه‌های عطف نمودار تابع، آن جواب‌هایی از معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که تابع f' در آنها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین، چون نمودار تابع f نقطهٔ عطف ندارد، معادلهٔ $f''(x)=0$ یا جواب ندارد یا ریشهٔ مضاعف دارد. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=-4x^3+6x^2+4(m-2)x \Rightarrow f''(x)=-12x^2+12x+4(m-2)$$

در نتیجه

$$\Delta \le 0 \Rightarrow 12^2-4\times(-12)\times 4(m-2)\le 0 \Rightarrow m \le \frac{5}{4}$$

تست ۶ نمودار تابع $f(x)=x-\cos x$ روی بازهٔ $(0,6\pi)$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

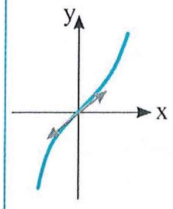
۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

راه‌حل توجه کنید که $f'(x)=1+\sin x \Rightarrow f''(x)=\cos x$, $f''(x)=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}) \xrightarrow{x\in(0,6\pi)} x\in\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ldots,\frac{11\pi}{2}\}$

در همسایگی هر یک از نقاط بالا، علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند، پس نمودار تابع f، شش نقطهٔ عطف دارد.

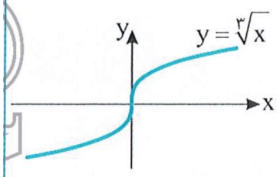
نکته ۲۲۵

۱) خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ عطف، از نمودار عبور می‌کند. یعنی قسمتی از خط مماس بر نمودار تابع زیر نمودار و قسمتی از آن بالای نمودار قرار می‌گیرد.



۲) لزومی ندارد تابع در نقطهٔ عطف خود مشتق دوم داشته باشد.

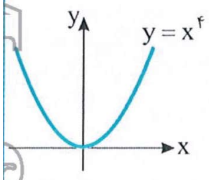
مثلاً تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در نقطهٔ $x=0$ نقطهٔ عطف دارد ولی در این نقطه مشتق دوم ندارد.



۳) در نقطهٔ عطف، اگر مشتق دوم وجود داشته باشد، برابر صفر است.

۴) هر نقطه که مشتق دوم تابع در آن برابر صفر باشد، لزوماً طول نقطهٔ عطف نیست.

مثلاً مشتق دوم تابع $f(x)=x^4$ در $x=0$ برابر صفر است ولی این نقطه طول نقطهٔ عطف نمودار تابع نیست:

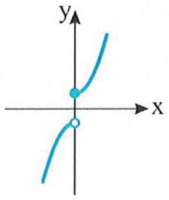


$$f'(x)=4x^3 \Rightarrow f''(x)=12x^2 \Rightarrow f''(0)=0$$

لازم است در نقطه‌ای که مشتق دوم صفر شده است، f'' تغییر علامت نیز بدهد.

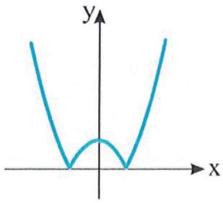
۵) هر نقطه که جهت تقعر نمودار تابع در آن تغییر کند، لزوماً نقطهٔ عطف نیست. این نقطه ممکن است از نقاط ناپیوستگی تابع باشد یا از نقاط مشتق‌ناپذیری تابع باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 0\\ -x^2-1 & x<0\end{cases}$



در $x=0$ نقطهٔ عطف ندارد.

ب) $f(x)=|x^2-1|$



در نقاط $x=1$ و $x=-1$ نقطهٔ عطف ندارد.

تست ۷ اگر طول یکی از نقاط عطف نمودار تابع $f(x)=x^4+ax^3-ax^2+bx+3$ برابر ۱ باشد، طول نقطهٔ عطف دیگر آن کدام است؟

۱) -3 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۶

راه‌حل چون تابع f همه‌جا دو بار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند. از طرف دیگر،

$$f'(x)=4x^3+3ax^2-2ax+b \Rightarrow f''(x)=12x^2+6ax-2a$$

بنابراین $f''(1)=0 \Rightarrow 12+6a-2a=0 \Rightarrow a=-3$

اکنون توجه کنید که چون طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند، پس مجموع آنها برابر است با $\frac{3}{2}=-\frac{6\times(-3)}{12}=-\frac{6a}{12}$. چون یکی از این طول‌ها برابر ۱ است، پس دیگری برابر است با $\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$.

تست ۸ اگر نقطهٔ $(1,5)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=ax^3+bx^2+ax+2$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) -27 ۳) ۹ ۴) -9

راه‌حل چون تابع f همه‌جا دو بار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع جواب $f''(x)=0$ است. از طرف دیگر،

$f'(x)=3ax^2+2bx+a \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$, $f''(1)=0 \Rightarrow 6a+2b=0$ (۱)

از طرف دیگر، چون نقطهٔ عطف، روی نمودار تابع است، پس $f(1)=5 \Rightarrow a+b+a+2=5 \Rightarrow 2a+b=3$ (۲)

اگر دستگاه معادلات (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دست می‌آید $a=-3$ و $b=9$. پس $ab=-27$.

تست ۹

اگر $(-۱,۲)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=ax^۲-۹\sqrt[۳]{x}+b$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

راه‌حل

ابتدا مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۲ax-\frac{۹}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=۲ax-۳x^{-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow f''(x)=۲a+۲x^{-\frac{۵}{۳}}=۲a+\frac{۲}{\sqrt[۳]{x^۵}}$$

مقدار مشتق دوم در نقطهٔ عطف صفر است. ضمناً مختصات نقطهٔ عطف در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} f''(-۱)=۰\Rightarrow ۲a+\frac{۲}{\sqrt[۳]{-۱}}=۰\Rightarrow ۲a=۲\Rightarrow a=۱ \\ f(-۱)=۲\Rightarrow a-۹\sqrt[۳]{-۱}+b=۲\Rightarrow a+b=-۷\xrightarrow{a=۱} b=-۸ \end{cases}$$

در نتیجه $a-b=۹$.

تست ۱۰

اگر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+a & x\le ۱ \\ -x^۲+bx & x>۱ \end{cases}$ نقطهٔ عطف داشته باشد، مقادیر a و b کدام است؟

۱) $a=۲$ و $b=۴$ ۲) $a=۲$ و $b=۲$ ۳) $a=۰$ و $b=۲$ ۴) $a=۱$ و $b=۳$

راه‌حل

چون نمودار سهمی‌های $y=x^۲+a$ و $y=-x^۲+bx$ نقطهٔ عطف ندارند، طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $x=۱$ است. بنابراین تابع در $x=۱$ باید پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و جهت تقعر آن عوض شود. توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+a & x\le ۱ \\ -x^۲+bx & x>۱ \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x & x<۱ \\ -۲x+b & x>۱ \end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases} ۲ & x<۱ \\ -۲ & x>۱ \end{cases}$$

شرط مشتق‌پذیری در $x=۱$: $۲=-۲+b\Rightarrow b=۴$

شرط پیوستگی در $x=۱$: $۱+a=-۱+b\xrightarrow{b=۴} a=۲$

دست‌گرمی

۲۳۲- نمودار کدام تابع نقطهٔ عطف ندارد؟

۱) $y=x^۳$ ۲) $y=\sqrt[۳]{x}$ ۳) $y=|\sin x|$ ۴) $y=\sin|x|$

۲۳۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۵}x^۵-\frac{۱}{۴}x^۴$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^۲-۱}$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۵- نمودار تابع $y=x^۴+ax^۳+۶x^۲$ نقطهٔ عطف ندارد. حدود a کدام است؟

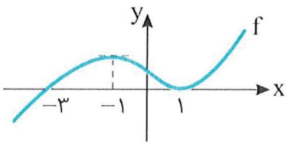
۱) $-۲<a<۲$ ۲) $-۲\le a\le ۲$ ۳) $-۴<a<۴$ ۴) $-۴\le a\le ۴$

۲۳۶- اگر $(۱,۱)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=ax^۳+x^۲+bx+۱$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

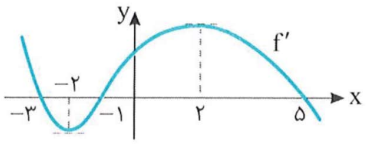
آزمون ۱۵۶ نقطهٔ عطف (۱)

۱۵۵۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نقطهٔ به طول صفر نقطهٔ عطف نمودار تابع است. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $f''(-۲)f'(۰)>۰$
۲) $f''(۲)f'(\frac{۱}{۲})<۰$
۳) $f''(-۲)f'(۲)>۰$
۴) $f''(-۴)f'(۴)<۰$

۱۵۵۲- نمودار تابع مشتق تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۵۵۳- اگر $f''(x)=(x+۱)^۲(x-۲)x$، نمودار تابع f چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۵

۱۵۵۴- نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x^۳-۲x^۲+۶x-۱$ کدام است؟

۱) $(۰,-۱)$
۲) $(-۱,-\frac{۲۹}{۳})$
۳) $(۱,\frac{۱۱}{۳})$
۴) $(\frac{۱}{۲},\frac{۱۹}{۱۲})$

۱۵۵۵- اگر طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=ax^۳-۴x^۲+۴x-۱$ برابر -۲ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) $-\frac{۱}{۴}$

۱۵۵۶- نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۶}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲+a$ روی خط $۲x-۳y+۶=۰$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۲

۱۵۵۷- طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲+۲x+۲ & x\le -۱\\ -x^۲-۲x & x>-۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) تابع f نقطهٔ عطف ندارد.

۱۵۵۸- نمودار تابع $f(x)=x|x|$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۵۵۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

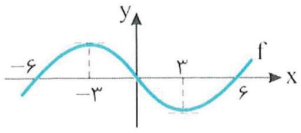
۱۵۶۰- طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}$
۲) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۶}}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۸}}$

سؤال
۱۵۵۱
۱۵۵۲
۱۵۵۳
۱۵۵۴
۱۵۵۵
۱۵۵۶
۱۵۵۷
۱۵۵۸
۱۵۵۹
۱۵۶۰

آزمون ۱۵۷ نقطهٔ عطف (۲)

۱۵۶۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نقطهٔ $(۰,۰)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع f است. تعداد جواب‌های صحیح نامعادلهٔ $f'(x)f''(x)<۰$ در بازهٔ $(-۶,۶)$ کدام است؟

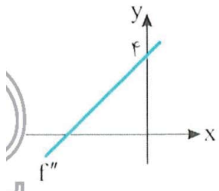


۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵۶۲- تابع f روی $\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر است و $f''(x)=(x-۱)^۳(x+۵)x$. نمودار تابع f چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۶۳- نمودار تابع مشتق دوم تابع $f(x)=۲x^۳-ax^۲+۲$ در شکل مقابل رسم شده است. طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f کدام است؟



۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۵۶۴- مجموع مختصات نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=(x-۳)^۷-۶$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) -۶

۱۵۶۵- اگر $(a,-۴)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+۴x+d$ باشد، مقدار $a+d$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۵۶۶- خط $y-ax+۷=۰$ در نقطهٔ عطف تابع $f(x)=۲x^۳+۶x^۲+x-۵$ بر نمودار این تابع مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) -۲

۱۵۶۷- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳-۶x^۲ & x\geq ۰ \\ x^۲+۶x & x<۰ \end{cases}$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵۶۸- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+ax & x\geq ۱ \\ -x^۲+b & x<۱ \end{cases}$ نقطهٔ عطف دارد. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) -۸

۱۵۶۹- عرض نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=x^۳+۲x^۲-|x|$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۹}$ ۲) $-\frac{۱}{۹}$ ۳) $-\frac{۱}{۲۷}$ ۴) $-\frac{۲}{۲۷}$

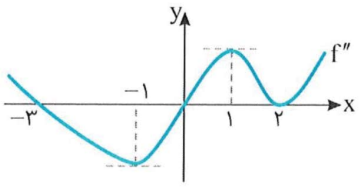
۱۵۷۰- اگر $(۱,۴)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=ax^۲+b\sqrt[۳]{x}$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳۲}{۹}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۶}$ ۳) $-\frac{۱۶}{۵}$ ۴) -۴

سؤال	گام
۱۵۶۱	۲۰۸ ۲۲۰ ۲۲۴
۱۵۶۲	۲۲۴ ۳۱۶
۱۵۶۳	۲۲۴
۱۵۶۴	۲۲۵
۱۵۶۵	۲۲۵
۱۵۶۶	۲۲۵
۱۵۶۷	۱۹۴ ۲۲۴
۱۵۶۸	۱۹۴ ۲۲۴
۱۵۶۹	۱۹۴ ۲۲۴
۱۵۷۰	۲۲۵

آزمون ۱۵۸ نقطهٔ عطف (۳)

۱۵۷۱- نمودار تابع مشتق دوم تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f کدام است؟



۱) صفر
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۳

۱۵۷۲- اگر $f'(x)=x^۳(x-۱)^۲$، نمودار تابع f چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۵۷۳- اگر نقطه‌ای به طول ۱ نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=(x-۲)^۲(x+a)$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) -۲
۴) ۲

۱۵۷۴- اگر $(۲,۱)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=x^۴-ax^۳+ax+۷-b$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) -۲
۲) -۴
۳) -۸
۴) -۱۰

۱۵۷۵- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+(a+۲)x+۲a$ در نقطهٔ عطف نمودار این تابع، با خط $۴x-y+۱۲=۰$ موازی است. مقدار a کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۱۵۷۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۴}{۴}-x^۳+ax^۲$ نقطهٔ عطف دارد. حدود a کدام است؟

۱) $a<\frac{۳}{۲}$
۲) $a<\frac{۲}{۳}$
۳) $a>\frac{۳}{۲}$
۴) $a>\frac{۲}{۳}$

۱۵۷۷- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳-۶x & x\geq ۰ \\ x^۳+۶x & x<۰ \end{cases}$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۵۷۸- نمودار تابع $f(x)=x|x^۳-x|$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۵

۱۵۷۹- طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=x^۲-۴\cos x$ روی بازهٔ $(۰,\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{\pi}{۶}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$
۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

۱۵۸۰- تابع $f(x)=\cos^۲ x+۲\sin x$ با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

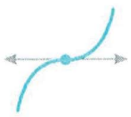
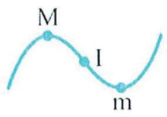
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

سؤال
۱۵۷۱
۱۵۷۲
۱۵۷۳
۱۵۷۴
۱۵۷۵
۱۵۷۶
۱۵۷۷
۱۵۷۸
۱۵۷۹
۱۵۸۰

درس هشتم: رسم نمودار

نمودار تابع چندجمله‌ای درجهٔ سوم

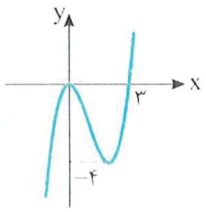
تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ با شرط $a\neq 0$ را تابع **چندجمله‌ای درجهٔ سوم** می‌نامیم. مشتق اول تابع به‌صورت $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ است. Δ را برای تابع مشتق پیدا می‌کنیم: $\Delta=4b^2-12ac=4(b^2-3ac)$. اگر $b^2-3ac\leq 0$، آن‌گاه تابع نقطهٔ **اکسترمم نسبی** ندارد. اگر $b^2-3ac>0$، آن‌گاه تابع یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد. مشتق دوم تابع به‌صورت $f''(x)=6ax+2b$ است. بنابراین تابع همواره یک نقطهٔ عطف دارد که طول آن $x=-\frac{b}{3a}$ است. بنابراین نمودار تابع درجهٔ سوم به یکی از حالت‌های زیر است:

	$b^2-3ac<0$	$b^2-3ac=0$	$b^2-3ac>0$
$a>0$			
$a<0$			

در حالتی که تابع نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد، نقطهٔ عطف وسط پاره‌خطی است که نقاط اکسترمم نسبی را به هم وصل می‌کند. یعنی

$$x_I=\frac{x_M+x_m}{2}\quad ,\quad y_I=\frac{y_M+y_m}{2}$$

مثال: فرض کنید $f(x)=x^3-3x^2$. در این صورت $b^2-3ac=9>0$ و $a>0$. بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. توجه کنید که نمودار تابع f از مبدأ مختصات می‌گذرد، زیرا $f(0)=0$.



تست ۱ اگر مجموع مقادیر ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع $f(x)=x^3-6x^2+x-k$ برابر ۴ باشد، نمودار تابع با چه عرضی محور y را قطع می‌کند؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

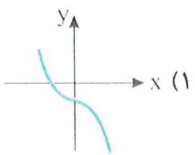
راه‌حل می‌دانیم نقطهٔ عطف وسط پاره‌خطی است که نقاط اکسترمم نسبی را به هم وصل می‌کند و طول این نقطه $\frac{-b}{3a}$ است:

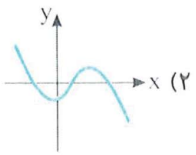
$$x_I=-\frac{b}{3a}=-\frac{-6}{3\times 1}=2\quad ,\quad \frac{y_{max}+y_{min}}{2}=y_I\Rightarrow\frac{4}{2}=y_I\Rightarrow y_I=2$$

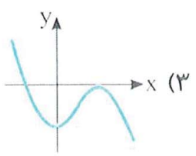
بنابراین عرض نقطهٔ برخورد نمودار تابع با محور y برابر $f(0)$ است:

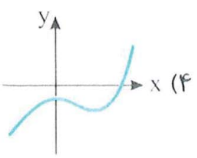
$$f(2)=2\Rightarrow 8-24+2-k=2\Rightarrow k=-16$$
$$f(0)=-k=16$$

تست ۲ نمودار تابع $f(x)=-x^3+3x^2-4$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

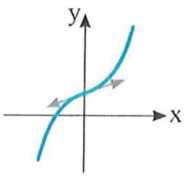
راه‌حل توجه کنید که $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^۳)=+\infty$ ، بنابراین نمودار تابع باید از ناحیهٔ دوم شروع شود. پس گزینهٔ (۴) نادرست است. مشتق اول را به‌دست می‌آوریم و نقاط اکسترمم نسبی را معین می‌کنیم:

$$f'(x)=-۳x^۲+۶x=۳x(۲-x)\ ,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$

بنابراین تابع دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد و گزینهٔ (۱) نادرست است. عرض نقطه‌های اکسترمم نسبی را حساب می‌کنیم: $f(۰)=-۴$ و $f(۲)=۰$.

بنابراین تابع در یکی از نقاط اکسترمم نسبی خود بر محور طول‌ها مماس است، چون عرض نقطهٔ اکسترمم صفر شده است، پس گزینهٔ (۲) نادرست است. پس نمودار تابع به‌صورت گزینهٔ (۳) است.

تست ۳ **نمودار کدام تابع به شکل مقابل است؟**



۱) $y=x^۳+۳x^۲+۲$

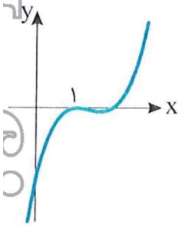
۲) $y=x^۳+۳x-۲$

۳) $y=x^۳-۳x+۲$

۴) $y=x^۳+۳x+۲$

راه‌حل نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,k)$ گذشته است که $k>۰$. بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. طول نقطهٔ عطف تابع صفر است. پس گزینهٔ (۱) نادرست است، زیرا طول نقطهٔ عطف آن $-\frac{b}{۳a}=-۱$ است. در گزینهٔ (۳)، $y'=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm۱$. یعنی تابع دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد، درحالی که نمودار تابع نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد. پس نمودار تابع گزینهٔ (۴) به‌صورت مورد نظر است.

تست ۴ **نمودار تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+bx-۲$ به شکل مقابل است. حاصل ab کدام است؟**



۱) ۹

۲) -۹

۳) ۲۰

۴) -۲۰

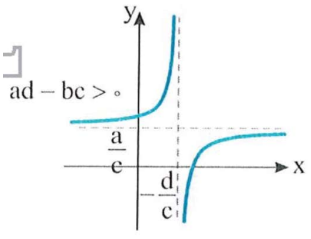
راه‌حل نمودار در نقطهٔ $x=۱$ بر محور طول‌ها مماس شده است. پس در این نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع هر دو صفر هستند:

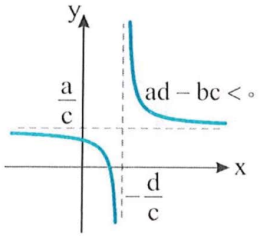
$$f(x)=x^۳+ax^۲+bx-۲\Rightarrow f(۱)=۱+a+b-۲=۰\ ,\quad f'(x)=۳x^۲+۲ax+b\Rightarrow f'(۱)=۳+۲a+b=۰$$

$$\begin{cases}a+b=۱\\ ۲a+b=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۴\\ b=۵\end{cases}\Rightarrow ab=-۲۰$$

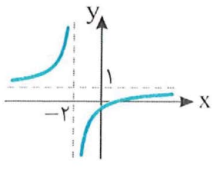
نمودار تابع هموگرافیک

تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq۰$ و $ad-bc\neq۰$ **تابع هموگرافیک** می‌نامیم (در حالت $c=۰$ و $a\neq۰$ تابع به یک خط راست غیر افقی و در حالت $ad-bc=۰$ به یک خط افقی تبدیل می‌شود). مشتق این تابع به صورت $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$ است. بنابراین تابع نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد و با محاسبهٔ مشتق دوم معلوم می‌شود که تابع نقطهٔ عطف نیز ندارد. نمودار این تابع یک مجانب قائم دارد که خط $x=-\frac{d}{c}$ است و یک مجانب افقی دارد که خط $y=\frac{a}{c}$ است. نمودار تابع به یکی از دو حالت روبه‌رو است.





مثال: فرض کنید $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$. در این صورت $x=-۲$ مجانب قائم نمودار تابع f و $y=۱$ مجانب افقی آن است و چون $ad-bc=۳$ ، پس تابع f در دو طرف مجانب قائمش اکیداً صعودی است و نمودار آن به شکل روبه‌رو است.



تست ۵ محل برخورد مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+1}{2x+4a}$ روی خط $y=2x+1$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $-\frac{2}{9}$ ۴) $-\frac{1}{9}$

راه‌حل مجانب‌های نمودار تابع $x=-2a$ و $y=\frac{a}{2}$ هستند. پس محل برخورد آن‌ها نقطهٔ $(-2a,\frac{a}{2})$ است که مختصات آن در معادلهٔ خط $y=2x+1$ صدق می‌کنند:

$$\frac{a}{2}=2(-2a)+1\Rightarrow a=\frac{2}{9}$$

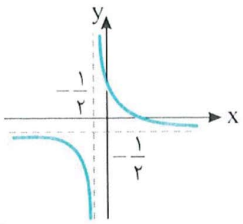
تست ۶ نمودار تابع هموگرافیک $f(x)=ax+\frac{2x^2-a}{2x+1}$ از کدام نواحی صفحهٔ مختصات عبور می‌کند؟

۱) اول و دوم ۲) اول و سوم ۳) دوم، سوم و چهارم ۴) هر چهار ناحیه

راه‌حل ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=\frac{(2a+2)x^2+ax-a}{2x+1}$ است. ضابطهٔ تابع هموگرافیک از تقسیم دو چندجمله‌ای درجهٔ اول به دست می‌آید. بنابراین صورت کسر نباید درجهٔ دوم باشد و در نتیجه

$$2a+2=0\Rightarrow a=-1\Rightarrow f(x)=\frac{-x+1}{2x+1}$$

مجانب‌های نمودار تابع $x=-\frac{1}{2}$ و $y=-\frac{1}{2}$ هستند. مشتق تابع در دو طرف مجانب قائم منفی است (زیرا $ad-bc=-3<0$) و نمودار تابع در دو طرف مجانب قائم آن اکیداً نزولی است و از نقطهٔ $(1,0)$ عبور می‌کند. پس نمودار تابع به شکل مقابل است که از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.



نکته ۲۲۸

تابع هموگرافیک روی دامنه‌اش غیریکنواست ولی در دو طرف مجانب قائم، یعنی روی بازه‌های $(-\infty,-\frac{d}{c})$ و $(-\frac{d}{c},+\infty)$ یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است. این موضوع را علامت مشتق که همان علامت $ad-bc$ است مشخص می‌کند. بنابراین اگر این تابع روی بازه‌ای اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، مجانب قائم نمودار تابع باید خارج این بازه قرار داشته باشد.

تست ۷ تابع $f(x)=\frac{2x+a+3}{x-a}$ روی بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً صعودی است. حدود a کدام است؟

۱) $a>-1$ ۲) $a<-1$ ۳) $-2\le a<-1$ ۴) $-1\le a\le 2$

راه‌حل مجانب قائم نمودار تابع، $x=a$ است که نباید در بازهٔ $(-\infty,-2)$ قرار بگیرد. پس $a\ge -2$. از طرف دیگر، مشتق تابع باید مثبت باشد تا تابع اکیداً صعودی باشد:

$$f'(x)=\frac{-2a-a-3}{(x-a)^2}>0\Rightarrow -3a-3>0\Rightarrow a<-1$$

بنابراین $-2\le a<-1$.

ویژگی‌های نمودار تابع (نمودارشناسی)

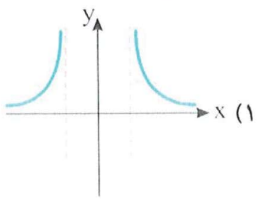
۲۲۹

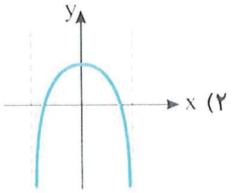
برای بررسی نمودار تابع باید به موارد زیر توجه کنید.

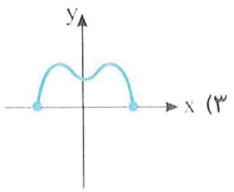
۱) دامنه و برد تابع

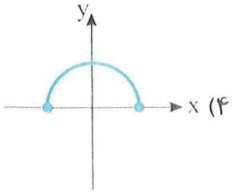
گاهی دانستن دامنه و برد تابع در نمودارشناسی کمک زیادی می‌کند. حتی شاید لازم نباشد کل دامنه یا برد را بدانیم.

تست ۸ نمودار تابع $y=\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

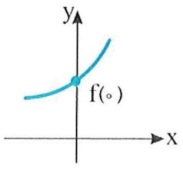
۳) 

۴) 

راه‌حل دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم: $۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۴\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

با توجه به دامنه، گزینهٔ (۱) نادرست است. واضح است که عددهای منفی در برد تابع قرار ندارند. پس گزینهٔ (۲) نادرست است. همچنین چون $x^۲\geq ۰$، پس بیشترین مقدار تابع به‌ازای $x=۰$ به دست می‌آید. پس تابع در $x=۰$ ماکزیمم مطلق دارد و گزینهٔ (۳) نادرست است. پس نمودار تابع به‌صورت گزینهٔ (۴) است.

۲) محل برخورد نمودار با محورهای مختصات



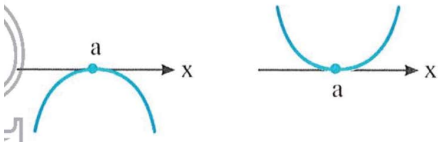
- اگر $x=۰$ در دامنهٔ تابع باشد، $f(۰)$ محل برخورد نمودار تابع با محور y است.
- اگر تابع ریشه نداشته باشد، نمودار آن محور x را قطع نمی‌کند. بنابراین معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشه ندارد.
- اگر معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشه داشته باشد، برحسب نوع ریشه نمودار به شکل‌های متفاوتی با محور x برخورد می‌کند.

برخی حالت‌های معروف عبارت‌اند از:

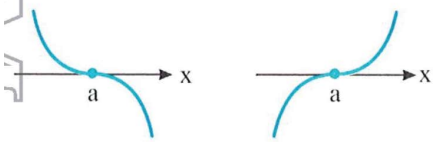
الف) اگر $x=a$ ریشهٔ سادهٔ تابع باشد، نمودار به شکل مقابل است:



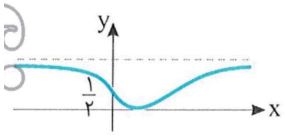
ب) اگر $x=a$ ریشهٔ مضاعف (مکرر مرتبهٔ زوج) تابع باشد، نمودار به شکل مقابل است:



پ) اگر $x=a$ ریشهٔ مکرر مرتبهٔ فرد تابع باشد، نمودار به شکل مقابل است:



تست ۹ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-ax+b}{x^۲-x+۲}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) -۳
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۳

راه‌حل طبق نمودار، $f(۰)=\frac{۱}{۲}$. چون $f(۰)=\frac{b}{۲}$، پس $b=۱$. در نتیجه $f(x)=\frac{x^۲-ax+۱}{x^۲-x+۲}$. از اینکه نمودار بر محور x (در قسمت $x>۰$) مماس است،

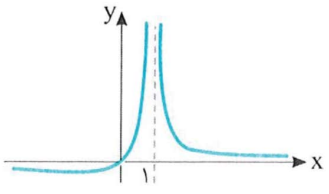
نتیجه می‌گیریم معادلهٔ $x^۲-ax+۱=۰$ ریشهٔ مضاعف مثبت دارد: $\Delta=۰\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm ۲\xrightarrow{\text{ریشهٔ مثبت}} a=۲\Rightarrow a+b=۳$

۳) مجانب‌های قائم

به تعداد مجانب‌های قائم و رفتار تابع در اطراف آن‌ها توجه کنید. در توابع گویا اگر ضابطهٔ تابع ساده شده باشد، ریشه‌های مخرج مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند و نمودار تابع در اطراف آن‌ها به شکل‌های زیر است:

$x=a$ ریشهٔ مضاعف (مکرر مرتبهٔ زوج) مخرج است.	$x=a$ ریشهٔ ساده یا مکرر مرتبهٔ فرد مخرج است.
	
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

تست ۱۰ نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{۲x^۲+ax+b}$ به شکل مقابل است. مقدار b کدام است؟



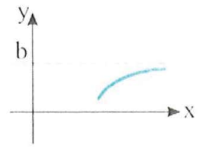
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

راه‌حل خط $x=۱$ مجانب قائم نمودار تابع است و چون $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=+\infty$، پس $x=۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج است. بنابراین $۲x^۲+ax+b=۲(x-۱)^۲=۲x^۲-۴x+۲\Rightarrow a=-۴\ ,\ b=۲$

۴) مجانب‌های افقی

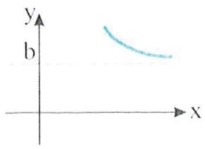
به خط‌وط مجانب افقی توجه کنید. می‌دانیم که اگر $y=b$ مجانب افقی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$. همچنین محل برخورد نمودار تابع با مجانب افقی مهم است. گاهی بالاتر یا پایین‌تر بودن نمودار تابع نسبت به مجانب افقی اهمیت دارد.

شکل‌های مشابهی را می‌توان برای حالت $x\to-\infty$ رسم کرد.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

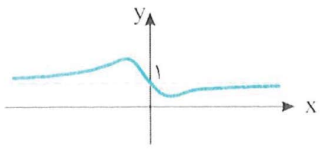
$x\to+\infty:\ f(x)-b<0$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$

$x\to+\infty:\ f(x)-b>0$

تست ۱۱ نمودار کدام تابع به‌صورت مقابل است؟



۱) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

۲) $y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

۳) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

۴) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$

راه‌حل در تمام گزینه‌ها خط $y=1$ مجانب افقی نمودار تابع است. نمودار و خط مجانب روی محور y متقاطع‌اند. یعنی نمودار از نقطهٔ $(0,1)$ عبور می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. گزینهٔ (۴) به‌صورت مقابل است:

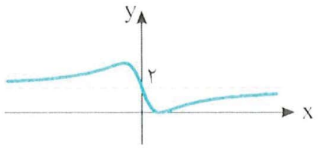
$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}=1+\frac{x}{x^2+1}$$

پس نمودار در $+\infty$ باید بالای خط مجانب باشد:

$$x\to+\infty\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}>0\Rightarrow f(x)>1$$

بنابراین گزینهٔ (۴) هم نادرست است. پس نمودار تابع گزینهٔ (۳) به‌صورت داده شده است.

تست ۱۲ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{x^2+2}$ به شکل مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) ۲

۲) -2

۳) $\sqrt{2}$

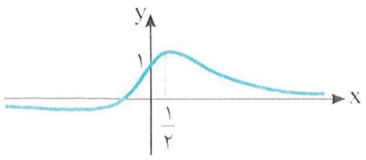
۴) $-\sqrt{2}$

راه‌حل چون $f(0)=\dfrac{0+0+4}{0+2}=2$، پس نمودار تابع از نقطهٔ $(0,2)$ عبور می‌کند. چون مجانب افقی نمودار تابع نیز از این نقطه عبور کرده است. پس $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع است. از طرف دیگر، $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^2+bx+4}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^2}{x^2}=a$. یعنی $y=a$ مجانب افقی است. پس $a=2$.

۵) نقاط اکسترمم نسبی و عطف

طول و عرض نقاط اکسترمم نسبی و عطف نیز مهم هستند. اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر باشد و (a,b) نقطه اکسترمم نسبی آن باشد، آن‌گاه $f(a)=b$ و $f'(a)=0$ و اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ مشتق دوم داشته باشد و (a,b) نقطهٔ عطف آن باشد، آن‌گاه $f(a)=b$ و $f''(a)=0$.

تست ۱۳ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ به شکل مقابل است. حاصل $b+c$ کدام است؟



۱) $\dfrac{4}{3}$

۲) $\dfrac{2}{3}$

۳) $\dfrac{7}{3}$

۴) $\dfrac{8}{3}$

راه‌حل خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع است. پس درجهٔ صورت باید کمتر از درجهٔ مخرج باشد. بنابراین $a=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{bx+c}{x^2+1}$ نمودار از نقطهٔ $(0,1)$ عبور می‌کند. پس

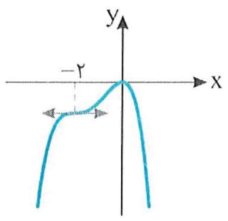
$$1=\frac{0+c}{0+1}\Rightarrow c=1\Rightarrow f(x)=\frac{bx+1}{x^2+1}$$

تابع در نقطهٔ به طول $x=\dfrac{1}{2}$ ماکزیمم نسبی دارد و مشتق آن در این نقطه صفر است:

$$f'(x)=\frac{b(x^2+1)-2x(bx+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-bx^2-2x+b}{(x^2+1)^2},\quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow-\frac{b}{4}-1+b=0\Rightarrow b=\frac{4}{3}$$

در نتیجه $b+c=\dfrac{7}{3}$.

تست ۱۴ نمودار تابع $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+bx^2+cx$ به شکل مقابل است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) -2 ۲) -4

۳) -6 ۴) -8

راه‌حل تابع در مبدأ مختصات بر محور طول‌ها مماس است. پس $f'(0)=0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=-x^3+ax^2+2bx+c\Rightarrow f'(0)=c=0\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+bx^2$$

تابع در $x=-2$ مماس افقی دارد، یعنی مشتق تابع در این نقطه صفر است:

$$f'(-2)=8+4a-4b=0\Rightarrow a-b=-2$$

همچنین در $x=-2$ مماس بر نمودار از آن عبور کرده است، یعنی این نقطه، نقطهٔ عطف تابع است و مشتق دوم تابع در این نقطه صفر است:

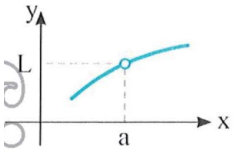
$$f''(x)=-3x^2+2ax+2b\Rightarrow f''(-2)=-12-4a+2b=0\Rightarrow -2a+b=6$$

پس

$$a-b=-2\,,\,-2a+b=6\Rightarrow a=-4\,,\,b=-2\Rightarrow a+b+c=-6$$

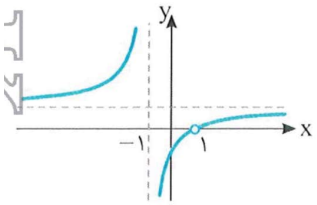
۶) حفره‌ها

به نقطهٔ توخالی روی نمودار تابع روبه‌رو توجه کنید. این نقاط معمولاً در توابع کسری به وجود می‌آیند و مقدار صورت و مخرج کسر در آن‌ها همزمان صفر بوده است.



$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\;,\;g(a)=h(a)=0\;,\;\lim_{x\to a}f(x)=L$$

تست ۱۵ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2+bx+c}$ به شکل مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) ۱ ۲) -1

۳) ۲ ۴) -2

راه‌حل تابع در $x=-1$ و $x=1$ تعریف نشده است. پس این اعداد باید ریشهٔ مخرج باشند:

$$1+b+c=0\,,\,1-b+c=0\Rightarrow b=0\,,\,c=-1$$

نمودار تابع در $x=1$ حفره دارد، پس باید صورت کسر هم در این نقطه صفر باشد:

$$1+a+1=0\Rightarrow a=-2$$

روش رسم نمودار تابع

مراحل رسم نمودار تابع به‌ترتیب زیر هستند:

۱) دامنهٔ تابع را تعیین می‌کنیم.

۲) در صورت متناوب بودن تابع، دورهٔ تناوب آن را مشخص می‌کنیم و نمودار را فقط در یک دورهٔ تناوب رسم می‌کنیم.

۳) مجانب‌های نمودار تابع را در صورت وجود مشخص می‌کنیم.

۴) مشتق اول تابع را پیدا می‌کنیم و با تعیین علامت آن، صعودی یا نزولی بودن تابع، نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی را مشخص می‌کنیم.

۵) مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم و با تعیین علامت آن، جهت تقعر و نقاط عطف تابع را معین می‌کنیم.

۶) محل برخورد نمودار با محورهای مختصات را در صورت امکان، معین می‌کنیم.

۷) مقدار تابع (یا حد آن) را در نقاط بحرانی، عطف و نقاط ابتدا و انتهای دامنه مشخص می‌کنیم.

۸) با تشکیل جدول تغییرات تابع و قرار دادن اطلاعات به‌دست آمده از مراحل فوق در آن، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

تذکر گاهی به علت سخت بودن محاسبه یا بدیهی بودن برخی از مراحل فوق، از آن‌ها صرف نظر می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^3-3x$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم. دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است. نمودار تابع مجانب ندارد. محل برخورد نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

محل برخورد با محور عرض‌ها : $x=0 \Rightarrow y=0$

محل برخورد با محور طول‌ها : $y=0 \Rightarrow x^3-3x=0 \Rightarrow x(x^2-3)=0 \Rightarrow x=0\,,\ x=\pm\sqrt{3}$

مشتق‌های اول و دوم تابع را پیدا می‌کنیم و ریشه‌های آن‌ها را می‌یابیم:

$$f'(x)=3x^2-3=0\,,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1\,,\quad f''(x)=6x\,,\quad f''(x)=0\Rightarrow x=0$$

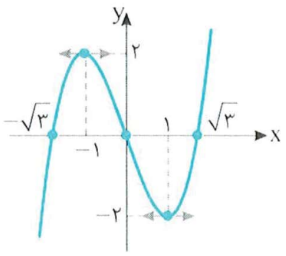
مقدار تابع را در نقاط بحرانی و عطف پیدا می‌کنیم و حد تابع را در ابتدا و انتهای دامنه می‌یابیم:

$$x=-1\Rightarrow y=2\,,\quad x=0\Rightarrow y=0\,,\quad x=1\Rightarrow y=-2\,,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\,,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

جدول تغییرات تابع را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$
			max نسبی		نقطهٔ عطف		min نسبی		

نمودار تابع را به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم:



نقاط $(-1,2)$، $(0,0)$، $(1,-2)$، $(\sqrt{3},0)$ و $(-\sqrt{3},0)$ را مشخص می‌کنیم. نمودار از ربع سوم آغاز می‌شود و روی بازهٔ $[-1,-\infty)$ با جهت تقعر رو به پایین ابتدا به نقطهٔ $(-\sqrt{3},0)$ و سپس تا نقطهٔ $(-1,2)$ صعود می‌کند و در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد. از نقطهٔ $(-1,2)$ با جهت تقعر رو به پایین به نقطهٔ $(0,0)$ نزول می‌کند و این نقطه، نقطهٔ عطف تابع است. از نقطهٔ $(0,0)$ با جهت تقعر رو به بالا به نقطهٔ $(1,-2)$ نزول می‌کند و در این نقطه مینیمم نسبی دارد. روی بازهٔ $[1,+\infty)$ نمودار از نقطهٔ $(1,-2)$ با جهت تقعر رو به بالا ابتدا به نقطهٔ $(\sqrt{3},0)$ و سپس تا بی‌نهایت با همین روند صعود می‌کند.

مثال: نمودار تابع $f(x)=3x^4-4x^3-1$ را رسم می‌کنیم. دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است و نمودار تابع مجانب ندارد. محل برخورد نمودار با محور y نقطهٔ $(0,-1)$ است ولی پیدا کردن محل برخورد نمودار با محور x ساده نیست و از آن صرف نظر می‌کنیم. مشتق‌های اول و دوم تابع و ریشه‌های آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

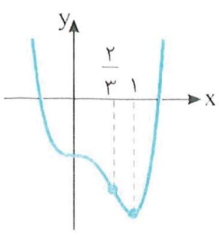
$$f'(x)=12x^3-12x^2\,,\quad f'(x)=0\Rightarrow 12x^2(x-1)=0\Rightarrow x=0\,,\ x=1$$

$$f''(x)=36x^2-24x\,,\quad f''(x)=0\Rightarrow 12x(3x-2)=0\Rightarrow x=0\,,\ x=\frac{2}{3}$$

توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3x^4)=+\infty\,,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(3x^4)=+\infty$$

جدول تغییرات و نمودار تابع به شکل زیر است:



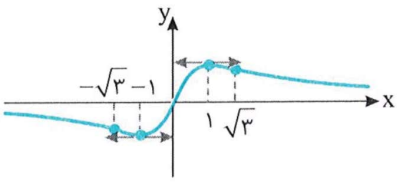
x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↘	$-\frac{43}{27}$	↘	-2	↗	$+\infty$
			نقطهٔ عطف		نقطهٔ عطف		min نسبی		

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x}{x^۲+۱}$ را رسم می‌کنیم. دامنهٔ تابع f مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است. نمودار تابع مجانب قائم ندارد و خط $y=۰$ مجانب افقی آن است: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x^۲+۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲}{x}=۰$. مبدأ مختصات محل برخورد نمودار با محورهاست: $f(۰)=۰$. مشتق اول تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲(۱-x^۲)}{(x^۲+۱)^۲},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm۱,\quad f''(x)=\frac{-۴x(۳-x^۲)}{(x^۲+۱)^۳},\quad f''(x)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm\sqrt{۳}$$

جدول تغییرات تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$f(x)$	۰	↘		↘	-۱ min نسبی	↗	۰	↗	۱ max نسبی	↘		↘	۰



مثال: نمودار تابع $f(x)=\sin x+\sqrt{۳}\cos x$ را روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم. نمودار تابع مجانب ندارد. اکنون محل تلاقی نمودار با محورها را معین می‌کنیم:

$$x=۰\Rightarrow y=\sqrt{۳}\ ,\quad y=۰\Rightarrow\sin x+\sqrt{۳}\cos x=۰\Rightarrow\tan x=-\sqrt{۳}\Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳},\ x=\frac{۵\pi}{۳}$$

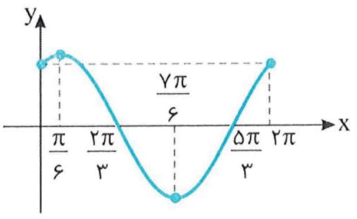
مشتق‌های اول و دوم را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\cos x-\sqrt{۳}\sin x\ ,\qquad f'(x)=۰\Rightarrow\tan x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},x=\frac{۷\pi}{۶}$$

$$f''(x)=-\sin x-\sqrt{۳}\cos x\ ,\qquad f''(x)\Rightarrow\tan x=-\sqrt{۳}\Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳},x=\frac{۵\pi}{۳}$$

جدول تغییرات و نمودار تابع به شکل زیر است:

x	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{۲\pi}{۳}$		$\frac{۷\pi}{۶}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		۲π
$f'(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{۳}$	↗	۲ max نسبی	↘	۰ نقطهٔ عطف	↘	-۲ min نسبی	↗	۰ نقطهٔ عطف	↗	$\sqrt{۳}$



نکته

معادلهٔ درجهٔ سوم $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d=۰$ در صورتی سه جواب دارد که نمودار تابع f یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی داشته باشد و حاصل‌ضرب مقادیر اکسترمم نسبی تابع f مقداری منفی باشد. همچنین اگر حاصل‌ضرب مقادیر اکسترمم نسبی تابع f برابر صفر باشد، معادله دو جواب دارد و در غیر این صورت این معادله یک جواب دارد.

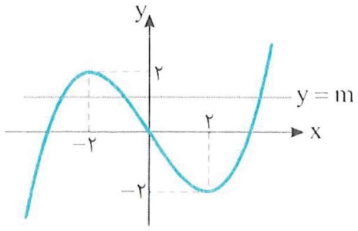
تست ۱۶ خط $y=m$ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3-12x}{8}$ را در سه نقطه قطع می‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $-2<m<2$ ۳) $m<-2$ ۴) $-3<m<3$

راه‌حل ابتدا نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم، سپس نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{3x^2-12}{8}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2 (max نسبی)	↘	-2 (min نسبی)	↗	$+\infty$



با توجه به نمودار تابع f، اگر $-2<m<2$، آن‌گاه خط $y=m$ نمودار تابع f را در سه نقطه قطع می‌کند.

تست ۱۷ خط $y=m$ نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$ را در چهار نقطه قطع می‌کند. حدود m کدام است؟

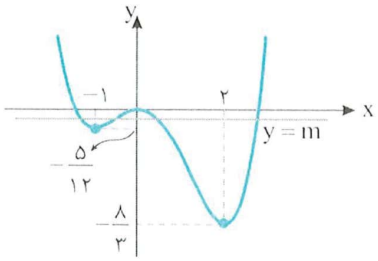
۱) $-\frac{5}{12}<m<0$ ۲) $m>0$ ۳) $-\frac{8}{3}<m<-\frac{5}{12}$ ۴) $-\frac{8}{3}<m<0$

راه‌حل نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم و به کمک آن‌ها نمودار تقریبی تابع را رسم می‌کنیم:

$$f'(x)=x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x+1)(x-2),\quad f'(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=-1,\ x=2$$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{5}{12}$ (min نسبی)	↗	0 (max نسبی)	↘	$-\frac{8}{3}$ (min نسبی)	↗	$+\infty$

با توجه به نمودار زیر، واضح است که اگر $-\frac{5}{12}<m<0$، آن‌گاه خط $y=m$، نمودار تابع f را در چهار نقطه قطع می‌کند.



نکته رسم نمودار تابع مشتق از روی نمودار تابع

برای رسم نمودار تابع مشتق از روی نمودار تابع، به موارد زیر توجه می‌کنیم:

۱) در هر بازه‌ای که تابع f روی آن مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی باشد، نمودار تابع f' بالای محور طول‌ها قرار دارد و در هر بازه‌ای که تابع f مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی باشد، نمودار تابع f' پایین محور طول‌ها قرار دارد.

۲) در نقاط اکسترمم نسبی f که تابع روی یک همسایگی آن‌ها مشتق‌پذیر است، نمودار تابع f' محور طول‌ها را قطع می‌کند.

۳) روی هر بازه‌ای که تابع f دو بار مشتق‌پذیر و جهت تقعر نمودار تابع f رو به بالا باشد، نمودار تابع f' اکیداً صعودی است و روی هر بازه‌ای که تابع f دو بار مشتق‌پذیر و جهت تقعر نمودار f رو به پایین باشد، نمودار تابع f' اکیداً نزولی است.

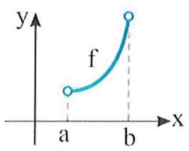
۴) در نقاط عطف تابع f که تابع در اطراف آن‌ها مشتق دوم دارد، تابع f' اکسترمم نسبی دارد.

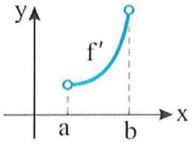
۵) در نقاط ناپیوستگی تابع f، تابع f' تعریف نشده است. همچنین در نقاطی که مماس بر نمودار تابع f موازی محور عرض‌هاست، تابع f' مجانب قائم دارد و در نقاط گوشه‌ای تابع f، تابع f' تعریف نمی‌شود و حد چپ و حد راست تابع f' در این نقطه نابرابر هستند.

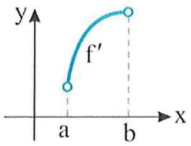
۶) در نقاطی که تابع f مجانب قائم دارد، تابع f' نیز مجانب قائم دارد.

۷) اگر تابع f مجانب افقی داشته باشد، تابع f' مجانب افقی به معادلهٔ $y=0$ دارد.

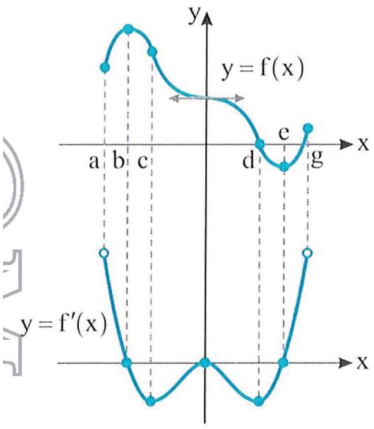
مثال: نمودار تابع f روی بازهٔ (a,b) به شکل مقابل است. توجه کنید تابع f روی بازهٔ (a,b) اکیداً صعودی است، پس مقادیر f' مثبت هستند. همین‌طور جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ (a,b) به سمت بالاست، پس تابع f' روی بازهٔ (a,b) اکیداً صعودی است. به این ترتیب، نمودار تقریبی تابع f' به یکی از صورت‌های زیر است.





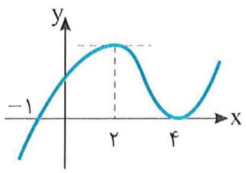


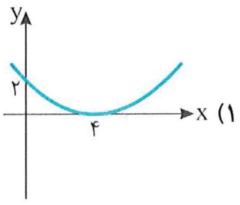
مثال: به نمودار تابع f توجه کنید.

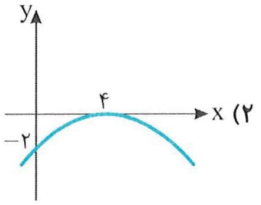


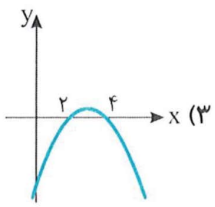
- این تابع مشتق‌پذیر است و تابع f' در تمام نقاط بازهٔ (a,g) تعریف شده است.
- روی بازهٔ (a,b) تابع f صعودی است، بنابراین تابع f' مثبت است. همچنین جهت تقعر f رو به پایین است، پس f' نزولی است.
- روی بازه‌های (b,c) و $(0,d)$ تابع f نزولی است و جهت تقعر آن رو به پایین است. بنابراین روی این بازه‌ها تابع f' منفی و نزولی است.
- روی بازه‌های $(c,0)$ و (d,e) تابع f نزولی است و جهت تقعر آن رو به بالا است. بنابراین روی این بازه‌ها تابع f' منفی و صعودی است.
- روی بازهٔ (e,g) تابع f صعودی است و جهت تقعر آن رو به بالاست. بنابراین روی این بازه تابع f' مثبت و صعودی است.
- در نقطه‌های $x=b$ و $x=e$ تابع f اکسترمم نسبی دارد. بنابراین با توجه به مشتق‌پذیری f، f' در این نقاط برابر صفر است و تغییر علامت می‌دهد.
- نقطهٔ $x=c$ طول نقطهٔ عطف تابع f است و $f''(c)=0$. بنابراین مشتق f' در این نقطه برابر صفر است. با توجه به جهت تقعر تابع f روی بازه‌های (b,c) و $(c,0)$، علامت f''، یعنی مشتق تابع f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کرده است. پس $x=c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی نمودار تابع f' است. در نقطهٔ $x=d$ رفتار f و f' شبیه به رفتار این دو تابع در نقطهٔ $x=c$ است.
- نقطهٔ $x=0$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f است و $f''(0)=0$ و $f'(0)=0$. بنابراین مقدار f' و مشتق آن در این نقطه برابر صفر است. با توجه به جهت تقعر نمودار f قبل و بعد از $x=0$، علامت f''، یعنی مشتق تابع f' از مثبت به منفی تغییر کرده است. پس $x=0$ طول ماکزیمم نسبی نمودار تابع f' است.

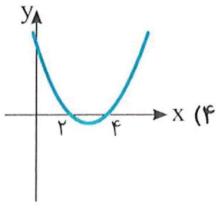
تست ۱۸ **نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f' به کدام شکل می‌تواند باشد؟**



۱) 

۲) 

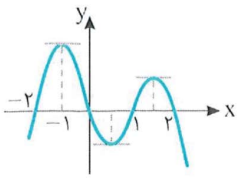
۳) 

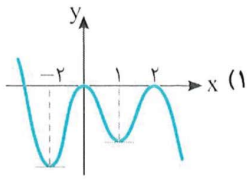
۴) 

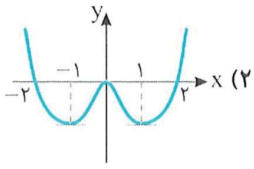
راه‌حل تابع f روی بازه‌های $(-\infty,2)$ و $(4,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی این بازه‌ها f' مثبت است. تابع f روی بازهٔ $(2,4)$ اکیداً نزولی است، پس روی این بازه f' منفی است. خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول ۲ و ۴ موازی محور x است، پس مقدار f' در این نقطه‌ها برابر صفر است. توجه کنید که فقط گزینهٔ (۴) این ویژگی‌ها را دارد.

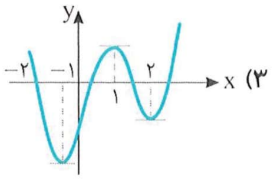
تست ۱۹

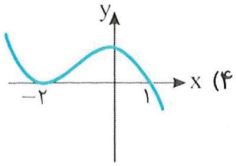
نمودار تابع مشتق تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

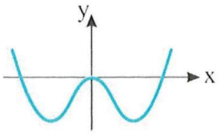
۳) 

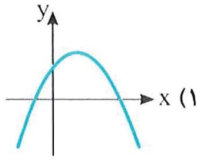
۴) 

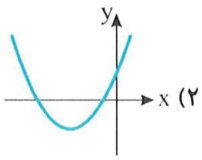
راه‌حل مقدار تابع f' در نقطه‌های به طول -۲، صفر، ۱ و ۲ برابر صفر است. پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول -۲، صفر، ۱ و ۲ موازی محور x است. روی بازه‌های $(-۲,۰)$ و $(۱,۲)$ علامت f' مثبت است. پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً صعودی است. روی بازه‌های $(۰,۱)$، $(۲,+\infty)$ و $(-\infty,-۲)$ علامت f' منفی است. پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً نزولی است. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

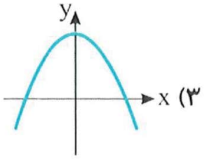
تست ۲۰

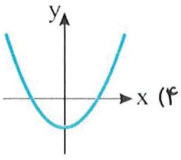
نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f'' به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

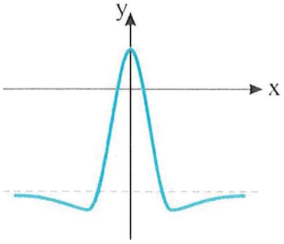
۳) 

۴) 

راه‌حل جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌ای شامل نقطهٔ $x=۰$ رو به پایین است و در بقیهٔ جاها رو به بالا است. بنابراین مقادیر f'' روی این بازه منفی‌اند و در بقیهٔ جاها مثبت‌اند. فقط نمودار گزینهٔ (۴) این ویژگی‌ها را دارد.

تست ۲۱

نمودار تابع f' به شکل مقابل است. نمودار تابع f به ترتیب چند نقطهٔ اکسترمم نسبی و چند نقطهٔ عطف دارد؟

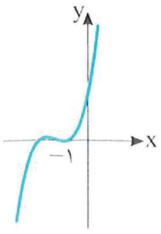


۱) ۳ و ۳
۲) ۳ و ۲
۳) ۲ و ۳
۴) ۲ و ۲

راه‌حل نمودار تابع f' دو بار محور طول‌ها را قطع می‌کند، یعنی در این نقاط مشتق برابر صفر است و تغییر علامت می‌دهد. پس تابع f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. همچنین نمودار تابع f' در سه نقطه از حالت صعودی به حالت نزولی (یا برعکس) درمی‌آید. بنابراین تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

دست‌گرمی

۲۳۷- نمودار تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۲$ به شکل مقابل است. حاصل ab کدام است؟



۱) ۱۰
۲) -۱۰
۳) ۲۰
۴) -۲۰

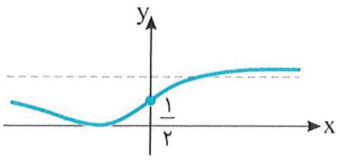
۲۳۸- محل برخورد مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{ax-۱}{۲x+۴}$ روی خط $y=۲x+۱$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) -۶ ۴) -۱۰

۲۳۹- تابع $f(x)=\frac{۲x+a+۳}{x-a}$ روی بازهٔ $(۲,+\infty)$ اکیداً نزولی است. حدود a کدام است؟

۱) $a>-۱$ ۲) $a<-۱$ ۳) $-۱<a\leq ۲$ ۴) $-۱\leq a\leq ۲$

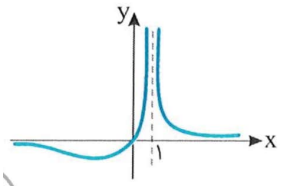
۲۴۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+ax+b}{x^۲+x+۲}$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) -۳ ۲) -۱

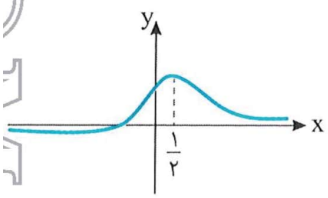
۳) ۱ ۴) ۳

۲۴۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{۲x^۲+bx+c}$ به شکل مقابل است. مقدار $f(۲)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

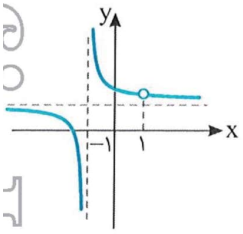
۲۴۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^۲+bx+۱}{x^۲+۱}$ به شکل مقابل است. مقدار b کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

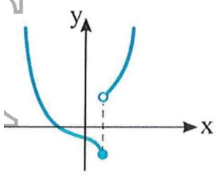
۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

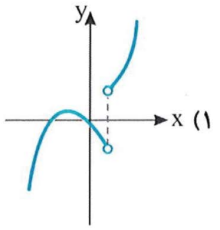
۲۴۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+ax-۲}{x^۲+bx+c}$ به شکل مقابل است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

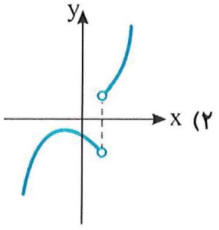


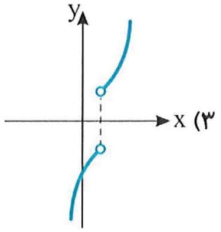
۱) صفر
۲) ۱
۳) -۱
۴) ۲

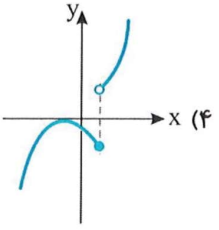
۲۴۴- نمودار تابعی به شکل مقابل است. نمودار تابع مشتق آن به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱)


۲)


۳)


۴)


آزمون ۱۵۹ رسم نمودار (۱)

سؤال	گام
۱۵۸۱	۲۲۶ ۲۲۹
۱۵۸۲	۲۲۶
۱۵۸۳	۲۲۷
۱۵۸۴	۲۲۹
۱۵۸۵	۲۲۹
۱۵۸۶	۲۲۹
۱۵۸۷	۲۲۷
۱۵۸۸	۲۲۹
۱۵۸۹	۲۲۹
۱۵۹۰	۲۲۹

۱۵۸۱- نمودار تابع $f(x)=x^۳-۴x$ در همسایگی نقطهٔ $x=۳$ چگونه است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

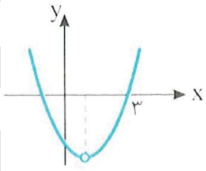
۱۵۸۲- نمودار تابع $f(x)=-x(x^۲-۳x+۳)$ از چند ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۸۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x}{x+۲}$ از کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند؟

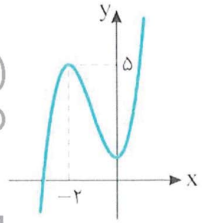
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۵۸۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{(x-a)(x^۲-۱)}{x-b}$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟



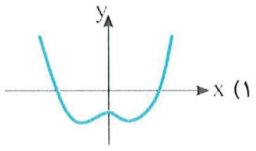
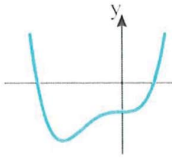
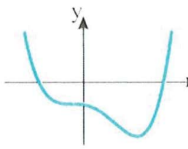
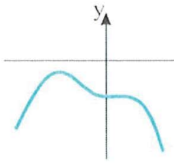
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۸۵- نمودار تابع $f(x)=ax^۳+bx^۲+۱$ به‌صورت مقابل است. حاصل $b-a$ کدام است؟

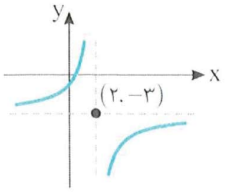


۱) ۲
۲) -۲
۳) -۴
۴) ۴

۱۵۸۶- نمودار تابع $f(x)=۴x^۴+۳x^۳-۲$ کدام است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۵۸۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{۲x-b}$ به‌صورت مقابل است. حاصل ab کدام است؟



۱) -۸ ۲) -۱۲
۳) -۱۸ ۴) -۲۴

۱۵۸۸- نمودار تابع $f(x)=-x\sqrt{۳-x}$ در همسایگی مبدأ مختصات چگونه است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۱۵۸۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲}{۱-x}$ در همسایگی نقطهٔ $x=۲$ چگونه است؟

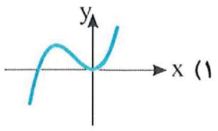
۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

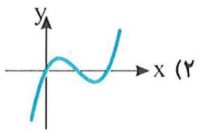
۱۵۹۰- نمودار تابع $f(x)=\sin^۲ x-۲\cos x$ در همسایگی نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۶}$ به کدام شکل است؟

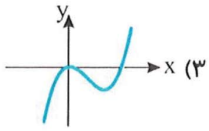
۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

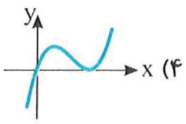
آزمون ۱۶۰ رسم نمودار (۲)

۱۵۹۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$ به کدام صورت است؟

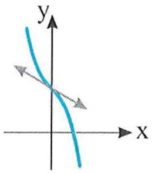
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۵۹۲- نمودار کدام تابع به‌صورت مقابل است؟



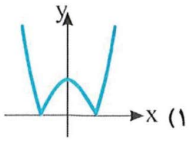
۱) $y=-x^3+x+2$

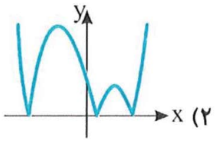
۲) $y=-x^3-x+2$

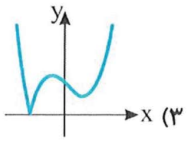
۳) $y=-x^3+x^2+2$

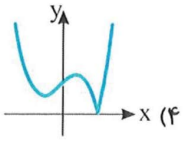
۴) $y=-x^3-x^2+2$

۱۵۹۳- نمودار تابع $f(x)=|x^3-3x+1|$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

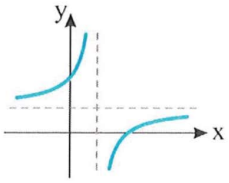
۳) 

۴) 

۱۵۹۴- نمودار تابع $f(x)=|\frac{x-1}{x+1}|$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=\sqrt{x+1}$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۹۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{ax-1}{x-a}$ به‌صورت مقابل است. حدود a کدام است؟



۱) $-1<a<1$

۲) $0<a<1$

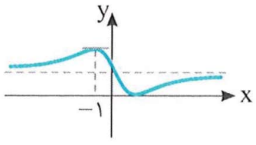
۳) $a>1$

۴) $0<a<\frac{1}{2}$

۱۵۹۶- نقطهٔ برخورد مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{ax-2}{bx-4}$ بر نقطهٔ عطف نمودار تابع $g(x)=x^3-3x^2+2x+b$ منطبق است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۱۵۹۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2-x+3}$ به‌صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) فقط ۲

۲) فقط $-\frac{14}{3}$

۳) ۲ یا $-\frac{14}{3}$

۴) -2 یا $\frac{14}{3}$

۱۵۹۸- نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ در همسایگی نقطهٔ $x=1$ چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۵۹۹- نمودار تابع $f(x)=\cos x+x\sin x$ در همسایگی نقطهٔ $x=0$ چگونه است؟

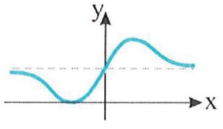
۱) 

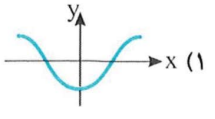
۲) 

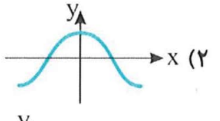
۳) 

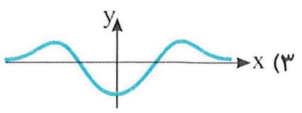
۴) 

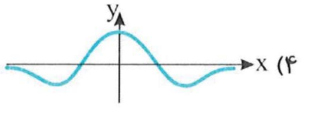
۱۶۰۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه می‌تواند نمودار تابع مشتق تابع f باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

سؤال	گا
۱۵۹۱	۲۶
۱۵۹۲	۲۶
۱۵۹۳	۸ ۶
۱۵۹۴	۸ ۷
۱۵۹۵	۷
۱۵۹۶	۶ ۷
۱۵۹۷	
۱۵۹۸	۹
۱۵۹۹	۹
۱۶۰۰	۲

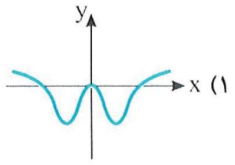
آزمون ۱۶۱ رسم نمودار (۳)

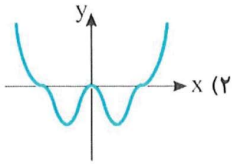
سؤال	گام
۱۶۰۱	۲۲۶
۱۶۰۲	۲۲۶ ۲۲۹
۱۶۰۳	۲۲۶
۱۶۰۴	۳۸ ۲۲۷
۱۶۰۵	۲۲۷
۱۶۰۶	۲۲۹
۱۶۰۷	۲۲۹
۱۶۰۸	۲۲۹
۱۶۰۹	۲۳۲
۱۶۱۰	۲۳۲

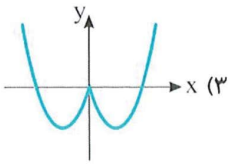
۱۶۰۱- نمودار تابع $f(x)=-x^3+x^2-x$ از چند ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور می‌کند؟

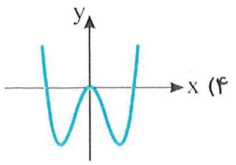
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۰۲- نمودار تابع $f(x)=x^2(|x|-3)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


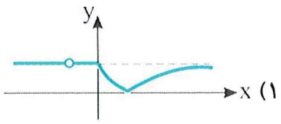
۱۶۰۳- نمودار تابع $f(x)=x^3+x^2+ax+b$ به‌صورت مقابل است. حدود a کدام است؟

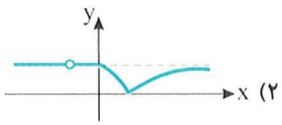


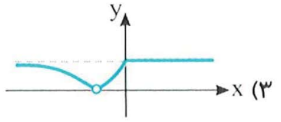
۱) $a<\frac{1}{3}$ ۲) $a<\frac{1}{2}$

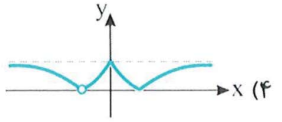
۳) $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

۱۶۰۴- نمودار تابع $f(x)=\left|\frac{|x|-1}{x+1}\right|$ کدام است؟

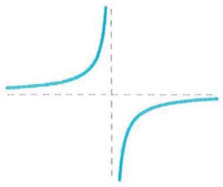
۱)


۲)


۳)


۴)


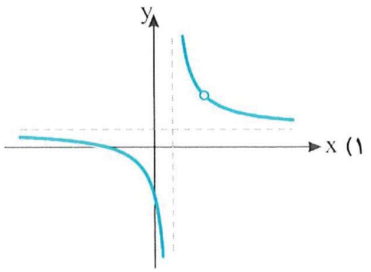
۱۶۰۵- اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{mx+1}{x-3}$ به صورت مقابل باشد، حدود m کدام است؟

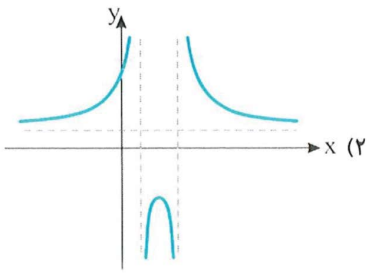


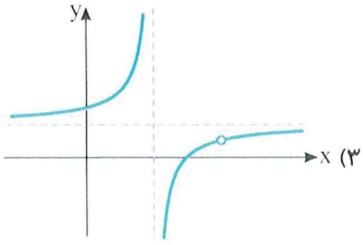
۱) $m>\frac{1}{3}$ ۲) $m<\frac{1}{3}$

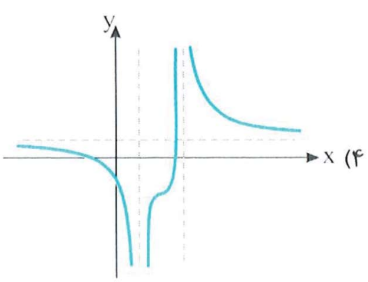
۳) $m<-\frac{1}{3}$ ۴) $m>-\frac{1}{3}$

۱۶۰۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۶۰۷- نمودار تابع $f(x)=(x^۲-x)\sqrt[۳]{x}$ در همسایگی نقطهٔ $x=۰$ چگونه است؟

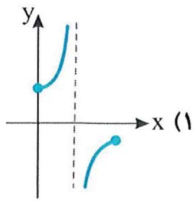
۱) 

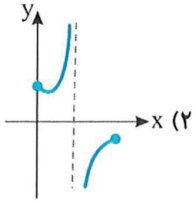
۲)

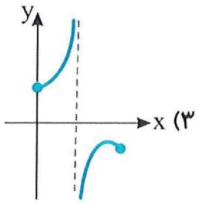
۳) 

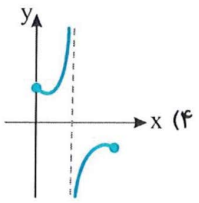
۴) 

۱۶۰۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲\cos x-۱}$ با دامنهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]-\{\frac{\pi}{۳}\}$ کدام است؟

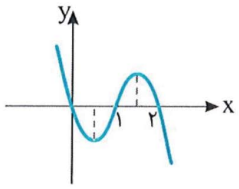
۱) 

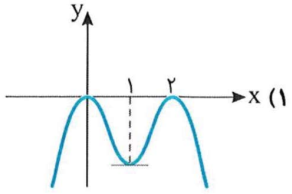
۲) 

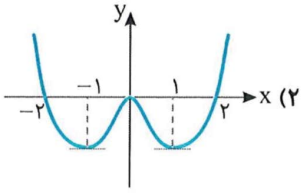
۳) 

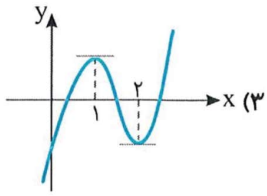
۴) 

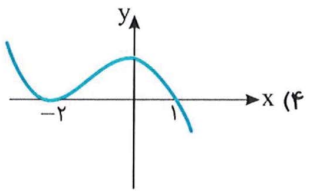
۱۶۰۹- نمودار تابع مشتق تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f به کدام شکل می‌تواند باشد؟



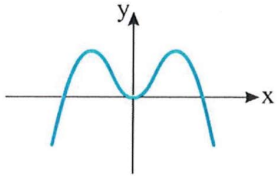
۱) 

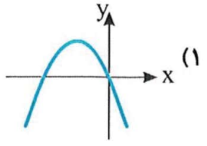
۲) 

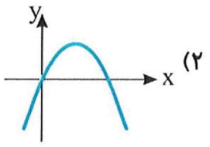
۳) 

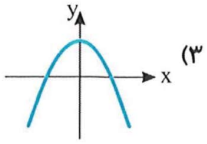
۴) 

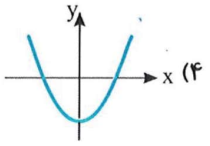
۱۶۱۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f'' به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

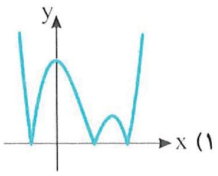
۳) 

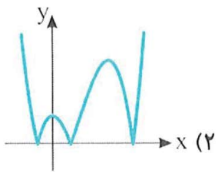
۴) 

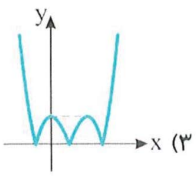
آزمون ۱۶۲ رسم نمودار (۴)

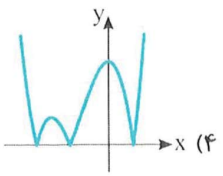
سؤال	گام
۱۶۱۱	۳۸ ۲۲۶
۱۶۱۲	۲۲۸
۱۶۱۳	۲۲۶ ۲۳۱
۱۶۱۴	۲۲۶ ۲۲۹
۱۶۱۵	۲۳۱
۱۶۱۶	۲۲۷ ۲۲۹
۱۶۱۷	۲۲۷
۱۶۱۸	۲۲۷ ۲۲۹
۱۶۱۹	۲۲۹
۱۶۲۰	۲۳۲

۱۶۱۱- نمودار تابع $y=|x^۳-۳x^۲+۱|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

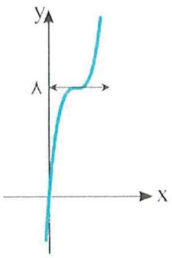
۱۶۱۲- نمودار تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+k$ از ناحیهٔ چهارم صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند. حداقل مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۱۳- معادلهٔ $۲x^۳+۳x+k=۰$ فقط یک جواب منفی دارد. حدود k کدام است؟

۱) $k>۰$ ۲) $k<۰$ ۳) $۰<k<۱$ ۴) $-۱<k<۰$

۱۶۱۴- نمودار تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+bx$ به صورت مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟

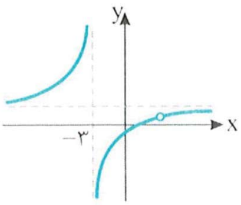


۱) ۶
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۶۱۵- برد تابع $f(x)=x^۴-۴x$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[-۲,+\infty)$ ۳) $[-۳,+\infty)$ ۴) $[-۴,+\infty)$

۱۶۱۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+ax+۳}{x^۲-b}$ به‌صورت مقابل است. مقدار ab کدام است؟

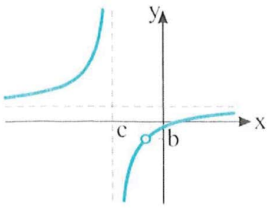


۱) -۱۲ ۲) -۲۴
۳) -۳۲ ۴) -۳۶

۱۶۱۷- اگر $f(x)=ax-\frac{x^۲+a}{۳x-۱}$ ضابطهٔ یک تابع هموگرافیک باشد. فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع مجانب‌های نمودار تابع تا مبدأ مختصات چقدر است؟

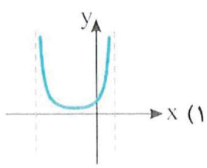
۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۹}$ ۳) $\frac{\sqrt{۸}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۸}}{۹}$

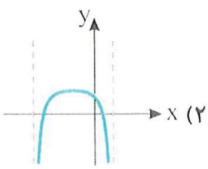
۱۶۱۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲+ax+۳}$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

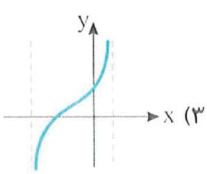


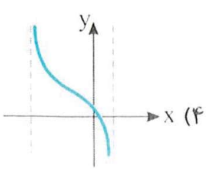
۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) صفر

۱۶۱۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۱-\sin x}$ روی بازهٔ $(-\frac{۳\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

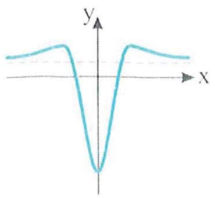
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

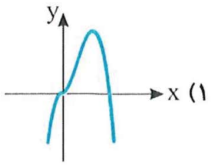
۱۶۲۰- نمودار تابع f' به شکل مقابل است. نمودار تابع f به‌ترتیب چند نقطهٔ اکسترمم نسبی و چند نقطهٔ عطف دارد؟

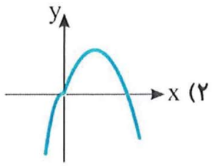


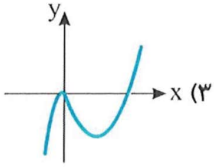
۱) ۳ و ۳ ۲) ۳ و ۲
۳) ۲ و ۳ ۴) ۲ و ۲

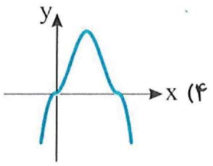
آزمون ۱۶۳ رسم نمودار (۵)

۱۶۲۱- نمودار تابع $f(x)=|x|(-x^۲+۳x)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

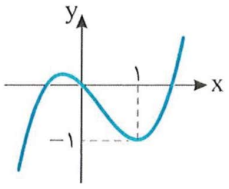
۱۶۲۲- نمودار تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲+k$ از چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات عبور می‌کند. حدود k کدام است؟

۱) $-۱<k<۱$ ۲) $۰<k<۱$ ۳) $۰<k<\frac{۳}{۲}$ ۴) $۰<k<\frac{۱}{۲}$

۱۶۲۳- خط $y=m$ نمودار تابع $f(x)=x^۳-۳x$ را در سه نقطه قطع نمی‌کند. m چند عدد صحیح نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

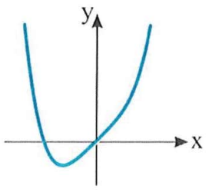
۱۶۲۴- نمودار تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+bx$ به‌صورت مقابل است. طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۶۲۵- نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+x$ به‌صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) ۱ ۲) -۱

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

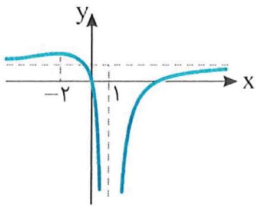
۱۶۲۶- برد تابع $f(x)=\frac{|x|}{x+۱}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\pm۱\}$ ۳) $\mathbb{R}-(۰,۱]$ ۴) $\mathbb{R}-[-۱,۰)$

۱۶۲۷- خط $y=m$ نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|+۲}{x-۱}$ را قطع نمی‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $|m|\leq۱$ ۲) $|m|\geq۱$ ۳) $|m|\leq۲$ ۴) $|m|>۲$

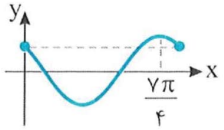
۱۶۲۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+ax}{x^۲+bx+c}$ به‌صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) -۱ ۲) -۲

۳) -۳ ۴) -۴

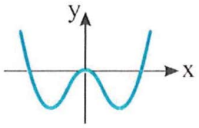
۱۶۲۹- نمودار تابع $f(x)=\cos x+a\sin x$ در یک دورهٔ تناوب به‌صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟

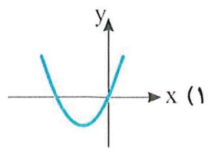


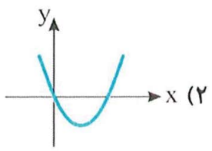
۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$

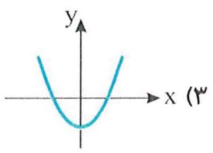
۳) -۱ ۴) $-\sqrt{۲}$

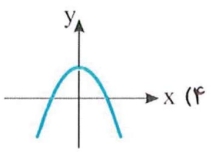
۱۶۳۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f'' به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

سؤال گا
۱۶۲۱ ۲۶ ۲۹
۱۶۲۲ ۲۶
۱۶۲۳ ۲۶ ۱
۱۶۲۴ ۲۶
۱۶۲۵ ۲۹
۱۶۲۶ ۲۷
۱۶۲۷ ۲۷
۱۶۲۸ ۹
۱۶۲۹ ۹
۱۶۳۰ ۲

آزمون ۱۶۴

آزمون فصل پنجم (۱)

سؤال	گام
۱۶۳۱	۲۰۸ ۲۰۹ ۳۱۳
۱۶۳۲	۲۱۵
۱۶۳۳	۲۱۲ ۳۱۶
۱۶۳۴	۲۱۲ ۳۱۲
۱۶۳۵	۲۱۰
۱۶۳۶	۲۱۷
۱۶۳۷	۲۱۰ ۲۱۸ ۲۱۹
۱۶۳۸	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۱۶۳۹	۲۱۴ ۲۲۵
۱۶۴۰	۲۲۷

۱۶۳۱- تابع $f(x)=ax^3-9x^2+3ax+3$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است. حدود a کدام است؟

۱) $a\leq -3$ ۲) $a\geq 3$ ۳) $-3\leq a\leq 3$ ۴) $a\leq -3$ یا $a\geq 3$

۱۶۳۲- تابع $f(x)=\begin{cases}|x-2|-2 & x\geq 0\\ -|x+2| & x<0\end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۲) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۳) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۱۶۳۳- اگر $f'(x)=x^3+5x^2+4x$ و $D_f=\mathbb{R}$، تابع f چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۲) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۴) دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۱۶۳۴- اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$ برابر -4 باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -8 ۲) -6 ۳) -3 ۴) -1

۱۶۳۵- عرض نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^2-17}{\sqrt{x+5}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) -8 ۳) $-\sqrt{8}$ ۴) 26

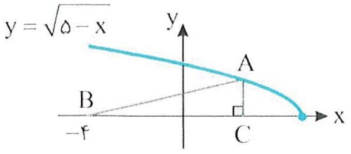
۱۶۳۶- مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=(x-2)^3(x+2)$ با دامنهٔ $[-2,2]$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -12 ۳) -24 ۴) -27

۱۶۳۷- اگر $x+2y=4$، کمترین مقدار ممکن $x+y^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۳۸- در شکل مقابل اگر مساحت مثلث ABC بیشترین مقدار ممکن باشد، طول نقطهٔ C کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۶۳۹- اگر نقطه‌های به طول $x=-1$ و $x=1$ نقطه‌های عطف نمودار تابع $f(x)=2x^4+ax^3+bx^2$ باشند، مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f چقدر است؟

۱) -6 ۲) -4 ۳) -12 ۴) صفر

۱۶۴۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{2x}{|x|+2}$ خط $y=m$ را قطع نمی‌کند. حدود m کدام است؟

۱) $|m|\leq 2$ ۲) $1\leq|m|\leq 2$ ۳) $|m|\geq 2$ ۴) $|m|\leq 1$

آزمون ۱۶۵ — آزمون فصل پنجم (۲)

۱۶۴۱- تابع $f(x)=\frac{x}{x^{۲}-۱}$:

۱) روی دامنه‌اش صعودی است.

۲) روی دامنه‌اش نزولی است.

۳) روی بازه‌های $(-\infty,-۱)$، $(-۱,۱)$ و $(۱,+\infty)$ صعودی است.

۴) روی بازه‌های $(-\infty,-۱)$، $(-۱,۱)$ و $(۱,+\infty)$ نزولی است.

۱۶۴۲- تابع $f(x)=\left||x|-۲\right|$ به‌ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۲ و ۱ ۲) ۱ و ۲ ۳) ۱ و ۱ ۴) ۲ و صفر

۱۶۴۳- تابع $f(x)=x^{۵}-۵x^{۴}+۱$ به‌ترتیب چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) ۱ و ۱ ۲) ۲ و صفر ۳) صفر و ۲ ۴) ۱ و صفر

۱۶۴۴- اگر $(-۱,۲)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{a}{۳}x^{۳}+۲bx^{۲}+۴x-\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۳۲ ۳) ۲۳ ۴) ۳۱

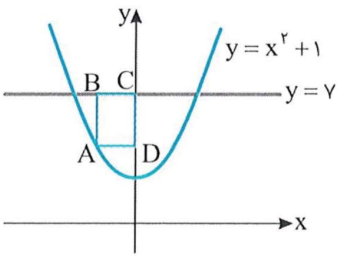
۱۶۴۵- تابع $f(x)=(x^{۲}-۱)\sqrt[۳]{x^{۲}}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۴۶- اگر حداکثر مقدار تابع $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$ در بازهٔ $[۱,۴]$ برابر $\frac{۹}{۴}$ باشد، مقدار a کدام است؟ $(۰<a<۱)$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۶۴۷- در شکل مقابل بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل ABCD کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۲}$

۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) $۶\sqrt{۲}$

۱۶۴۸- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}$ و دامنهٔ $[۰,+\infty)$ مفروض است. طول نزدیک‌ترین نقطه از نمودار این تابع به خط $y=۳x-۶$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۶۴۹- بزرگ‌ترین مقدار k به‌طوری که جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=ax^{۳}-۶x^{۲}+۳x-۱$ روی بازهٔ $(-\infty,k)$ رو به بالا باشد برابر -۲ است. مقدار a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶۵۰- نمودار توابع $f(x)=\frac{x-۱}{x-۲}$ و $g(x)=x^{۳}+۳x$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

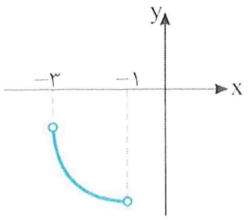
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۱۶۶

آزمون فصل پنجم (۳)

سؤال	گام
۱۶۵۱	۱۸۷ ۱۹۱ ۲۰۸
۱۶۵۲	۲۱۵
۱۶۵۳	۲۱۲ ۳۱۲
۱۶۵۴	۲۲ ۲۱۷
۱۶۵۵	۳۰ ۳۱ ۳۸ ۲۱۰
۱۶۵۶	۲۱۰ ۲۱۸ ۲۱۹
۱۶۵۷	۲۱۰ ۲۱۹
۱۶۵۸	۲۵ ۲۱۰ ۲۱۹
۱۶۵۹	۲۲۵
۱۶۶۰	۲۳۲

۱۶۵۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام تابع اکیداً صعودی است؟



۱) $y=x+f(x)$
۲) $y=f(x^۳)$
۳) $y=x^۲f(x)$
۴) $y=\frac{f(x)}{x}$

۱۶۵۲- تابع $f(x)=\begin{cases}۲-x^۲ & x>۰\\ x^۳-۱ & x\le ۰\end{cases}$ چند نقطهٔ ماکزیمم نسبی و چند نقطهٔ مینیمم نسبی دارد؟

۱) فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۲) فقط یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.
۳) یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.
۴) نه نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد و نه نقطهٔ مینیمم نسبی.

۱۶۵۳- عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۳x-x^۳}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۳}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $\sqrt[۳]{۲}$

۱۶۵۴- نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\sqrt{۴-x^۲}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) -۲
۳) $-\sqrt{۲}$
۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۶۵۵- تابع $f(x)=\left|x^۲|x|-۱\right|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

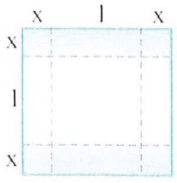
۱۶۵۶- اگر $x+y=۲$، کمترین مقدار ممکن $x^۳+y^۳$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۶۵۷- کمترین فاصلهٔ نقطه‌های $(x\,,۴)$ و $(۳x\,,x+۶)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$
۲) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$
۳) $\frac{۴}{\sqrt{۵}}$
۴) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

۱۶۵۸- مطابق شکل می‌خواهیم در چهار گوشهٔ ورقی مربعی به طول ضلع ۳۰ سانتی‌متر مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تاکردن ورق در امتداد خط‌چین‌ها یک جعبهٔ بدون در بسازیم. x کدام باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

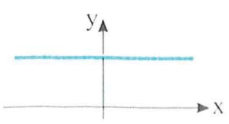


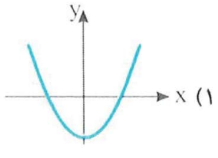
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

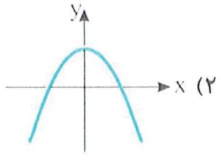
۱۶۵۹- عرض نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt[۳]{x-۱}$ کدام است؟

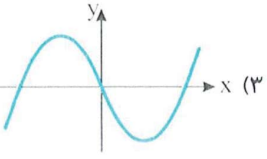
۱) ۱
۲) -۱
۳) صفر
۴) -۲

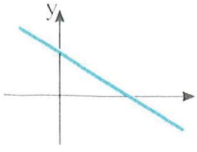
۱۶۶۰- نمودار تابع مشتق دوم تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

آزمون ۱۶۷ آزمون فصل پنجم (۴) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۱۶۶۱- تابع $f(x)=x^۴-۶x^۲+۸x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۰)

۱) مینیمم نسبی دارد.
۲) ماکزیمم نسبی دارد.
۳) هم مینیمم نسبی و هم ماکزیمم نسبی دارد.
۴) فاقد اکسترمم نسبی است.

۱۶۶۲- تابع $f(x)=\frac{a}{x}+bx^۲$ در نقطهٔ $(۱,-۲)$ اکسترمم نسبی دارد. مقدار a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟ (ریاضی - ۸۹)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ، ماکزیمم
۲) $-\frac{۴}{۳}$ ، ماکزیمم
۳) $\frac{۴}{۳}$ ، مینیمم
۴) $-\frac{۴}{۳}$ ، مینیمم

۱۶۶۳- طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=(x-۱)^۲\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۶۶۴- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x^۳-x|$ با دامنهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۰)

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۶۶۵- بیشترین مقدار تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲-۹x+۵$ در بازهٔ $[-۲,۲]$ کدام است؟ (تجربی - ۹۲)

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۷

۱۶۶۶- نمودارتابع $f(x)=-x^۴+۴x^۳-۳$ روی کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟ (تجربی - ۹۱)

۱) $(۲,۳)$
۲) $(۰,۲)$
۳) $(۰,۳)$
۴) $(۲,+\infty)$

۱۶۶۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۳x$ روی کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به بالاست؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۱)

۱) $(-۱,۱)$
۲) $(-۱,۳)$
۳) $(۱,۳)$
۴) $(۱,+\infty)$

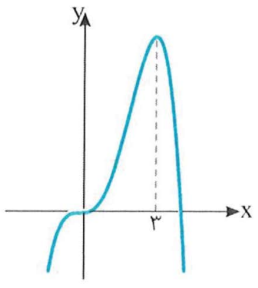
۱۶۶۸- بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟ (خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

۱) ۹۵۸
۲) ۹۶۸
۳) ۹۷۸
۴) ۹۸۸

۱۶۶۹- مجموعهٔ طول نقاط عطف نمودار تابع $y=x|x^۲-۴x|$ کدام است؟ (ریاضی - ۹۲)

۱) $\{\frac{۴}{۳}\}$
۲) $\{۰,\frac{۴}{۳},۴\}$
۳) $\{\frac{۴}{۳},۴\}$
۴) $\{۰,\frac{۴}{۳}\}$

۱۶۷۰- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=ax^۴+۲x^۳+bx^۲$ است. مقدار a کدام است؟ (تجربی - ۹۲)



۱) -۱
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

سؤال	گا
۱۶۶۱	۱۲ ۱۵
۱۶۶۲	۱۲ ۱۴ ۱۶
۱۶۶۳	۱۶
۱۶۶۴	۱۰
۱۶۶۵	۷
۱۶۶۶	۸ ۲
۱۶۶۷	۳
۱۶۶۸	۰ ۹
۱۶۶۹	۴
۱۶۷۰	۴

آزمون ۱۶۸ آزمون فصل پنجم (۵) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

سؤال	گام
۱۶۷۱	۲۱۲
۱۶۷۲	۲۷ ۲۱۵ ۳۳۶
۱۶۷۳	۲۱۰
۱۶۷۴	۱۹۴ ۲۱۰
۱۶۷۵	۲۱۷
۱۶۷۶	۲۲۲
۱۶۷۷	۲۲۲
۱۶۷۸	۲۱۴ ۲۲۴
۱۶۷۹	۲۲۹
۱۶۸۰	۲۳۲

۱۶۷۱- به ازای کدام مقادیر a، تابع $f(x)=x^۲+\frac{a}{x}$ ماکزیمم نسبی دارد؟ خارج از کشور ریاضی ۸۹

۱) $|a|>۲$ ۲) $a<۰$ ۳) $a>۰$ ۴) هیچ مقدار a

۱۶۷۲- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=۲^x$، آن‌گاه تابع gof از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟ ریاضی ۹۱

۱) ماکزیمم - مینیمم ۲) ماکزیمم - فاقد مینیمم

۳) فاقد ماکزیمم - مینیمم ۴) فاقد ماکزیمم - فاقد مینیمم

۱۶۷۳- مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x^۲-۲۸)\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟ تجربی ۸۳

۱) $\{-۲,۲\}$ ۲) $\{-\sqrt{۷},\sqrt{۷}\}$

۳) $\{-۲,۰,۲\}$ ۴) $\{-۷,۰,۱\}$

۱۶۷۴- تابع $f(x)=x|x^۲-۱|$ با دامنهٔ $[-۲,۲]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟ خارج از کشور ریاضی ۸۷

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۶۷۵- مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۱۵x$ روی بازهٔ $[-۴,۳]$ به‌ترتیب کدام است؟ تجربی ۹۵

۱) -۱۸ و ۲۴ ۲) -۴۵ و ۲۷

۳) -۳۶ و ۲۷ ۴) -۲۷ و ۳۶

۱۶۷۶- تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+۹}{x^۲+۱۲}$ در بازهٔ (a,b) رو به بالا است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ ریاضی ۸۸

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

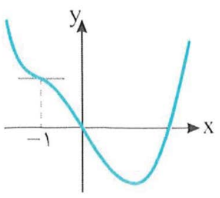
۱۶۷۷- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=(x+۳)\sqrt{x}$ روی بازهٔ (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $+\infty$

۱۶۷۸- اگر $A(۱,-۳)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع $y=ax^۳-x^۲-۳x+b$ باشد، مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن کدام است؟ تجربی ۹۶

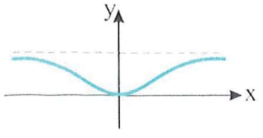
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

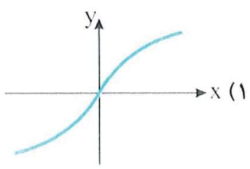
۱۶۷۹- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=x^۴-x^۳+ax^۲+bx$ است. مقدار b کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۴

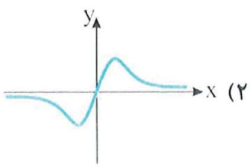


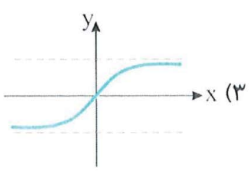
۱) -۱۱
۲) -۱۰
۳) -۹
۴) -۸

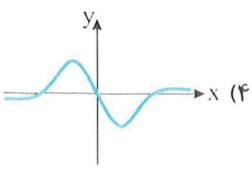
۱۶۸۰- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۳



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

آزمون ۱۶۹ — آزمون فصل پنجم (۶) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۱۶۸۱- تابع f در نقطهٔ c دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱) مثبت ۲) منفی ۳) نامنفی ۴) نامثبت

۱۶۸۲- تابع $f(x)=x|x^۲-۳|$، در چند نقطه، اکسترمم نسبی دارد؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶۸۳- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}$ بر روی دامنهٔ خود، کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۸۴- اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f روی دامنهٔ آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطهٔ c، کدام وضعیت را دارد؟ ریاضی - ۸۸

۱) پیوسته ۲) مشتق‌پذیر ۳) خط مماس افقی ۴) اکسترمم نسبی

۱۶۸۵- مجموعهٔ طول نقاطی که تقعر نمودار تابع $y=-\frac{۲}{x^۲+۳}$ رو به بالا باشد، به کدام صورت است؟ ریاضی - ۹۰

۱) $|x|<۱$ ۲) $|x|<۲$ ۳) $|x|>\sqrt{۲}$ ۴) $|x|>\sqrt{۳}$

۱۶۸۶- تقعر نمودار تابع $f(x)=x^۲|x-۳|$، در بازهٔ (a,b) به طرف y های منفی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۸۷- نمودار تابع $f(x)=\sin^۲ x-۲\sin x \;,\; x\in[۰,۲\pi]$ روی کدام بازه صعودی و جهت تقعر آن رو به پایین است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱) $(\frac{۷\pi}{۶},\frac{۳\pi}{۲})$ ۲) $(\frac{۳\pi}{۲},\frac{۱۱\pi}{۶})$

۳) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۶})$ ۴) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۶})$

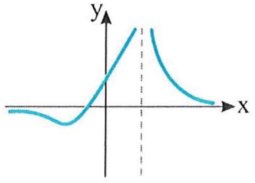
۱۶۸۸- اگر تابع‌هایی به‌صورت $f(x)=x^۳-(m+۲)x^۲+۳x$ همواره صعودی باشند، آن‌گاه مجموعهٔ طول نقاط عطف این توابع در کدام بازه است؟ تجربی - ۹۴

۱) $[-۲,۰]$ ۲) $[-۲,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[۰,۱]$

۱۶۸۹- مجموعهٔ طول نقاط عطف نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳-۳x^۲ & x\geq -۱ \\ -۱۳-\frac{۹}{x} & x<-۱ \end{cases}$ کدام است؟ ریاضی - ۸۹

۱) $\varnothing$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $\{-۱,۱\}$ ۴) $\{-۱\}$

۱۶۹۰- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{x^۲+bx+۴}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟ تجربی - ۹۳



۱) $b=۴$ و $a<۰$

۲) $b=-۴$ و $a<۰$

۳) $b=۴$ و $a>۰$

۴) $b=-۴$ و $a>۰$

سؤال: ۱۶۸۱ ۱۶۸۲ ۱۶۸۳ ۱۶۸۴ ۱۶۸۵ ۱۶۸۶ ۱۶۸۷ ۱۶۸۸ ۱۶۸۹ ۱۶۹۰

آزمون ۱۷۰ آزمون فصل پنجم (۷) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

سؤال	گام
۱۶۹۱	۲۱۰ ۲۱۲
۱۶۹۲	۱۹۴ ۱۹۶ ۲۱۰
۱۶۹۳	۲۱۶
۱۶۹۴	۲۱۷ ۲۱۸
۱۶۹۵	۲۲۲
۱۶۹۶	۲۰۸ ۲۲۲
۱۶۹۷	۲۲۴
۱۶۹۸	۲۱۹
۱۶۹۹	۲۲۹
۱۷۰۰	۲۲۹

۱۶۹۱- تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده است و $a<c<b$. کدام بیان نادرست است؟ ریاضی ۹۰

۱) اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه خط مماس بر نمودار تابع در c افقی است.
۲) اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه c نقطهٔ بحرانی است.
۳) اگر c نقطهٔ بحرانی باشد، آن‌گاه c نقطهٔ اکسترمم نسبی است.
۴) اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق باشد، آن‌گاه c نقطهٔ بحرانی است.

۱۶۹۲- نقاط بحرانی روی نمودار تابع $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۲

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶۹۳- کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$ کدام است؟ ریاضی ۹۲

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) صفر

۱۶۹۴- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-x$ با بیشترین شیب ممکن محور y را با کدام عرض قطع می‌کند؟ خارج از کشور ریاضی ۹۷

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{7}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

۱۶۹۵- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x\sqrt{x^2+2}$ روی بازهٔ $(a,+\infty)$ رو به بالاست. کمترین مقدار a کدام است؟ تجربی ۹۲

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۱۶۹۶- نمودار تابع $f(x)=\cos^2 x-2\cos x \;,\; x\in[0,2\pi]$ روی کدام بازه نزولی و جهت تقعر آن رو به پایین است؟ ریاضی ۹۶

۱) $(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$ ۲) $(\pi,\frac{4\pi}{3})$ ۳) $(\frac{2\pi}{3},\pi)$ ۴) $(\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2})$

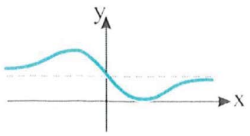
۱۶۹۷- طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $y=(5-x)\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟ ریاضی ۹۵

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶۹۸- نقطه‌ای با کدام طول روی محور x انتخاب شود، به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ $A(1,5)$ و $B(7,-2)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟ ریاضی ۹۳

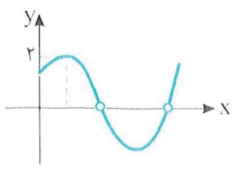
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۶۹۹- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x^2+1}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ ریاضی ۹۱



۱) $(1,-2)$ ۲) $(1,2)$
۳) $(2,-4)$ ۴) $(2,4)$

۱۷۰۰- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{a\sin 2x+b}{\sin x+\cos x}$ در یک دورهٔ تناوب است. مقدار a کدام است؟ ریاضی ۹۳

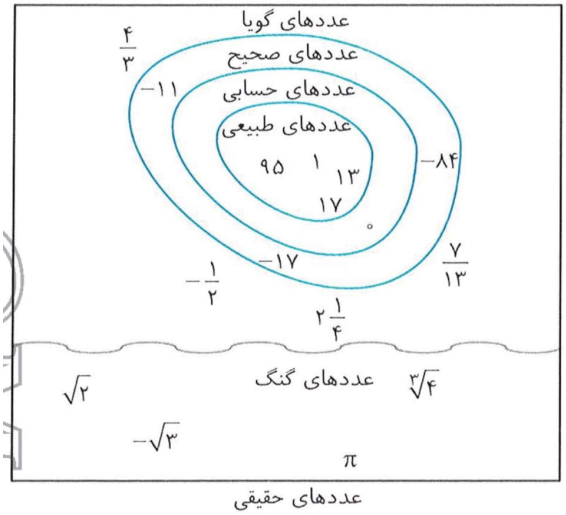


۱) -1
۲) ۱
۳) $\sqrt{2}$
۴) ۲

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد معروف



مجموعه‌های زیر از مهم‌ترین مجموعه‌های اعداد هستند که با آن‌ها سر و کار داریم:

مجموعهٔ اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی : $\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\ldots\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

مجموعهٔ اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\}$

مجموعهٔ اعداد گنگ : $\mathbb{Q}'=\{a|a\notin\mathbb{Q}\}$

مجموعهٔ اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

نکته

رابطه‌های $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ بین مجموعه‌های بالا برقرار است.

تست ۱ کدام‌یک درست نیست؟

۱) $\mathbb{W}=\mathbb{N}\cup\{0\}$ ۲) $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ۳) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$ ۴) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

راه‌حل واضح است که اجتماع اعداد صحیح با اعداد گنگ شامل بعضی از اعداد گویا مانند $\frac{2}{3}$ نمی‌شود. بنابراین $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}'\neq\mathbb{R}$.

تذکر نمادهای $\mathbb{Z}^+$، $\mathbb{Z}^-$، $\mathbb{Q}^+$، $\mathbb{Q}^-$، $\mathbb{R}^+$، $\mathbb{R}^-$ و ... را نیز می‌توان به کار برد. مثلاً $\mathbb{Z}^-$ یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح منفی. همچنین $\mathbb{Q}^+$ یعنی مجموعهٔ اعداد گویای مثبت و ....

بازه‌ها

برخی از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی که بسیار کاربرد دارند، بازه‌ها هستند. اگر $a<b$، انواع بازه‌ها را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a\leq x<b\}$



$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a\leq x\leq b\}$



$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$



$(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}|x\leq a\}$



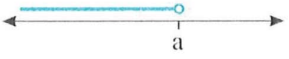
$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}|x\geq a\}$



$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a<x\leq b\}$



$(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}|x<a\}$



$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}|x>a\}$



کل اعداد حقیقی را با بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ نشان می‌دهیم.

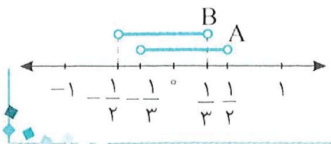
طول بـــازه

برای بازه‌های (a,b)، $[a,b)$، $(a,b]$ و $[a,b]$ عدد حقیقی $b-a$ را **طول بازه** می‌نامیم.

تست ۲ اگر $A=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})$ و $B=(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$، حاصل $A\cap B$ کدام است؟

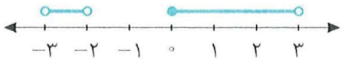
۱) $\{۰\}$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$

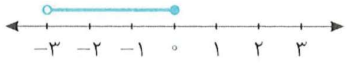
راه‌حل بازه‌های A و B را روی محور نشان می‌دهیم. از روی شکل معلوم است که $A\cap B=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$.

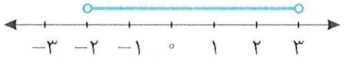


تست ۳ نمودار مجموعهٔ $(-۳,۳)-[-۲,۰)$ کدام است؟

۱)

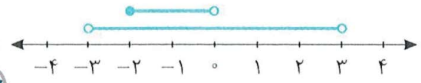

۲)


۳)


۴)


راه‌حل هر دو بازه را روی محور نشان می‌دهیم. از روی شکل معلوم است که

$$(-۳,۳)-[-۲,۰)=(-۳,-۲)\cup[۰,۳)$$



تست ۴ فرض کنید $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq\frac{۱}{۴},x\leq\frac{۱}{۲}\}$ و $B=\{\frac{۱}{n}\in\mathbb{Q}\,|\,n\in(۱,۴]\cap\mathbb{Z}\}$. در این صورت $A-B$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۳})\cup(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$ ۲) $[\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۳})\cup(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۳})\cup(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})$ ۴) $[\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۳}]\cup(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$

راه‌حل توجه کنید که $A=[\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲}]$ و $B=\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴}\}$. بنابراین $A-B$ از همهٔ عددهای A به جز $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ تشکیل شده است. پس

$$A-B=(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۳})\cup(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})$$

تست ۵ اگر عدد ۳ در بازهٔ $[۲a-۱,۵a+۷)$ قرار داشته باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $[-۰/۸,۰/۸)$ ۲) $[-۰/۸,۲)$ ۳) $(-۰/۸,۲]$ ۴) $(-۲,۲]$

راه‌حل چون عدد ۳ در این بازه قرار دارد، پس $۲a-۱<۳\leq۵a+۷$. حال برای تعیین محدودهٔ تغییرات a، هر یک از دو نامعادلهٔ $۳\leq۵a+۷$ و $۲a-۱<۳$ را حل نموده و در نهایت اشتراک جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۳\leq۵a+۷\Rightarrow-۴\leq۵a\Rightarrow a\geq-\frac{۴}{۵}=-۰/۸ & (۱)\\ ۲a-۱<۳\Rightarrow۲a<۴\Rightarrow a<۲ & (۲)\end{cases}\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}-۰/۸\leq a<۲$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر a بازهٔ $[-۰/۸,۲)$ است.

تست ۶ اگر $۰<a<۱$، مجموعهٔ $(۰,a^۲)\cap(a,۳)$ کدام است؟

۱) $(۰,a)$ ۲) $(a^۲,a)$ ۳) $(a,۳)$ ۴) $\varnothing$

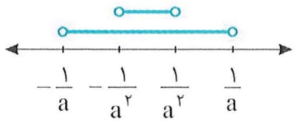
راه‌حل چون $۰<a<۱$، پس $۰<a^۲<a$. بنابراین اشتراک دو بازه تهی است.



تست ۷ اگر $a>1$، مجموعهٔ $(-\frac{1}{a},\frac{1}{a})\cap(-\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^2})$ کدام است؟

۱) $(-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$ ۲) $(-\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^2})$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(-\frac{1}{a},\frac{1}{a^2})$

راه‌حل چون $a>1$، پس $a^2>a$ و در نتیجه $\frac{1}{a}<\frac{1}{a^2}$ و $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{a^2}$. به این ترتیب نمایش بازه‌ها روی محور، به شکل روبه‌رو است. از روی شکل معلوم است که مجموعهٔ مورد نظر $(-\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^2})$ است.

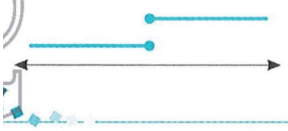


تست ۸ اگر $(-\infty,2-\frac{m-1}{3}]\cap[m-3,+\infty)$ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) -1

راه‌حل از روی شکل مقابل معلوم است که اگر اشتراک دو بازه، مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد، باید $2-\frac{m-1}{3}=m-3$.

پس $m=4$.

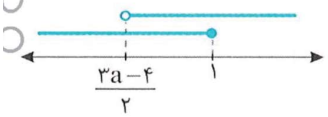


تست ۹ اگر اجتماع دو بازهٔ $(\frac{3a-4}{2},+\infty)$ و $(-\infty,1]$ برابر با مجموعهٔ اعداد حقیقی شود، کدام یک درست است؟

۱) $a\leq 1$ ۲) $a\leq 2$ ۳) $a=1$ ۴) $a=2$

راه‌حل ابتدا هر دو بازه را روی محور اعداد حقیقی نمایش می‌دهیم. اکنون با توجه به شکل روبه‌رو، برای اینکه اجتماع دو بازه برابر با مجموعهٔ اعداد حقیقی شود، لازم است داشته باشیم:

$$\frac{3a-4}{2}\leq 1\Rightarrow 3a-4\leq 2\Rightarrow 3a\leq 6\Rightarrow a\leq 2$$



تست ۱۰ اگر طول بازهٔ $(-2a-1,a+4)$ برابر ۱۴ باشد، طول بازهٔ $(a-4,5a+3)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

راه‌حل توجه کنید که طول بازهٔ $(-2a-1,a+4)$ برابر است با $(a+4)-(-2a-1)$. بنابراین $3a+5=14$، پس $a=3$. پس طول بازهٔ $(a-4,5a+3)$ برابر است با $(5a+3)-(a-4)=4a+7=19$.

دست‌گرمی

۲۴۵- چند عدد صحیح در مجموعهٔ $A=[-4,4]\cap((-\infty,-2]\cup(2,+\infty))$ قرار دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۴۶- اگر عدد ۲ در بازهٔ $[2a,3+a]$ قرار داشته باشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $[-1,1)$ ۲) $(-1,1]$ ۳) $(-1,0]$ ۴) $[0,1]$

۲۴۷- اگر $-1<a<0$، مجموعهٔ $(a,\frac{1}{a^2})\cap(a^2,\frac{1}{a^4})$ کدام است؟

۱) $(a,\frac{1}{a^2})$ ۲) $(a,\frac{1}{a^4})$ ۳) $(a^2,\frac{1}{a^4})$ ۴) $(a^2,\frac{1}{a^2})$

۲۴۸- اگر $(1,2+a^2)\cap(4-a^2,5)=\varnothing$، آن‌گاه مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,1]$

آزمون ۱۷۱ مجموعه‌های اعداد (۱)

۱۷۰۱- اگر $A=(-\infty,3)$ ، $B=(-2,5]$ و $C=[3,4]$ ، مجموعهٔ $(A\cap B)\cup C$ کدام است؟

۱) $(-2,5]$ ۲) $(3,5)$ ۳) $(-\infty,4)$ ۴) $(-2,4]$

۱۷۰۲- مجموعهٔ $((-\infty,3)\cup[2,+\infty))-(1,4]$ برابر کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$

۳) $(4,+\infty)$ ۴) $(-\infty,1)\cup[5,+\infty)$

۱۷۰۳- به‌ازای چند عدد طبیعی مانند n عدد $\frac{1}{4}$ در بازهٔ $(\frac{1}{n+3},\frac{1}{n+1}]$ قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۷۰۴- اگر نقطهٔ وسط بازهٔ $[-a^2,2a^2+1]$ روی محور اعداد حقیقی متناظر با عدد ۵ باشد، طول این بازه چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۹ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۱۷۰۵- اگر $(-1,1)\subseteq(a+3,b)$ ، کمترین مقدار ممکن $b-a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۷۰۶- طول بازهٔ $(a,b+2)$ چند برابر طول بازهٔ $(2a-1,2b+3)$ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

۱۷۰۷- اگر $0<a<1$ ، مجموعهٔ $(-a,a)\cap(-a^2,a^3)$ کدام است؟

۱) $\{0\}$ ۲) $(-a,a)$ ۳) $(-a^2,a^3)$ ۴) $(-a,-a^2)$

۱۷۰۸- اگر $A_n=[1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]$ ، حاصل $A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{10}$ کدام است؟

۱) $[\frac{9}{10},\frac{11}{10}]$ ۲) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ ۳) $[\frac{1}{2},\frac{11}{10}]$ ۴) $[\frac{9}{10},\frac{3}{2}]$

۱۷۰۹- اگر $A=(-1,1]$ ، $B=[a,b)$ ، $A\cap B=[0,1)$ و $A\cup B=(-1,4)$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۱۰- اگر اشتراک دو بازهٔ $(-\infty,a+4)$ و $[-2a+1,+\infty)$ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

سؤال	گام
۱۷۰۱	۲۳۴
۱۷۰۲	۲۳۴
۱۷۰۳	۲۳۴
۱۷۰۴	۲۳۴
۱۷۰۵	۲۳۴
۱۷۰۶	۲۳۴
۱۷۰۷	۲۳۴ ۲۷۴
۱۷۰۸	۲۳۴
۱۷۰۹	۲۳۴
۱۷۱۰	۲۳۴

۱۷۱۱- اگر $A=[-۲,۲]$ و $B=(۰,۴)$، کدام مجموعه برابر با $(۲,۴)$ است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) $B-A$ ۴) $A-B$

۱۷۱۲- اگر $A=(-۱,۳)$ و $A\cap B=(۱,۲)$، مجموعهٔ $A-B$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱]$ ۲) $[۲,۳)$ ۳) $(-۱,۱)\cup(۲,۳)$ ۴) $(-۱,۱]\cup[۲,۳)$

۱۷۱۳- اگر a عضو بازهٔ $(۲a-۱,۳-۳a)$ باشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $(-\infty,\frac{۳}{۴})$ ۳) $(-\infty,\frac{۴}{۵})$ ۴) $(-\infty,۰)$

۱۷۱۴- حداکثر طول بازهٔ $(a-۵,۲a+۱)$ برابر ۴ است. حداکثر طول بازهٔ $(a-۶,۳a-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۱۵- اگر $(b,۴)\cap[-۲,a)=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})$، حاصل $(b,a)\cup(-۲a-۱,b)$ کدام است؟

۱) $(-۳,۱)$ ۲) $(-۲,\frac{۱}{۲})$ ۳) $(۱,۴)$ ۴) $(-۲,\frac{۱}{۲})-\{-\frac{۱}{۳}\}$

۱۷۱۶- اگر $[a,۲]\cap[a+۲,b]=[-۲,۱]$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) صفر

۱۷۱۷- اگر $(-\infty,۲a+۱]\cup(۳a-۱,+\infty)=\mathbb{R}$، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $\{۲\}$ ۲) $(۲,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۲]$ ۴) $(-\infty,۲)$

۱۷۱۸- اگر اشتراک دو بازهٔ $[۱-۲a,۱+۲a]$ و $[-۵,-۳]$ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۳

۱۷۱۹- اگر $n\in\mathbb{N}$ و بازهٔ $(\frac{۱}{n},\frac{n+۲}{۲})$ فقط شامل یک عدد طبیعی باشد، چند مقدار برای n وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) نامتناهی

۱۷۲۰- فرض کنید $A=(۰,a+۲]$ و $B=(۲a-۱,+\infty)$. اگر $A\cap B\subseteq(۱,۳]$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a=۱$ ۲) $a\in(۳,+\infty)$ ۳) $a\in[۳,+\infty)\cup\{۱\}$ ۴) $a\in[۱,۴]$

سؤال	گ
۱۷۱۱	۴
۱۷۱۲	۴
۱۷۱۳	۴
۱۷۱۴	۴
۱۷۱۵	۴
۱۷۱۶	۴
۱۷۱۷	۴
۱۷۱۸	۴
۱۷۱۹	۴
۱۷۲۰	۴

درس دوم: مجموعه‌ها

۲۳۵

تعریف

مجموعه‌ای که تعداد اعضایش عددی حسابی باشد، **مجموعه‌ای متناهی** است و مجموعه‌ای که متناهی نباشد، **مجموعه‌ای نامتناهی** است.

نکته

- هر زیرمجموعه از مجموعه‌ای متناهی، خودش متناهی است. پس اگر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد، خودش هم نامتناهی است.
- هر مجموعه یا متناهی است یا نامتناهی.
- مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی‌اند. همچنین بازه‌ها، مجموعه‌هایی نامتناهی هستند.

تست ۱

چندتا از جمله‌های زیر درست هستند؟

الف) هر زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای متناهی، متناهی است.

ب) هر زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای نامتناهی، نامتناهی است.

پ) اگر مجموعه‌ای یک زیرمجموعهٔ متناهی داشته باشد، خودش هم متناهی است.

ت) اگر مجموعه‌ای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی داشته باشد، ممکن است خودش متناهی باشد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل

جملهٔ «الف» درست است. جملهٔ «ب» نادرست است. مثلاً $\{1\}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ است. جملهٔ «پ» نادرست است. مثلاً $\{1.2\}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ است. جملهٔ «ت» نادرست است. اگر مجموعه‌ای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی داشته باشد، خودش هم نامتناهی است.

۲۳۶

نکته

۱) اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، آن‌گاه $A\cup B$، $A\cap B$ و $A-B$ هم مجموعه‌هایی متناهی هستند.

۲) اگر A و B دو مجموعهٔ نامتناهی باشند، آن‌گاه $A\cup B$ مجموعه‌ای نامتناهی است ولی $A\cap B$ و $A-B$ می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.

۳) اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشند، آن‌گاه $A\cup B$ و $A-B$ مجموعه‌هایی نامتناهی هستند ولی $A\cap B$ مجموعه‌ای متناهی است.

تست ۲

کدام‌یک درست است؟

۱) اگر $A\cup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A و B نامتناهی‌اند.

۲) اگر $A\cap B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی‌اند.

۳) اگر $A\cup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی‌اند.

۴) اگر $A\cap B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A یا B می‌توانند متناهی باشند.

راه‌حل

اگر $A\cup B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B قطعاً متناهی هستند، چون اگر یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، اجتماع آن با هر مجموعهٔ دیگری نامتناهی خواهد بود.

اصلاح شدهٔ سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) اگر $A\cup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A یا B یا هر دو نامتناهی‌اند.

گزینهٔ (۲) اگر $A\cap B$ متناهی باشد، آن‌گاه از A و B، هر کدام می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.

گزینهٔ (۴) اگر $A\cap B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A و B نامتناهی‌اند.

۲۳۷

تعریف

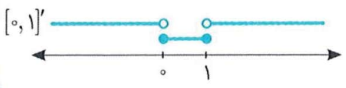
- در هر بحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن هستند، **مجموعهٔ مرجع** می‌نامند.
- اگر U مجموعهٔ مرجع باشد و $A\subseteq U$، مجموعهٔ $U-A$ را **متمم** A در U می‌نامند و آن را با A' نشان می‌دهند. A' شامل تمام اعضایی از U است که عضو A نیستند.

مثال: فرض کنید $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ مجموعهٔ مرجع باشد، $A=\{1,3\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$. توجه کنید که $A\subseteq B$. از طرف دیگر $A'=\{2,4,5,6,7\}$ و $B'=\{5,6,7\}$.

مثال: فرض کنید $U=\{1,2,3,4,5\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A=\{1,2,3\}$. در این‌صورت $A'=\{4,5\}$ و $(A')'=\{1,2,3\}$.

مثال: اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ باشد، متمم $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گنگ است.

مثال: اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $[0,1]'=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.



نکته ۲۳۸

فرض کنید U مجموعهٔ مرجع و A و B دو زیرمجموعهٔ دلخواه از U باشند.

- اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $B'\subseteq A'$.
- $U'=\varnothing$ و $\varnothing'=U$.
- $(A')'=A$.

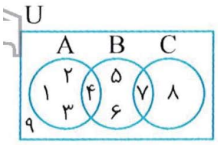
نکته ۲۳۹

برای هر دو مجموعهٔ A و B،

- $(A\cup B)'=A'\cap B'$
- $(A\cap B)'=A'\cup B'$
- $A-B=A\cap B'$

تست ۳

در نمودار وِن مقابل، مجموعهٔ $A'\cap(B\cap C)'$ کدام است؟



۱) $\{5,6,8\}$ ۲) $\{5,6,7,8\}$

۳) $\{5,6,9\}$ ۴) $\{5,6,8,9\}$

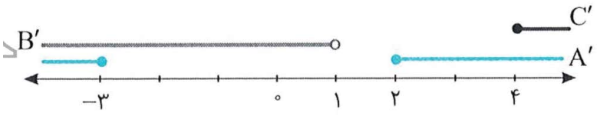
راه‌حل ابتدا توجه کنید که $A'=\{5,6,7,8,9\}$ و $B\cap C=\{7\}$، پس $(B\cap C)'=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$. بنابراین $A'\cap(B\cap C)'=\{5,6,8,9\}$.

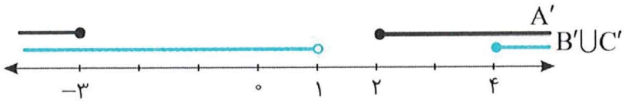
تست ۴

اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ باشد، $A=(-3,2)$، $B=[1,+\infty)$ و $C=(-\infty,4)$، مجموعهٔ $A'\cap(B'\cup C')$ کدام است؟

۱) $(-3,4)$ ۲) $(-\infty,2)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$

راه‌حل به نمودارهای شکل‌های زیر توجه کنید. بنابراین $A'\cap(B'\cup C')=(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$.





نکته ۲۴۰

- اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای آن را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.
- اگر U مجموعهٔ مرجع و متناهی و A زیرمجموعه‌ای از U باشد، آن‌گاه $n(A)+n(A')=n(U)$.
- اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه $n(A)\le n(B)$.

تست ۵

A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U هستند. اگر $n(A)+n(B')=19$ و $n(A')+n(B)=25$، مقدار $n(U)$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

راه‌حل اگر طرفین تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$n(A)+n(A')+n(B)+n(B')=44\Rightarrow n(U)+n(U)=44\Rightarrow n(U)=22$$

نکته ۲۴۱ — تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، آن‌گاه

- $n(A)\le n(A\cup B)$ و $n(A\cap B)\le n(A)$
- $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

تست ۶

اگر $n(A)=n(B)$ ، $n(A\cap B)=۴$ و $n(A\cup B)=۱۲$ ، مقدار $n(A)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

راه‌حل

توجه کنید که $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۱۲=n(A)+n(A)-۴\Rightarrow ۱۶=۲n(A)\Rightarrow n(A)=۸$

تست ۷

هریک از مسافران هواپیمایی که ۳۵۰ نفر مسافر دارد، دست‌کم به یکی از دو زبان فارسی و انگلیسی صحبت می‌کند. ۲۷۰ نفر می‌توانند فارسی و ۹۰ نفر می‌توانند انگلیسی صحبت کنند. چند نفر فقط می‌توانند فارسی صحبت کنند؟

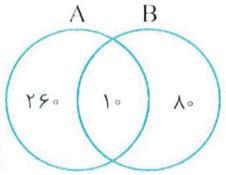
۱) ۱۰ ۲) ۸۰ ۳) ۲۶۰ ۴) ۲۷۰

راه‌حل

فرض کنید مجموعهٔ افرادی که می‌توانند فارسی صحبت کنند A و مجموعهٔ افرادی که می‌توانند انگلیسی صحبت کنند، B باشد. در این صورت $n(A\cup B)=۳۵۰$ ، $n(A)=۲۷۰$ و $n(B)=۹۰$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۳۵۰=۲۷۰+۹۰-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$$

وضعیت مجموعه‌های A و B را در نمودار مقابل نشان داده‌ایم. بنابراین تعداد کسانی که فقط می‌توانند فارسی صحبت کنند ۲۶۰ نفر است.



تست ۸

از ۲۰۰ نفر دانش‌آموز پایهٔ دهم یک مدرسه، ۱۷۵ نفر به فوتبال و ۱۷۰ نفر به شطرنج علاقه‌مند هستند. در این پایه دست‌کم چند دانش‌آموز هم به فوتبال و هم به شطرنج علاقه دارند؟

۱) ۱۴۵ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۱۵۰

راه‌حل

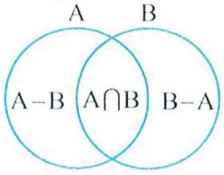
فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزان علاقه‌مند به فوتبال و B مجموعهٔ دانش‌آموزان علاقه‌مند به شطرنج باشد. همچنین فرض کنید تعداد کسانی که نه به فوتبال علاقه دارند و نه به شطرنج، x باشد. در این صورت $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۲۰۰-x=۱۷۵+۱۷۰-n(A\cap B)$

بنابراین $n(A\cap B)=۱۴۵+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ کمترین مقدار ممکن باشد. باید $x=۰$ و درنتیجه کمترین مقدار $n(A\cap B)$ برابر ۱۴۵ است.

نکته ۲۴۲

برای هر دو مجموعهٔ A و B،

- $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
- $n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A-B)+n(B-A)$



تست ۹

اگر $n(A\cup B)=۱۰$ ، $n(A\cap B)=۲$ و $n(A-B)=۳$ ، مقدار $n(B-A)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل

با توجه به نکتهٔ بالا، $n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A-B)+n(B-A)$. بنابراین $۱۰-۲=۳+n(B-A)\Rightarrow n(B-A)=۵$

تست ۱۰

در یک کارخانه، عیوب ۷۰ محصول معیوب بررسی شد و معلوم شد تعداد محصولاتی که فقط عیب A را دارند، دو برابر تعداد محصولاتی است که فقط عیب B را دارند. همچنین تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند، نصف تعداد محصولاتی است که فقط عیب B را دارند. چند محصول فقط عیب A را دارند؟

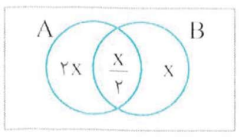
۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

راه‌حل

اگر تعداد محصولاتی که فقط عیب B را دارند، با x نشان دهیم. آن‌گاه

$$x+۲x+\frac{x}{۲}=۷۰\Rightarrow x=۲۰$$

پس تعداد محصولاتی که فقط عیب A را دارند، ۴۰ عدد است.



تعریف دو مجموعهٔ جدا از هم ۲۴۳

اگر A و B دو مجموعه باشند که عضو مشترک ندارند، گوییم A و B جدا از هم (مجزا) هستند. در این‌صورت، $n(A\cap B)=۰$.

تست ۱۱ اگر $A=[2n-1,3n-2)$ و $B=[-1,2]$ دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، n چند مقدار طبیعی را نمی‌تواند اختیار کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل ابتدا دقت کنید که باید $2n-1<3n-2$، در نتیجه $n>1$. برای اینکه دو بازهٔ A و B جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول روی محور اعداد حقیقی، بازهٔ A قبل از بازهٔ B قرار گیرد، یعنی

$$3n-2<-1\Rightarrow 3n<1\Rightarrow n<\frac{1}{3}\xrightarrow{n>1}\varnothing$$

حالت دوم روی محور اعداد حقیقی، بازهٔ A بعد از بازهٔ B قرار گیرد، یعنی

$$2<2n-1\Rightarrow 3<2n\Rightarrow \frac{3}{2}<n\xrightarrow{n>1} n>\frac{3}{2}$$

بنابراین فقط به ازای عدد طبیعی یک، دو بازهٔ داده شده جدا از هم نیستند.

تست ۱۲ اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آن‌گاه کدام دو مجموعهٔ زیر جدا از هم هستند؟

۱) A' و B' ۲) $A-B$ و B ۳) A' و $B-A$ ۴) A و $B'-A'$

راه‌حل با توجه به اینکه A و B جدا از هم هستند، $A-B$ همان A است و در نتیجه جدا از B است.

بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است. فرض کنید $U=\{1,2,3\}$، $A=\{1\}$ و $B=\{2\}$:

گزینهٔ (۱) A' و B' دو مجموعهٔ جدا از هم نیستند. $\Rightarrow A'=\{2,3\}\ ,\ B'=\{1,3\}$

گزینهٔ (۳) A' و $B-A$ دو مجموعهٔ جدا از هم نیستند. $\Rightarrow A'=\{2,3\}\ ,\ B-A=\{2\}$

گزینهٔ (۴) $B'-A'$ و A دو مجموعهٔ جدا از هم نیستند. $\Rightarrow B'-A'=\{1,3\}-\{2,3\}=\{1\}\ ,\ A=\{1\}$

دست‌گرمی

۲۴۹- در مورد دو مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid \frac{10}{x}\in\mathbb{Z}\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid \frac{1}{x}>1\}$ کدام گزینه درست است؟

۱) A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی است.
۲) A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی است.
۳) A و B هر دو مجموعه‌هایی متناهی‌اند.
۴) A و B هر دو مجموعه‌هایی نامتناهی‌اند.

۲۵۰- کدام‌یک همواره درست است؟

۱) اگر $A-B$ متناهی باشد، آن‌گاه A و B متناهی‌اند.
۲) اگر $A-B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه A و B نامتناهی‌اند.
۳) اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، آن‌گاه $A-B$ نامتناهی است.
۴) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، آن‌گاه $A-B$ نامتناهی است.

۲۵۱- اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ باشد، مجموع اعداد صحیح عضو متمم مجموعهٔ $A=(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -2 ۳) ۲ ۴) صفر

۲۵۲- در یک کلاس ۵۰ نفره، ۳۰ نفر به فوتبال و ۳۵ نفر به والیبال علاقه دارند. اگر ۱۰ نفر به هیچ رشته‌ای علاقه نداشته باشند، چند نفر به هر دو رشته علاقه دارند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۲۵۳- اگر $n(A\cup B)=20$ و $n(A\cap B)=4$، حاصل $n(A-B)+n(B-A)$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۲۵۴- اگر بازه‌های $(-3,2)$ و $[a-1,3a+2]$ جدا از هم باشند، حدود a کدام است؟

۱) $a\geq 3$
۲) $a\leq -\frac{5}{3}$
۳) $-\frac{5}{3}\leq a\leq -\frac{3}{2}$ یا $a\geq 3$
۴) $a\leq -\frac{5}{3}$ یا $a\geq 3$

۲۵۵- کدام دو مجموعه جدا از هم نیستند؟

۱) $A\cup B$ و $A\cap B$
۲) $A-B$ و $B-A$
۳) $A\cap B$ و $A-B$
۴) $A\cap B$ و $B-A$

آزمون ۱۷۳ مجموعه‌ها (۱)

۱۷۲۱- اگر $A\subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

۱) A' ۲) B' ۳) $A\cap B'$ ۴) $A'\cup B$

۱۷۲۲- اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه قطعاً متناهی است؟

۱) $A\cap B'$ ۲) $A\cup B$ ۳) $A'\cup B$ ۴) $A'\cap B$

۱۷۲۳- اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{N}$ باشد، $A=\{1,3,4,5\}$، $B'=\{1,2,5,7\}$ و $C'=\{2,5\}$، مجموعهٔ $A-(B\cap C)$ کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{1,5\}$ ۳) $\{2,5\}$ ۴) $\{5\}$

۱۷۲۴- اگر مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ باشد و $A=\{x\,||x-5|>3\}$، مجموعهٔ A' چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۷۲۵- اگر A، B و C سه زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، $n(A)+n(B')=17$ و $n(B)+n(A')=13$، مقدار $n(C)+n(C')$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۷۲۶- اگر $n(A\cup B)+n(A\cap B)=24$ و $n(A)=2n(B)$، مقدار $n(B)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۷۲۷- اگر $n(A)+n(B)=24$، $n(A\cup B)=16$ و $n(B-A)=3$، مقدار $n(A-B)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۷۲۸- در بررسی ۴۵ محصول معیوب یک کارخانه که حداقل یکی از عیب‌های A و B را دارند، مشخص شد ۳۰ عدد از محصولات عیب A و ۲۰ عدد از آن‌ها فقط عیب A را دارند. چند محصول این شرکت فقط یک عیب را دارند؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۱۷۲۹- در نظرسنجی از ۱۰۰ نفر، ۶۵ نفر اعلام کردند که برنامه‌های شبکهٔ ۱ را می‌بینند و ۴۵ نفر اعلام کردند که برنامه‌های شبکهٔ ۲ را می‌بینند. اگر ۲۰ نفر برنامه‌های هر دو شبکه را تماشا کنند، چند نفر برنامه‌های هیچ‌یک از دو شبکه را تماشا نمی‌کنند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۷۳۰- اگر $n(A)=3k-1$، $n(B)=3$ و $n(A\cap B)=k-2$، بیشترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

سؤال	گام
۱۷۲۱	۲۳۵ ۲۳۶ ۲۳۷
۱۷۲۲	۲۳۵ ۲۳۶ ۲۳۷
۱۷۲۳	۲۳۷
۱۷۲۴	۲۳۷ ۳۲۷
۱۷۲۵	۲۴۰
۱۷۲۶	۲۴۱
۱۷۲۷	۲۴۱ ۲۴۳
۱۷۲۸	۲۴۱
۱۷۲۹	۲۴۱
۱۷۳۰	۲۴۱

آزمون ۱۷۴ مجموعه‌ها (۲)

۱۷۳۱- کدام گزینه درست نیست؟

۱) اگر تمام زیر مجموعه‌های مجموعهٔ A متناهی باشند، مجموعهٔ A متناهی است.

۲) اجتماع دو مجموعهٔ متناهی، متناهی است.

۳) اشتراک دو مجموعهٔ نامتناهی حتماً نامتناهی است.

۴) اجتماع دو مجموعهٔ نامتناهی، نامتناهی است.

۱۷۳۲- اگر مجموعهٔ مرجع $\{1,2,3,4,5,6\}$ باشد، $A=\{1,3,5\}$، $B=\{3,5\}$ و $C=\{1,2,5\}$، مجموعهٔ $C\cap(A\cap B)'$ کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{1,2\}$ ۳) $\{1,5\}$ ۴) $\{2,5\}$

۱۷۳۳- اگر $A=(1,2]$، $B=(-1,1]$ و $C=(-\infty,0)$، حاصل $(A'-B')-C'$ کدام است؟

۱) $(-1,1]$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(-1,0)$

۱۷۳۴- اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی باشد، $A=\{1,6,7\}$، $B=\{3,5,7\}$ و $C'=\{1,4,5,6\}$، مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۷۳۵- اگر $A=[n-1,2n-1]$ و $B=[5,7]$ دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، n چند عدد طبیعی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۷۳۶- اگر $n(A\cup B)+n(A\cap B)=24$ و $n(A)-n(B)=4$، مقدار $n(B)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۷۳۷- اگر $A\subseteq B$، $n(A')=14$، $n(B')=10$ و $n(A\cup B)=9$، مقدار $n(A)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۷۳۸- از ۱۰۰ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم، ۸۵ نفر به ریاضی و ۷۰ نفر به فیزیک علاقه دارند. حداقل چند نفر به هر دو درس علاقه دارند؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۵

۱۷۳۹- در کلاسی که ۳۰ دانش‌آموز دارد، ۱۸ نفر چای و ۱۵ نفر قهوه دوست دارند. حداکثر چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس نه چای دوست دارند نه قهوه؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۸

۱۷۴۰- اگر $A\subseteq B$ و $n(A)+2n(B)=14$، کمترین مقدار ممکن $n(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

سؤال
۱۷۳۱ ۳۵ ۳۶
۱۷۳۲ ۳۷
۱۷۳۳ ۳۷
۱۷۳۴ ۳۷
۱۷۳۵ ۳۳
۱۷۳۶ ۱
۱۷۳۷
۱۷۳۸ ۱
۱۷۳۹ ۱
۱۷۴۰ ۰

آزمون ۱۷۵

آزمون فصل ششم

۱۷۴۱- اگر مجموعهٔ مرجع $[-۳,۹]$ باشد، $A=(۳,۷]$ و $B=(-۱,۹)$، مجموع عددهای صحیح در مجموعهٔ $A'-B'$ چقدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۴ ۳) ۱۳ ۴) ۲۱

۱۷۴۲- اگر اشتراک دو بازهٔ $[-۲,۴)$ و $(۲a,a)$ تهی نباشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(-۲,۰)$ ۳) $(-۴,۰)$ ۴) $(-\infty,-۲)$

۱۷۴۳- اگر $A\cap B=(۱,۳]$ و $A-B=[-۲,۱]$، مجموعهٔ A کدام است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(-۲,۳]$ ۴) $[-۲,۳]$

۱۷۴۴- مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U هستند. اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟

۱) $A'-B$ ۲) $A-B'$ ۳) $B-A$ ۴) $B'-A'$

۱۷۴۵- مجموعه‌های A و B زیرمجموعهٔ مجموعهٔ مرجع U هستند. اگر $n(A)=۱۲$، $n(B')=۷$ و $n(A)=۳n(A')$، مجموعهٔ B چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۷۴۶- اگر مجموعهٔ مرجع U باشد، $n(U)=۲۶$، $n(A\cup B)=۱۴$ و $n(A)=n(A')$، مقدار $n(B-A)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷۴۷- اگر $n(A)=n(B)+۳$، $n(A-B)=۲n(B-A)$ و $n(A\cap B)=۵$، مقدار $n(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۷۴۸- اگر U مجموعهٔ مرجع باشد، $n(U)=۲۳$، $n(A)=۱۰$ و $n(B)=۷$، بیشترین مقدار ممکن $n(A'\cap B')$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۷۴۹- در کلاسی، هر دانش‌آموز دست‌کم به یکی از درس‌های فیزیک یا ریاضی علاقه‌مند است. ٪۶۰ از دانش‌آموزان یک کلاس به فیزیک و ٪۷۰ آن‌ها به ریاضیات علاقه‌مندند. اگر تعداد کسانی که به هر دو درس علاقه‌مندند ۶ نفر باشد، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

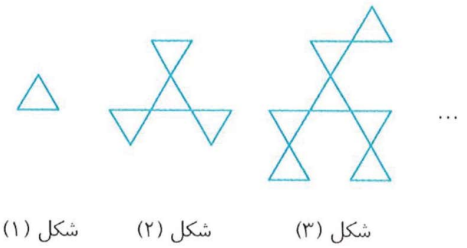
۱۷۵۰- از ۱۲۰ دانش‌آموز پایه دهم ۱۰۵ نفر به ریاضیات و ۹۵ نفر به فیزیک علاقه دارند. حداقل چند نفر به هر دو درس علاقه دارند؟

۱) ۷۰ ۲) ۷۵ ۳) ۸۰ ۴) ۸۵

سؤال	گام
۱۷۴۱	۲۳۴ ۲۳۷
۱۷۴۲	۲۳۴
۱۷۴۳	۲۳۴
۱۷۴۴	۲۳۶ ۲۳۷
۱۷۴۵	۲۴۰
۱۷۴۶	۲۴۰ ۲۴۱
۱۷۴۷	۲۴۱ ۲۴۲
۱۷۴۸	۲۴۰
۱۷۴۹	۲۴۱
۱۷۵۰	۲۴۱

درس اول: الگو و دنباله

به شکل‌های روبه‌رو توجه کنید. شکل (۱) با یک مثلث ساخته شده است. شکل (۲) با اضافه کردن سه مثلث به شکل (۱) ساخته شده است. به همین ترتیب، شکل (۳) با اضافه شدن سه مثلث دیگر به شکل (۲) ساخته شده است. پس می‌توان حدس زد که در شکل nاُم، $3(n-1)+1$ مثلث وجود دارد. در اصطلاح می‌گوییم شکل‌ها براساس یک **الگو** ساخته شده‌اند و اگر a_n تعداد مثلث‌های شکل nاُم باشد، $a_n=3(n-1)+1$ را **جملهٔ عمومی الگو** می‌نامیم. بنابراین $a_1=1$، $a_2=4$، $a_3=7$ و... به‌ترتیب تعداد مثلث‌ها در شکل‌های اول، دوم، سوم و... هستند.



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

الگوی خطی

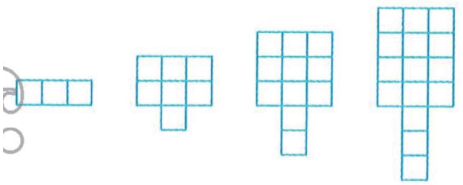
تعریف

الگوهایی که در آن‌ها اختلاف هر دو جملهٔ متوالی عدد ثابتی باشد، الگوهای خطی نامیده می‌شوند. در این الگوها جملهٔ عمومی به شکل $t_n=an+b$ است.

تست ۱

در الگوی مقابل در شکل بیستم چند مربع کوچک وجود دارد؟

۱) ۷۸
۲) ۷۹
۳) ۸۰
۴) ۸۱



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

راه‌حل

شکل اول از ۳ مربع کوچک تشکیل شده و هر شکل از اضافه کردن ۴ مربع کوچک به شکل قبلی ساخته می‌شود. یعنی اگر a_n تعداد مربع‌های کوچک در شکل nاُم باشد، آن‌گاه

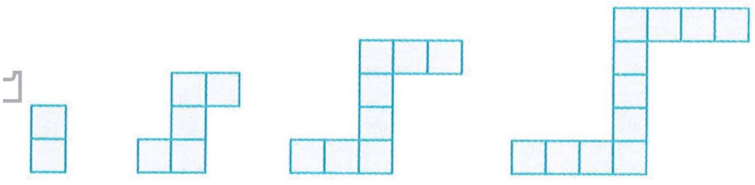
$a_2=3+4,\quad a_3=3+2\times4,\quad a_4=3+3\times4$

بنابراین $a_n=3+(n-1)\times4$ و در نتیجه شکل nاُم، $4n-1$ مربع کوچک دارد. پس شکل بیستم از ۷۹ مربع کوچک تشکیل شده است.

تست ۲

در الگوی زیر، شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است؟

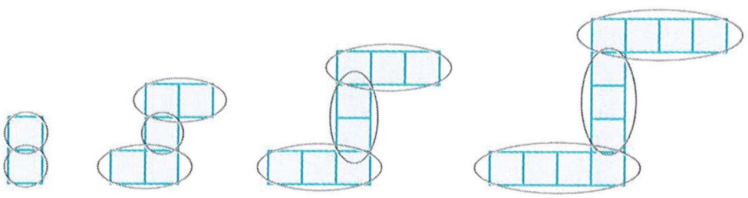
۱) ۳۰اُم
۲) ۳۱اُم
۳) ۳۲اُم
۴) ۳۳اُم



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

راه‌حل

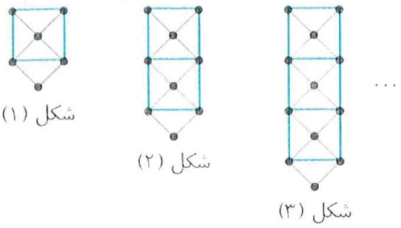
در هر دو قسمت افقی شکل دوم، دو مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی آن، یک مربع کوچک وجود دارد. در هر دو قسمت افقی شکل سوم، سه مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی آن، دو مربع کوچک وجود دارد. در هر دو قسمت افقی شکل چهارم، چهار مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی آن، سه مربع کوچک وجود دارد.


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

بنابراین، شکل nاُم از دو گروه nتایی و یک گروه $(n-1)$ تایی مربع کوچک درست شده است. به این ترتیب، اگر جملهٔ عمومی تعداد مربع‌ها را a_n بگیریم، معلوم می‌شود که $a_n=2n+(n-1)=3n-1$. توجه کنید که تعداد مربع‌های کوچک شکل اول هم از این تساوی به‌دست می‌آید. برای اینکه بفهمیم شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است، باید معادلهٔ $a_n=3n-1=95$ را حل کنیم، که از آن به‌دست می‌آید $n=32$، یعنی شکل ۳۲اُم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است.

تست ۳

تعداد نقاط شکل nاُم در الگوی مقابل چندتا است؟



۱) $n+۵$
۲) $۲n+۴$
۳) $۳n+۳$
۴) $۴n+۲$

راه‌حل

شکل اول دارای ۶ نقطه است و در شکل‌های بعدی، در هر مرحله ۳ نقطه به شکل اضافه می‌شود. پس در مرحله nاُم $۳\times(n-۱)$ نقطه به شکل اضافه شده است. یعنی تعداد نقاط شکل nاُم برابر است با $۳(n-۱)+۶=۳n+۳$.

تست ۴

در الگویی خطی، جمله‌های سوم و دوازدهم به‌ترتیب ۱۱ و ۴۷ هستند. جملهٔ هفتم این الگو کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۲۳ ۳) ۲۷ ۴) ۱۵

راه‌حل

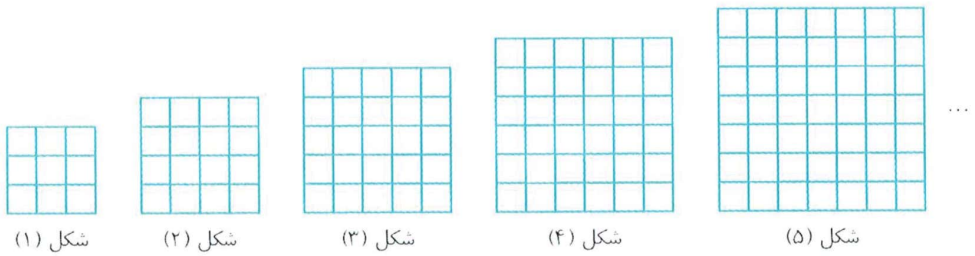
فرض کنید جمله عمومی این الگو به شکل $t_n=an+b$ باشد. در این صورت $t_۳=۱۱$ و $t_{۱۲}=۴۷$. پس $\begin{cases}۳a+b=۱۱\\ ۱۲a+b=۴۷\end{cases}$. اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم، به‌دست می‌آید $a=۴$ و $b=-۱$. بنابراین جملهٔ عمومی الگو به‌صورت $t_n=۴n-۱$ است. پس $t_۷=۲۸-۱=۲۷$.

تذکر

جملهٔ عمومی هر الگویی لزوماً خطی نیست. مثلاً الگوهایی که جملهٔ عمومی آن‌ها $t_n=n^۲+n$ یا $t_n=۲^n$ باشد، خطی نیستند.

تست ۵

تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل nاُم الگوی زیر چندتا است؟



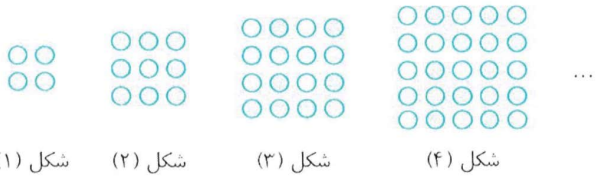
۱) $n^۲+۳n+۴$ ۲) $n^۲+۴n+۴$ ۳) $n^۲+۴n+۳$ ۴) $n^۲+n+۱$

راه‌حل

تعداد کل مربع‌های کوچک شکل nاُم $(n+۲)^۲$ تا است. که از این تعداد n تا سفیدند. بنابراین اگر تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل nاُم را a_n بگیریم، $a_n=(n+۲)^۲-n=n^۲+۳n+۴$.

تست ۶

در الگوی مقابل در شکلی که ۷۲ دایرهٔ سفید دارد، چند دایره وجود دارد؟



۱) ۱۲۵
۲) ۱۴۴
۳) ۱۶۹
۴) ۲۲۵

راه‌حل

به جدول مقابل توجه کنید. در شکل nاُم، $(n+۱)^۲$ دایره وجود دارد. اگر n فرد باشد، $\frac{(n+۱)^۲}{۲}$ دایرهٔ سفید و اگر n زوج باشد، $\frac{(n+۱)^۲+۱}{۲}$ دایرهٔ سفید وجود دارد. هیچ عددی طبیعی مانند n وجود ندارد که $\frac{(n+۱)^۲+۱}{۲}=۷۲$ و اگر $\frac{(n+۱)^۲}{۲}=۷۲$، آن‌گاه $n=۱۱$. بنابراین شکل ۱۱اُم است که ۷۲ دایرهٔ سفید دارد و در این شکل $(۱۱+۱)^۲=۱۴۴$ دایره وجود دارد.

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...
تعداد دایره‌ها	۴	۹	۱۶	۲۵	...
تعداد دایره‌های سفید	۲	۵	۸	۱۳	...

۲۴۵

نکته

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n از دستور $۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ به‌دست می‌آید.

تست ۷

حاصل $A=\frac{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}{۲+۴+۶+\cdots+۲n}$ کدام است؟

۱) $\frac{n}{n+۱}$ ۲) $\frac{n+۱}{n}$ ۳) $\frac{۲n-۱}{۲n}$ ۴) $\frac{۳n-۲}{۳n}$

راه‌حل

ابتدا مجموع اعداد زوج را حساب می‌کنیم:

$$۲+۴+۶+\cdots+۲n=۲(۱+۲+۳+\cdots+n)=۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}=n(n+۱)$$

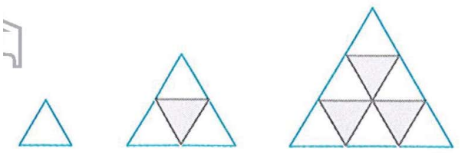
اکنون مجموع اعداد فرد را به کمک مجموع فوق به‌دست می‌آوریم:

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=(۲-۱)+(۴-۱)+(۶-۱)+\cdots+(۲n-۱)=۲+۴+۶+\cdots+۲n-\underbrace{(۱+۱+\cdots+۱)}_{\text{تا } n}=n(n+۱)-n=n^۲$$

بنابراین $A=\frac{n^۲}{n(n+۱)}=\frac{n}{n+۱}$.

تست ۸

تعداد مثلث‌های رنگ نشده در الگوی زیر، در شکل بیستم چندتا است؟



۱) ۱۹۰ ۲) ۲۰۰

۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۰

راه‌حل

با توجه به جدول زیر، تعداد مثلث‌های رنگ نشده در شکل nاُم برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$. بنابراین در شکل بیستم $\frac{۲۰\times۲۱}{۲}=۲۱۰$ مثلث رنگ نشده داریم.

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مثلث‌های سفید	۱	۳	۶	۱۰	...	$۱+۲+۳+\cdots+n$

(+۲ ، +۳ ، +۴)

۲۴۶

دنباله

تعریف

ردیفی از عددها که دارای ترتیب باشند، دنباله نامیده می‌شود. عدد اول را جملهٔ اول دنباله $(a_۱)$، عدد دوم را جملهٔ دوم دنباله $(a_۲)$، ... و عدد nاُم را جملهٔ nاُم دنباله (a_n) می‌نامند. در دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \ldots, a_n, \ldots$، a_n را جملهٔ عمومی دنباله می‌نامند.

تست ۹

جملهٔ چندم دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{۳n-۱}{۵n+۷}$ برابر با $\frac{۷}{۱۲}$ است؟

۱) ۵۹اُم ۲) ۶۰اُم ۳) ۶۱اُم ۴) ۶۲اُم

راه‌حل

اگر معادلهٔ $\frac{۳n-۱}{۵n+۷}=\frac{۷}{۱۲}$ را حل کنیم، به‌دست می‌آید $n=۶۱$. بنابراین جملهٔ ۶۱اُم این دنباله برابر با $\frac{۷}{۱۲}$ است.

تست ۱۰

در یک دنباله، $a_۱=۴$ و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطهٔ $a_{n+۱}=۹-a_n$ برقرار است. مجموع بیست جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۷۰ ۲) ۸۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰۰

راه‌حل

به چند جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_۱=۴,\quad a_۲=۹-۴=۵,\quad a_۳=۹-۵=۴,\quad a_۴=۹-۴=۵,\quad \cdots$$

بنابراین جملات شمارهٔ فرد این دنباله برابر ۴ و جملات شمارهٔ زوج دنباله برابر ۵ هستند. در نتیجه مجموع هر دو جملهٔ متوالی برابر ۹ است و مجموع بیست جملهٔ اول دنباله برابر $\frac{۲۰}{۲}\times۹=۹۰$ می‌شود.

تست ۱۱

اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که در هر دسته به تعداد دو برابر شمارهٔ آن دسته، عدد وجود داشته باشد. عدد اول دستهٔ یازدهم کدام است؟

$\{1,2\}$: دستهٔ اول ، $\{3,4,5,6\}$: دستهٔ دوم ، $\{7,8,9,10,11,12\}$: دستهٔ سوم ، ....

۱) ۱۰۱ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۱۱ ۴) ۱۱۳

راه‌حل

تعداد اعداد ده دستهٔ اول به‌ترتیب برابر است با ۲، ۴، ۶، ۸، ... و ۲۰. پس آخرین عددی که در دستهٔ دهم آمده است، برابر است با

$$2+4+6+\cdots+20=2(1+2+\cdots+10)=2\times\frac{10\times11}{2}=110$$

پس اولین عدد دستهٔ یازدهم، صد و یازدهمین عدد طبیعی است که همان ۱۱۱ است.

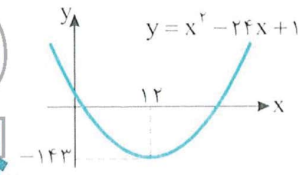
تست ۱۲

کوچک‌ترین جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=n^2-24n+1$ کدام است؟

۱) -140 ۲) -141 ۳) -142 ۴) -143

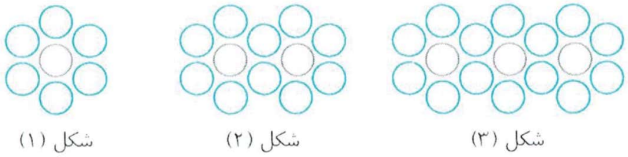
راه‌حل

کمترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=x^2-24x+1$ به ازای $x=-\frac{b}{2a}=\frac{24}{2}=12$ به‌دست می‌آید. بنابراین در میان a_nها، a_{12} از بقیه کوچک‌تر است که برابر -143 است.



دست‌گرمی

۲۵۶- در الگوی زیر، در شکلی که ۲۰ دایرهٔ خاکستری دارد، چند دایرهٔ رنگی وجود دارد؟

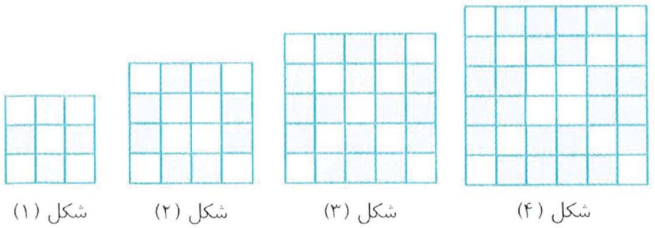


۱) ۸۲
۲) ۱۰۲
۳) ۶۲
۴) ۹۶

۲۵۷- در یک الگوی خطی، جملهٔ چهارم و شانزدهم به‌ترتیب برابر ۱۶ و ۲۸ هستند. جملهٔ دوم این الگو کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۰

۲۵۸- در الگوی زیر، چند مربع رنگی کوچک در شکل هجدهم وجود دارد؟



۱) ۳۶۱
۲) ۳۶۰
۳) ۲۸۷
۴) ۲۸۸

۲۵۹- چندمین جمله از دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{4n-3}{n+3}$ برابر ۳ است؟

۱) دهم ۲) یازدهم ۳) دوازدهم ۴) سیزدهم

۲۶۰- اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مربع کامل باشد. عدد اول دستهٔ یازدهم کدام است؟

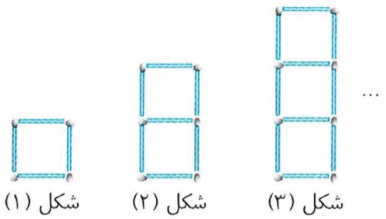
$\{2,4\}$، $\{6,8,10,12,14,16\}$، $\{18,20,22,24,26,28,30,32,34,36\}$، ....

دستهٔ اول — دستهٔ دوم — دستهٔ سوم

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۷۰ ۳) ۲۲۶ ۴) ۴۰۲

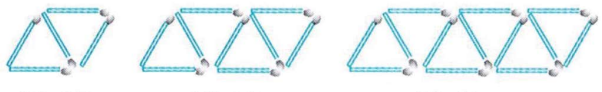
آزمون ۱۷۶ — الگو و دنباله (۱)

۱۷۵۱- در الگـوی زیـر کـه بـه کمـک چـوب کبریت سـاخته شـده اسـت، تعداد چوب کبریت‌ها در شکل بیستم کدام است؟



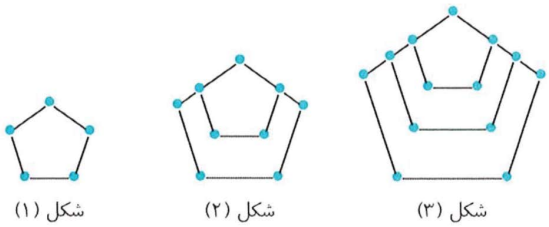
۱) ۵۹
۲) ۶۰
۳) ۶۱
۴) ۶۲

۱۷۵۲- تعداد چوب کبریت‌ها در شکل پانزدهم الگوی زیر چندتا است؟



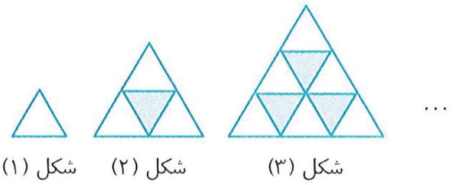
۱) ۵۹
۲) ۶۰
۳) ۶۱
۴) ۶۲

۱۷۵۳- تعداد نقاط روی شکل دهم از الگوی زیر کدام است؟



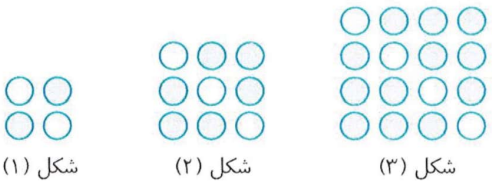
۱) ۴۰
۲) ۴۱
۳) ۵۰
۴) ۵۱

۱۷۵۴- در الگوی زیر، در شکل چندم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد؟



۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۱۷۵۵- تعداد دایره‌های رنگی در شکل nاُم الگوی زیر کدام است؟



۱) n^2+1
۲) $2n^2$
۳) $3n^2-1$
۴) n^2+n

۱۷۵۶- در دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=3n^2-n+2a_1$ جملهٔ چهارم کدام است؟

۱) ۵۰
۲) ۴۶
۳) ۴۴
۴) ۴۰

۱۷۵۷- کدام جمله از دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{n^2+1}{81n^2-1}$ برابر $\frac{1}{80}$ است؟

۱) a_7
۲) a_8
۳) a_9
۴) a_{10}

۱۷۵۸- در دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{4n-1}{n+6}$ چند جملهٔ کوچک‌تر از ۳/۹ وجود دارد؟

۱) ۲۴۴
۲) ۲۴۳
۳) ۲۴۲
۴) ۲۴۱

۱۷۵۹- چند جمله از دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=n^2+2n-8$ در بازهٔ $(72,160)$ قرار دارند؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۷۶۰- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مضرب ۵ باشد. عدد اول دستهٔ پنجاهم کدام است؟

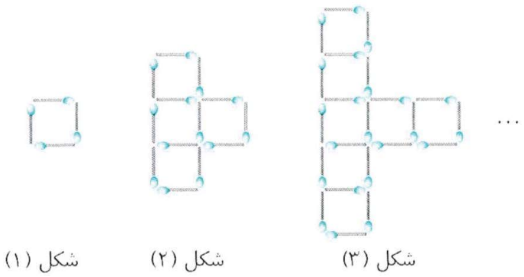
$$\underbrace{\{1,3,5\}}_{\text{دستهٔ اول}},\underbrace{\{7,9,11,13,15\}}_{\text{دستهٔ دوم}},\underbrace{\{17,19,21,23,25\}}_{\text{دستهٔ سوم}},\ldots$$

۱) ۴۸۷
۲) ۴۹۷
۳) ۴۷۷
۴) ۴۶۷

سؤال | گا
۱۷۵۱ | ۴۴
۱۷۵۲ | ۴۴
۱۷۵۳ | ۴۴
۱۷۵۴ | ۴
۱۷۵۵ | ۵
۱۷۵۶ | ۴
۱۷۵۷ | ۴
۱۷۵۸ | ۶
۱۷۵۹ | ۶ ۸
۱۷۶۰ | ۴

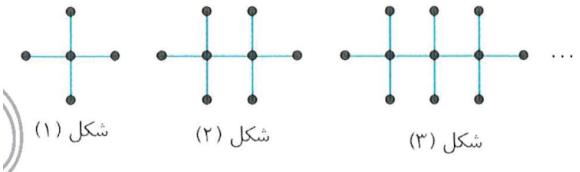
آزمون ۱۷۷ الگو و دنباله (۲)

۱۷۶۱- تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته برای ساختن شکل چهاردهم در الگوی مقابل چندتا است؟



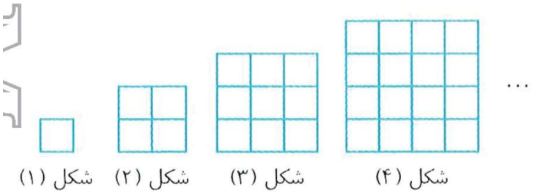
۱) ۱۰۳
۲) ۱۱۲
۳) ۱۲۱
۴) ۱۳۰

۱۷۶۲- تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چندتا است؟



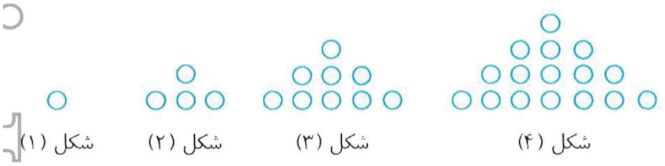
۱) ۶۰
۲) ۶۱
۳) ۶۲
۴) ۶۴

۱۷۶۳- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده در شکل سی‌اُم چندتاست؟



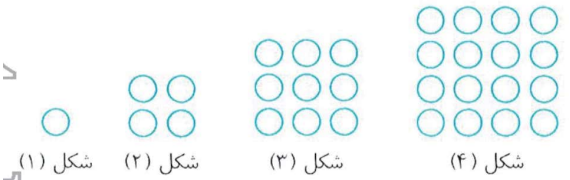
۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۳۵

۱۷۶۴- در الگوی زیر، در چه شکلی نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها برابر با $\frac{۸}{۱۷}$ است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۷
۳) ۱۶
۴) ۱۵

۱۷۶۵- در الگوی زیر، در شکل چندم تعداد گوی‌های رنگی برابر با ۱۱۳ است؟



۱) ۱۷
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۴

۱۷۶۶- همهٔ جمله‌های دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{۲n-k}{۵n+۳}$ با هم برابرند. مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$
۲) $-\frac{۴}{۵}$
۳) $-\frac{۶}{۵}$
۴) $-\frac{۷}{۵}$

۱۷۶۷- کدام‌یک می‌تواند جملهٔ عمومی دنبالهٔ $۲,۳,۱۰,۱۵,\ldots$ باشد؟

۱) $n+۱$
۲) $n^۲-(-۱)^n$
۳) $۳n^۲-۸n+۷$
۴) $۲n^۲-۵n+۵$

۱۷۶۸- در یک دنباله با جملهٔ عمومی a_n، $a_۱=۱$ و به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ رابطهٔ $a_{n+۱}=\frac{n}{n+۱}a_n$ برقرار است. مقدار $a_{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹۹}$
۲) $\frac{۱}{۱۰۰}$
۳) $\frac{۱}{۱۰۱}$
۴) $\frac{۱}{۱۰۲}$

۱۷۶۹- اگر بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=-۳n^۲+۱۲n+c$ برابر ۸ باشد، مقدار c کدام است؟

۱) ۱۲
۲) -۸
۳) ۲۰
۴) -۴

۱۷۷۰- چند جمله از ابتدای دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\log_۲\frac{n}{n+۱}$ را جمع کنیم تا حاصل برابر -۳ شود؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

سؤال	گام
۱۷۶۱	۲۴۴
۱۷۶۲	۲۴۴
۱۷۶۳	۲۴۴ ۲۴۵
۱۷۶۴	۲۴۴ ۲۴۵
۱۷۶۵	۲۴۴
۱۷۶۶	۲۴۶
۱۷۶۷	۲۴۶
۱۷۶۸	۲۴۶
۱۷۶۹	۲۱ ۲۴۶
۱۷۷۰	۲۴۶ ۳۴۴

درس دوم: دنبالهٔ حسابی

تعریف

۲۴۷

دنبالهٔ حسابی دنباله‌ای است که در آن هر جمله، به‌جز جملهٔ اول، با اضافه کردن عددی ثابت به جملهٔ قبل از آن به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را **قدرنسبت** دنبالهٔ حسابی می‌نامند.

اگر جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d برابر a_n باشد، آن‌گاه $a_{n+1}=a_n+d$، یعنی،

$$d=a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}=\cdots=a_3-a_2=a_2-a_1$$

نکته — جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی

۲۴۸

اگر جملهٔ اول دنباله‌ای حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، جملهٔ nاُم یا همان جملهٔ عمومی دنباله از رابطهٔ $a_n=a_1+(n-1)d$ به‌دست می‌آید.

تست ۱

در یک دنباله $a_1=5$ و به ازای هر عدد طبیعی مانند n، $a_{n+1}=a_n-4$. جملهٔ عمومی این دنباله کدام است؟

۱) $2n-5$ ۲) $n+4$ ۳) $-4n+9$ ۴) $-3n+8$

راه‌حل این دنباله دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۵ و قدرنسبت -4 است. پس جملهٔ عمومی آن به‌صورت $a_n=a_1+(n-1)d=5+(n-1)(-4)=-4n+9$ است.

تست ۲

جملهٔ چندم دنبالهٔ حسابی $-8,-13,-18,-23,\ldots$ برابر -113 است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

راه‌حل ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم. جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی -8 است، پس $a_1=-8$ و قدرنسبت این دنباله $-13-(-8)=-5$ است، پس $d=-5$. در نتیجه $a_n=a_1+(n-1)d=-8+(n-1)(-5)=-5n-3$. اگر -113 جملهٔ kاُم این دنباله باشد، آن‌گاه $a_k=-113$ و در نتیجه $-5k-3=-113$، بنابراین $k=22$، یعنی -113 جملهٔ ۲۲اُم دنبالهٔ مورد نظر است.

تست ۳

اگر در یک دنبالهٔ حسابی $a_2=7$ و $a_5+a_{13}=40$، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) $\frac{13}{7}$ ۲) $\frac{12}{5}$ ۳) $\frac{11}{6}$ ۴) $\frac{17}{11}$

راه‌حل اگر جملهٔ عمومی $a_n=a_1+(n-1)d$ باشد، آن‌گاه

$a_2=a_1+d\Rightarrow a_1+d=7$ (۱)

همچنین

$a_5=a_1+4d\ ,\ a_{13}=a_1+12d\Rightarrow 2a_1+16d=40\Rightarrow a_1+8d=20$ (۲)

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را از هم کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$7d=13\Rightarrow d=\frac{13}{7}$$

۲۴۹

تذکر الگوی هر دنبالهٔ حسابی، خطی بوده و جملهٔ عمومی آن به شکل $a_n=An+B$ است که در آن A برابر قدرنسبت است:

$$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+nd-d=dn+a_1-d\Rightarrow a_n=dn+(a_1-d)$$

تست ۴

جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به شکل $a_n=(k-2)n^2-3kn+1$ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) -3 ۲) ۳ ۳) -6 ۴) ۶

راه‌حل چون جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی باید خطی باشد، پس $k-2=0$ و در نتیجه $k=2$ و $a_n=-6n+1$، پس قدرنسبت دنباله -6 است.

نکته

۲۵۰

تعداد جملات دنباله‌ای حسابی که جملهٔ اول آن a_1، جملهٔ آخر آن a_n و قدرنسبت آن d باشد، برابر است با $\frac{a_n-a_1}{d}+1$.

تست ۵ چند عدد دورقمی بر ۷ بخش‌پذیرند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

راه‌حل این عددها دنباله‌ای حسابی و متناهی تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله، تفاضل هر دو عضو متوالی آن است، که برابر ۷ است. بنابراین $d=۷$. از طرف دیگر، کوچک‌ترین عدد دورقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۱۴ و بزرگ‌ترین عدد دورقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۹۸ است. بنابراین $a_۱=۱۴$، $a_n=۹۸$ و در نتیجه $n=\frac{a_n-a_۱}{d}+۱=\frac{۹۸-۱۴}{۷}+۱=۱۲+۱=۱۳$.

نکته ۲۵۱

اگر a_m و a_n دو جمله از دنباله‌ای حسابی باشند و $m\neq n$، قدرنسبت این دنباله برابر است با $d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$.

تست ۶ در یک دنبالهٔ حسابی $a_۳=۷$ و $a_{۱۰}=۲۸$. مقدار $a_۴$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

راه‌حل قدرنسبت دنباله برابر است با $d=\frac{۲۸-۷}{۱۰-۳}=۳$. پس $a_۴=a_۳+d=۷+۳=۱۰$.

نکته ۲۵۲

اگر a_m، a_n، a_r و a_s جمله‌هایی از دنباله‌ای حسابی باشند و $m+n=r+s$، آن‌گاه $a_m+a_n=a_r+a_s$.

تست ۷ در یک دنبالهٔ حسابی $a_۷+a_{۱۳}=۱۴$. مقدار $a_۵+۲a_{۱۰}+a_{۱۵}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۴ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

راه‌حل چون $۱۳+۷=۲\times۱۰=۲+۱۵=۵$، پس $a_۷+a_{۱۳}=a_{۱۰}+a_{۱۰}=a_۵+a_{۱۵}$. بنابراین $a_۵+a_{۱۵}+۲a_{۱۰}=۱۴+۱۴=۲۸$. توجه کنید که بدون استفاده از نکتهٔ فوق هم می‌توان مسئله را حل کرد. چون

$$a_۷+a_{۱۳}=۱۴\Rightarrow a_۱+۶d+a_۱+۱۲d=۲a_۱+۱۸d=۱۴\Rightarrow a_۱+۹d=۷$$

پس $a_۵+a_{۱۵}+۲a_{۱۰}=۴a_۱+۳۶d=۴(a_۱+۹d)=۴\times۷=۲۸$.

نکته واسطهٔ حسابی ۲۵۳

اگر a، c و b جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، c را واسطهٔ حسابی a و b می‌نامند و $c=\frac{a+b}{۲}$.

تست ۸ اگر x، $x+۳$، $۳x+۴$، ... دنباله‌ای حسابی باشد، واسطهٔ حسابی x و $x+۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

راه‌حل چون $x+۳$ واسطهٔ حسابی x و $۳x+۴$ است، پس $x+۳=\frac{x+۳x+۴}{۲}$ و در نتیجه $x=۱$. پس $x+۳=۴$. باید واسطهٔ حسابی ۱ و ۴ را حساب کنیم که $\frac{۵}{۲}=\frac{۴+۱}{۲}$ است.

نکته درج واسطهٔ حسابی ۲۵۴

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $b>a$. اگر k عدد بین a و b بنویسیم به طوری که این اعداد دنباله‌ای حسابی تشکیل دهند، می‌گوییم بین a و b به تعداد k واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. در این صورت قدرنسبت از رابطهٔ $d=\frac{b-a}{k+۱}$ به‌دست می‌آید، زیرا b جملهٔ $(k+۲)$اُم دنباله و a جملهٔ اول آن است.

تست ۹ بین دو عدد ۳ و ۹۳ پنج واسطهٔ حسابی درج می‌کنیم. عدد وسطی کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۵۲

راه‌حل **راه‌حل اول** وقتی ۵ واسطهٔ حسابی بین ۳ و ۹۳ قرار می‌دهیم در واقع ۹۳ هفتمین جملهٔ دنباله می‌شود: $3,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,93$

پس $a_7=a_1+6d\Rightarrow 93=3+6d$

بنابراین $d=15$. عدد وسطی جملهٔ چهارم دنباله است و برابر است با $a_4=a_1+3d=3+3(15)=48$.

راه‌حل دوم با توجه به نکتهٔ فوق، $a=3$، $b=93$ و $k=5$. بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر است با $d=\frac{93-3}{5+1}=\frac{90}{6}=15$

در نتیجه، دنبالهٔ حسابی مورد نظر به‌صورت $3,18,33,48,63,78,93$ است که جملهٔ وسط آن برابر است با ۴۸.

نکته ۲۵۵

اگر چند عدد دنباله‌ای حسابی متناهی تشکیل دهند، برای سادگی در محاسبات می‌توانیم آن‌ها را به شکل‌های زیر در نظر بگیریم:

سه عدد: $a-d, a, a+d$ — قدرنسبت $=d$

چهار عدد: $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ — قدرنسبت $=2d$

پنج عدد: $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ — قدرنسبت $=d$

تست ۱۰ مجموع پنج جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی برابر ۲۰ و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۱۷۰ است. مربع قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) ۱۶

راه‌حل جمله‌های دنباله را به‌صورت $a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$ در نظر می‌گیریم، بنابراین

$$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=20\Rightarrow 5a=20\Rightarrow a=4$$

از طرف دیگر،

$$(a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=170\Rightarrow 5a^2+10d^2=170\xrightarrow{a=4}80+10d^2=170\Rightarrow d^2=9$$

دست‌گرمی

۲۶۱- در یک دنباله جملهٔ اول برابر -4 و برای هر $n>1$ داریم $a_{n-1}=a_n+3$. جملهٔ بیستم این دنباله کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۵۳ ۳) -64 ۴) -61

۲۶۲- در دنباله‌ای حسابی $a_4=5$ و $a_9=30$. جملهٔ عمومی این دنباله کدام است؟

۱) $5n-15$ ۲) $3n-7$ ۳) $4n-11$ ۴) $2n-3$

۲۶۳- چند عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۷ وجود دارد؟

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۲۹ ۴) ۱۳۰

۲۶۴- اگر $\frac{1}{2}$ واسطهٔ حسابی دو عدد $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+2}$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ± 2 ۲) $\pm\sqrt{2}$ ۳) $\pm\sqrt{3}$ ۴) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۶۵- بین دو عدد a و $2a+1$ چهار واسطهٔ حسابی درج می‌کنیم. اگر اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهای اضافه شده برابر ۹ باشد مقدار a کدام است؟ $(a>0)$

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۲۶۶- اگر مجموع سه عدد که دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند برابر ۲۱ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۶۸ باشد، نسبت بزرگ‌ترین عدد به کوچک‌ترین عدد کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

آزمون ۱۷۸ دنبالهٔ حسابی (۱)

۱۷۷۱- در یک دنباله، $a_1=3$ و برای هر $n\geq 1$، $a_n-a_{n+1}=2$. در این دنباله مقدار $\frac{a_{10}}{a_5}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۷۷۲- اگر در دنباله‌ای حسابی $3a_4+4a_5-7a_9=124$، مقدار قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -6 ۴) -8

۱۷۷۳- در دنبالهٔ حسابی $3x-1,3x-4,4x-2,\ldots$ جملهٔ چهارم کدام است؟

۱) -19 ۲) -22 ۳) -23 ۴) -25

۱۷۷۴- چندمین جمله از دنبالهٔ حسابی $-1,2,5,\ldots$ برابر ۲۱۸ است؟

۱) هفتادویکم ۲) هفتادوچهارم ۳) هفتادوپنجم ۴) هفتادوهشتم

۱۷۷۵- در دنبالهٔ حسابی $2,6,10,\ldots$ چند جملهٔ کوچک‌تر از ۵۰۰ وجود دارد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۲۸

۱۷۷۶- سه زاویهٔ مثلثی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه‌های این مثلث کدام است؟

۱) 45° ۲) 60° ۳) 75° ۴) 90°

۱۷۷۷- زاویه‌های یک پنج‌ضلعی دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند. اگر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه برابر 86° باشد، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه کدام است؟

۱) 110° ۲) 115° ۳) 120° ۴) 130°

۱۷۷۸- در جدول زیر، بین دو عدد $\sqrt{3}-5$ و $\sqrt{3}+5$، چهار واسطهٔ حسابی می‌نویسیم. کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم کدام است؟

$\sqrt{3}-5$					$\sqrt{3}+5$

۱) $\sqrt{3}-4$ ۲) $\sqrt{3}-3$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{3}-1$

۱۷۷۹- مجموع سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۴۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

۱۷۸۰- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر قدرنسبت این دنباله است و حاصل‌ضرب نُه جملهٔ نخست این دنباله برابر $10^8\times 10!$ است. جملهٔ دهم این دنباله کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۹۰۰ ۴) ۱۰۰۰

سؤال	گام
۱۷۷۱	۲۴۷ ۲۴۸
۱۷۷۲	۲۴۸
۱۷۷۳	۲۴۷ ۲۴۸
۱۷۷۴	۲۴۷ ۲۴۸
۱۷۷۵	۲۴۷ ۲۴۸
۱۷۷۶	۲۵۵
۱۷۷۷	۲۵۵
۱۷۷۸	۲۴۸ ۲۵۱ ۲۵۴
۱۷۷۹	۲۵۵
۱۷۸۰	۲۴۸

آزمون ۱۷۹ دنبالهٔ حسابی (۲)

۱۷۸۱- جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به‌صورت $a_n=\frac{5-2n}{3}$ است. قدرنسبت دنباله چقدر از جملهٔ اول کمتر است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۱۷۸۲- در دنباله‌ای حسابی $a_1+a_3=16$ و $a_2+a_5+a_8=51$. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷۸۳- جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $a, 2a-1, 1-3a, \ldots$ کدام است؟

۱) $1-\frac{n}{2}$ ۲) $n-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}-n$ ۴) $\frac{n}{2}+1$

۱۷۸۴- اگر $a+b, a+c, b+c$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، کدام گزینه دنباله‌ای حسابی را نشان می‌دهد؟

۱) b, a, c ۲) b, c, a ۳) a, c, b ۴) a, b, c

۱۷۸۵- در دنبالهٔ حسابی $196, 192, 188, \ldots$ نخستین جملهٔ کوچک‌تر از ۱۰ چندمین جمله است؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

۱۷۸۶- در دنباله‌ای حسابی، جملهٔ دهم ۳۲ واحد کمتر از دومین جمله است. اگر جملهٔ چهارم دنباله برابر ۱۵ باشد، چند جمله از دنباله مثبت هستند؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۷۸۷- اگر جواب‌های معادلهٔ $(x-a)(x^2-8x+12)=0$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، a چند مقدار مختلف ممکن است باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۷۸۸- اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. نسبت طول ضلع بلندتر زاویهٔ قائمه به طول ضلع کوتاه‌تر زاویهٔ قائمهٔ این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۷۸۹- مجموع چهار جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی برابر صفر و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۸۰ است. حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) -18 ۲) -27 ۳) -36 ۴) -45

۱۷۹۰- بین دو عدد m^2+3m+4 و m^2+4، تعداد $m-1$ عدد را طوری درج می‌کنیم که اعداد حاصل، یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند. قدرنسبت دنبالهٔ حاصل کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال
۱۷۸۱
۱۷۸۲
۱۷۸۳
۱۷۸۴
۱۷۸۵
۱۷۸۶
۱۷۸۷
۱۷۸۸
۱۷۸۹
۱۷۹۰

درس سوم: دنبالهٔ هندسی

تعریف

۲۵۶

دنبالهٔ هندسی دنباله‌ای است که جملهٔ اول آن صفر نیست و در آن هر جمله، به جز جملهٔ اول از ضرب کردن عددی ثابت و غیرصفر در جملهٔ قبل از آن به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی می‌نامند. اگر جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت r برابر a_n باشد، آن‌گاه $a_{n+1}=a_n r$، یعنی $r=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\cdots=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$.

نکته — جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی

۲۵۷

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت r برابر است با $a_n=a_1 r^{n-1}$.

تست ۱

در دنباله‌ای $a_1=4$ و به ازای هر عدد طبیعی مانند n، $\frac{a_n}{a_{n+1}}=-2$. جملهٔ صدم این دنباله کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2^{97}}$ ۲) $\frac{1}{2^{97}}$ ۳) $-\frac{1}{2^{99}}$ ۴) $\frac{1}{2^{99}}$

راه‌حل

در این دنباله $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{2}$. بنابراین با یک دنبالهٔ هندسی که قدرنسبت آن $-\frac{1}{2}$ و جملهٔ اول آن ۴ است روبه‌رو هستیم. پس جملهٔ صدم آن برابر است با $a_{100}=a_1 r^{99}=4\times(-\frac{1}{2})^{99}=-\frac{1}{2^{97}}$.

تست ۲

جملهٔ چندم دنبالهٔ هندسی $18,-12,8,\ldots$ برابر $\frac{512}{729}$ است؟

۱) هفتم ۲) هشتم ۳) نهم ۴) دهم

راه‌حل

ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را پیدا می‌کنیم. جملهٔ اول این دنبالهٔ هندسی ۱۸ است، پس $a_1=18$ و قدرنسبت این دنباله $\frac{-2}{3}=\frac{-12}{18}$ است. پس $r=-\frac{2}{3}$. در نتیجه $a_n=a_1 r^{n-1}=18(-\frac{2}{3})^{n-1}$. اگر $\frac{512}{729}$ جملهٔ kاُم این دنباله باشد. آن‌گاه $a_k=\frac{512}{729}$ و در نتیجه

$$18(-\frac{2}{3})^{k-1}=\frac{512}{729}\Rightarrow(-\frac{2}{3})^{k-1}=\frac{512}{729\times 18}=\frac{2^9}{3^8\times 2}=\frac{2^8}{3^8}=(-\frac{2}{3})^8$$

بنابراین $k-1=8$. پس $k=9$. یعنی جملهٔ نهم دنبالهٔ مورد نظر برابر $\frac{512}{729}$ است.

تست ۳

در دنباله‌ای هندسی که همهٔ جمله‌های آن مثبت‌اند، $a_1a_5=12$ و $\frac{a_3}{a_5}=3$. مقدار a_2 کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

راه‌حل

فرض کنید قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی r باشد. در این‌صورت $\frac{a_3}{a_5}=\frac{a_1 r^2}{a_1 r^4}=\frac{1}{r^2}=3$. اگر r منفی باشد، در دنباله جمله‌های منفی هم وجود دارد که درست نیست. پس $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$. از طرف دیگر،

$$a_1a_5=12\Rightarrow a_1(a_1r^4)=12\Rightarrow a_1^2(\frac{1}{9})=12$$

بنابراین $a_1=6\sqrt{3}$ و در نتیجه $a_2=a_1 r=6\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=6$.

نکته

۲۵۸

اگر a_m، a_n، a_r و a_s جمله‌هایی از دنباله‌ای هندسی باشند و $m+n=r+s$، آن‌گاه $a_m a_n=a_r a_s$.

تست ۴ در یک دنبالهٔ هندسی $a_3a_{12}=4$. حاصل عبارت $a_2a_5a_{10}a_{13}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

راه‌حل چون $3+12=5+10=2+13$، پس

$$a_2a_5a_{10}a_{13}=(a_2a_{13})(a_5a_{10})=(a_3a_{12})^2=16$$

نکته حاصل‌ضرب جمله‌های دنبالهٔ هندسی ۲۵۹

اگر $a_1,a_2,\cdots,a_n$ دنباله‌ای هندسی باشد، آن‌گاه $a_1a_2\cdots a_n=\sqrt{(a_1a_n)^n}$.

تست ۵ در دنباله‌ای هندسی $a_1a_2\cdots a_9=8$. مقدار $a_2a_4a_6a_8$ کدام است؟

۱) $2\sqrt[3]{2}$ ۲) $4\sqrt[3]{2}$ ۳) ۴ ۴) $2\sqrt[3]{4}$

راه‌حل توجه کنید که

$$a_1a_2\cdots a_9=\sqrt{(a_1a_9)^9}\Rightarrow 8=\sqrt{(a_1a_9)^9}\Rightarrow a_1a_9=2^{\frac{2}{3}}$$

از طرف دیگر،

$$2+8=1+9\Rightarrow a_2a_8=a_1a_9=2^{\frac{2}{3}},\quad 4+6=1+9\Rightarrow a_4a_6=a_1a_9=2^{\frac{2}{3}}$$

پس

$$a_2a_4a_6a_8=(a_2a_8)(a_4a_6)=(2^{\frac{2}{3}})^2=2\sqrt[3]{2}$$

نکته واسطهٔ هندسی ۲۶۰

اگر a، c و b سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، c را **واسطهٔ هندسی** a و b می‌نامند و $c^2=ab$.

تست ۶ واسطهٔ هندسی اعداد a و b برابر $a+1$ و واسطهٔ حسابی آن‌ها برابر $a+\frac{1}{3}$ است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{1}{16}$

راه‌حل چون $a+1$ واسطهٔ هندسی a و b است. پس

$$(a+1)^2=ab \qquad (1)$$

چون $a+\frac{1}{3}$ واسطهٔ حسابی a و b است. پس $a+b=2(a+\frac{1}{3})$ و در نتیجه $b=a+\frac{2}{3}$. در تساوی (۱) به جای b قرار می‌دهیم $a+\frac{2}{3}$ و نتیجه می‌شود

$$(a+1)^2=a(a+\frac{2}{3})\Rightarrow a^2+2a+1=a^2+\frac{2a}{3}\Rightarrow\frac{4}{3}a=-1\Rightarrow a=\frac{-3}{4}\xrightarrow{b=a+\frac{2}{3}}b=-\frac{1}{12}$$

پس $\frac{a}{b}=9$.

تست ۷ اگر $\cdots,3^{x^2+x},3^{x^2-x},3^x$ یک دنبالهٔ هندسی غیرثابت باشد، کدام عدد می‌تواند واسطهٔ هندسی x و x^2-x باشد؟

۱) $\sqrt{12}$ ۲) $\sqrt{20}$ ۳) $\sqrt{32}$ ۴) $\sqrt{48}$

راه‌حل چون 3^{x^2-x} واسطهٔ هندسی 3^x و 3^{x^2+x} است، پس

$$(3^{x^2-x})^2=3^x\times 3^{x^2+x}\Rightarrow 3^{2x^2-2x}=3^{x^2+2x}\Rightarrow 2x^2-2x=x^2+2x,\quad x^2=4x\Rightarrow x=0\ (\text{غ.ق.ق.}),\ x=4$$

پس واسطهٔ هندسی ۴ و ۱۲ را می‌خواهیم که برابر $\pm\sqrt{48}$ است. پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست ۸ جمله‌های اول، نهم و چهل‌ونهم دنباله‌ای حسابی و غیرثابت، دنباله‌ای هندسی تشکیل می‌دهند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

راه‌حل قدرنسبت دنبالهٔ حسابی را با d نشان می‌دهیم. جملهٔ نهم واسطهٔ هندسی جمله‌های اول و چهل‌ونهم است، بنابراین $(a+8d)^2=a(a+48d)$، یعنی $64d^2+16ad=48ad$. بنابراین $a=2d$. به این ترتیب، سه جملهٔ مورد نظر برابر با d، $2d$، $10d$ و $50d$ هستند. در نتیجه، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر ۵ است.

۲۶۱ **نکته** درج واسطهٔ هندسی

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $b>a$. اگر k عدد بین a و b را طوری بنویسیم که این اعداد، دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، گوییم بین a و b به تعداد k واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم. در این صورت قدرنسبت از رابطهٔ $r^{k+1}=\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید، زیرا b جملهٔ $(k+2)$اُم دنباله و a جملهٔ اول آن است.

تست ۹ بین ۸ و x^3 دو واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم و مجموع عددهای اضافه شده برابر ۳۰ شده است (جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی حاصل برابر ۸ است). حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای x کدام است؟

۱) -10 ۲) -12 ۳) -15 ۴) -20

راه‌حل قدرنسبت از رابطهٔ $r^3=\frac{x^3}{8}$ به‌دست می‌آید. بنابراین $r=\frac{x}{2}$. در نتیجه دنبالهٔ حاصل به‌صورت $8, 4x, 2x^2, x^3$ است. چون مجموع عددهای اضافه شده برابر ۳۰ است، پس

$$2x^2+4x=30\Rightarrow x^2+2x-15=0$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای x برابر $\frac{c}{a}=-15$ است.

۲۶۲ **نکته**

اگر چند عدد دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، برای سادگی در محاسبات می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

سه عدد: $\frac{a}{r}, a, ar$ — قدرنسبت $=r$

چهار عدد هم‌علامت: $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ — قدرنسبت $=r^2$

پنج عدد: $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$ — قدرنسبت $=r$

تست ۱۰ مجموع سه عدد که دنباله‌ای هندسی تشکیل می‌دهند، برابر $\frac{21}{4}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{27}{8}$ است. بیشترین مقدار ممکن قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

راه‌حل اگر این اعداد را به شکل $\frac{a}{r}, r, ar$ در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=\frac{27}{8}\Rightarrow a^3=\frac{27}{8}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

از طرف دیگر با توجه به مقدار حاصل‌جمع اعداد، می‌توان r را به‌دست آورد:

$$\frac{a}{r}+a+ar=\frac{21}{4}\Rightarrow\frac{3}{2r}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}r=\frac{21}{4}$$

پس از ساده کردن به معادلهٔ $r+\frac{1}{r}=\frac{5}{2}$ می‌رسیم که جواب‌های آن $r=2$ و $r=\frac{1}{2}$ هستند. بنابراین بیشترین مقدار ممکن قدرنسبت دنباله برابر ۲ است.

تست ۱۱ اگر حاصل‌ضرب پنج عدد که دنباله‌ای هندسی تشکیل می‌دهند برابر $2\sqrt[3]{4}$ باشد، عدد وسطی کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{4}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\sqrt[3]{2}$

راه‌حل اگر اعداد را به‌صورت $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$ در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\frac{a}{r^2}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^2=2\sqrt[3]{4}\Rightarrow a^5=\sqrt[3]{32}\Rightarrow a^5=(\sqrt[3]{2})^5\Rightarrow a=\sqrt[3]{2}$$

۲۶۳ **نکته**

اگر دنباله‌ای هم حسابی باشد و هم هندسی، آن‌گاه تمام جملات آن برابرند (دنباله‌ای ثابت است).

تست ۱۲ اگر $a+1, 2a-3, 3a-b, \ldots$ هم دنباله‌ای هندسی باشد و هم دنباله‌ای حسابی، حاصل a^2+b^2 کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۵۲ ۴) ۶۵

راه‌حل باید تمام جملات دنباله مساوی یکدیگر باشند، پس

$$a+1=2a-3 \Rightarrow a=4 \,, \quad 3a-b=2a-3 \Rightarrow b=a+3 \xrightarrow{a=4} b=7$$

در نتیجه $a^2+b^2=16+49=65$

دست‌گرمی

۲۶۷- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت مثبت، $a_1+a_5=30$ و $a_3+a_7=120$. مقدار a_1 کدام است؟

۱) $\frac{37}{12}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{30}{17}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲۶۸- در دنباله‌ای هندسی اگر $a_4a_8=3$، حاصل عبارت $a_3a_5a_7a_9$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۲۷

۲۶۹- در دنباله‌ای هندسی $a_1a_2\cdots a_8=81$. مقدار $a_2a_4a_5a_7$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $9\sqrt{3}$

۲۷۰- جملهٔ چهارم یک دنبالهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی جملات دوم و نهم آن است. قدرنسبت دنبالهٔ حسابی چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

آزمون ۱۸۰ دنبالهٔ هندسی (۱)

۱۷۹۱- در دنباله‌ای با جملهٔ عمومی a_n می‌دانیم $a_{n+1}=\frac{۳}{۲}a_n$. اگر $a_۳=۳$، مقدار $a_{۲۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۲۶}}$ ۲) $\frac{۳^{۲۸}}{۲^{۲۷}}$ ۳) $\frac{۳^{۲۹}}{۲^{۲۸}}$ ۴) $\frac{۳^{۳۰}}{۲^{۲۹}}$

۱۷۹۲- اگر $\sqrt{a}, \sqrt[۴]{۲}, \sqrt[۳]{۲}$ سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی باشند، جملهٔ سیزدهم این دنباله کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $۲\sqrt[۶]{۲}$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $۴\sqrt[۶]{۲}$

۱۷۹۳- واسطهٔ حسابی جواب‌های معادله‌ای درجهٔ دوم ۴/۵ و واسطهٔ هندسی جواب‌های آن ۱/۵ است. این معادله کدام است؟

۱) $۴x^۲-۳۶x+۹=۰$ ۲) $۴x^۲+۳۶x+۹=۰$

۳) $x^۲-۱۸x+۹=۰$ ۴) $x^۲+۱۸x+۹=۰$

۱۷۹۴- در دنباله‌ای هندسی با جملات مثبت می‌دانیم $a_۱a_۶=۲۷$ و $a_۲a_۴=۹$. مقدار $a_۵$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۱۷۹۵- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $-\frac{۱}{۲}$، مجموع جملات پنجم و هشتم چند برابر مجموع جملات هفتم و هشتم است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۷۹۶- حاصل‌ضرب پنج جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی برابر ۱۰۲۴ است. جملهٔ وسط کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۷۹۷- بین دو عدد $\sqrt{۲}$ و $۱۶\sqrt{۲}$ هفت واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم (جملهٔ اول $\sqrt{۲}$ است). جملهٔ سوم دنبالهٔ حاصل کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۲\sqrt{۲}$ ۴) $۶۴\sqrt{۲}$

۱۷۹۸- جملهٔ هشتادونهم دنبالهٔ حسابی $-۱۲, -\frac{۹۵}{۸}, \ldots$ با جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی $۲۴۳, \ldots$ برابر است. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۷۹۹- اگر $a, ۸, b$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند. اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، اعداد جدید دنباله‌ای هندسی می‌سازند. مجموع مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۱۸۰۰- جملات دوم، ششم و چهاردهم دنباله‌ای حسابی، سه جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۲

سؤال	گام
۱۷۹۱	۲۵۶ ۲۵۷
۱۷۹۲	۲۵۷ ۲۶۰
۱۷۹۳	۲۵۳ ۲۶۰
۱۷۹۴	۲۵۷
۱۷۹۵	۲۵۷
۱۷۹۶	۲۵۹ ۲۶۲
۱۷۹۷	۲۶۱
۱۷۹۸	۲۴۷ ۲۴۸ ۲۵۶ ۲۵۷
۱۷۹۹	۲۵۳ ۲۶۱
۱۸۰۰	۲۴۸ ۲۵۶ ۲۶۰

۱۸۰۱- در یک دنبالهٔ هندسی می‌دانیم $\frac{a_۸}{a_۶}=\sqrt{۲}$. مقدار $\frac{a_۷}{a_۳}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۸}$

۱۸۰۲- اگر $۲^{x-۴}, ۴^{۳x}, ۸^{۲-۳x}, \ldots$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۰}$

۱۸۰۳- اگر جملهٔ هفتم دنبالهٔ هندسی $\log_۴ a, \log_{۱۶} a, \ldots$ برابر $\frac{۱}{۳۲}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۱۸۰۴- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱، $a_۵-a_۱=۱۳۰$ و $a_۴-a_۲=۲۵$. مقدار $a_۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۲۴}$

۱۸۰۵- بین اعداد مثبت a و b پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم (جملهٔ اول a است). اگر چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کردیم، قدرنسبت دو برابر حالت قبل می‌شد. قدرنسبت دنباله در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۱۸۰۶- در دنباله‌ای هندسی، مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۶۴ است. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸۰۷- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ تشکیل می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}$ ۳) $\frac{۱+\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۴) $\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۱۰}}{۲}}$

۱۸۰۸- اگر اعداد $x+۴$، $۲x+y$ و $۲y+x$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی و سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، مقدار $x+۲y$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۱۸۰۹- جملات سوم، پنجم و ششم دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=a-n$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. جملهٔ دهم دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۱۸۱۰- در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، جملات سوم، پنجم و هشتم به‌ترتیب جملات اول تا سوم یک دنبالهٔ هندسی‌اند. نسبت جملهٔ چهارم دنبالهٔ هندسی به جملهٔ دوازدهم دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) $\frac{۲۳}{۲۶}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲۶}$ ۳) $\frac{۲۷}{۲۶}$ ۴) $\frac{۲۹}{۲۶}$

سؤال
۱۸۰۱
۱۸۰۲
۱۸۰۳
۱۸۰۴
۱۸۰۵
۱۸۰۶
۱۸۰۷
۱۸۰۸
۱۸۰۹
۱۸۱۰

درس چهارم: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

نکته مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

اگر جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر a_1 و قدرنسبت آن برابر d باشد، مجموع n جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

که چون $a_n=a_1+(n-1)d$، برابر می‌شود با

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

تست ۱

مجموع نوزده جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots$ کدام است؟

۱) -40 ۲) -38 ۳) -95 ۴) 76

راه‌حل در این دنباله جملهٔ اول برابر ۱ و قدرنسبت برابر $-\frac{1}{3}$ است. بنابراین $S_{19}=\frac{19}{2}(2a_1+18d)=\frac{19}{2}(2\times1-18\times\frac{1}{3})=-38$.

تست ۲

مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $2+\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots$ کدام است؟

۱) $\frac{n}{k}+\frac{n}{2k}$ ۲) $\frac{n}{k}+\frac{n^2}{2}$ ۳) $\frac{n^2}{2k}+\frac{n}{2k}$ ۴) $\frac{n}{k}+\frac{n(n-1)}{2}$

راه‌حل قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی برابر است با $1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k}=1$. بنابراین $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2\times\frac{1}{k}+(n-1)(1))=\frac{n}{2}(\frac{2}{k}+n-1)=\frac{n}{k}+\frac{n(n-1)}{2}$

تست ۳

در دنباله‌ای حسابی $a_1=24$ و $a_7=-18$. مجموع هفده جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) -544 ۲) -952 ۳) -1088 ۴) 51

راه‌حل توجه کنید که $S_{17}=\frac{17}{2}(2a_1+16d)$. بنابراین باید قدرنسبت را با استفاده از a_7 حساب کنیم:

$$a_7=a_1+6d\Rightarrow-18=24+6d\Rightarrow6d=-42\Rightarrow d=-7$$

پس مجموع ۱۷ جملهٔ نخست این دنباله برابر است با

$$S_{17}=\frac{17}{2}(2\times24+16\times(-7))=-544$$

تست ۴

جملهٔ عمومی دنباله‌ای حسابی به‌صورت $a_n=2n-7$ است. مجموع بیست‌وپنج جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) 600 ۲) 950 ۳) 475 ۴) 350

راه‌حل چون $a_n=2n-7$، پس $a_1=2\times1-7=-5$ و $a_{25}=2\times25-7=43$. از طرف دیگر $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$. بنابراین $S_{25}=\frac{25}{2}(-5+43)=475$

تست ۵

مجموع جمله‌های دنباله‌ای حسابی که جملهٔ اولش ۳ و جملهٔ آخرش ۳۹ است، برابر ۵۲۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow525=\frac{n}{2}(3+39)\Rightarrow n=25$$

بنابراین دنباله ۲۵ جمله دارد و در نتیجه

$$a_{25}=a_1+24d\Rightarrow39=3+24d\Rightarrow d=\frac{3}{2}$$

تست ۶ در مسابقهٔ توپ جمع‌کنی، سبدی در نقطهٔ شروع قرار داده شده است که فاصله‌اش از نخستین توپ ۵ متر است و بقیهٔ توپ‌ها در فاصله‌های ۳ متری از توپ‌های کناری‌شان روی یک خط راست قرار داده شده‌اند. ده توپ روی یک خط راست قرار دارند. هر بازیکن باید از کنار سبد شروع به حرکت کند، نزدیک‌ترین توپ را بردارد، برود و آن را در سبد بیندازد و این کار را تکرار کند تا همهٔ توپ‌ها را در سبد بیندازد. هر بازیکن در کل چه مسافتی را طی می‌کند؟



۱) ۳۲۰ ۲) ۳۵۰ ۳) ۳۷۰ ۴) ۴۰۰

راه‌حل برای اینکه بازیکنی توپ اول را بردارد و در سبد بیندازد، باید ۲×۵ متر را طی کند. برای توپ دوم باید ۲(۵+۳) متر را طی کند، برای توپ سوم باید ۲(۵+۲×۳) متر را طی کند، ... و برای توپ دهم باید ۲(۵+۹×۳) متر را طی کند. این عددها دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۲×۵ و جملهٔ آخر ۲(۵+۹×۳) تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ده‌تاست. بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با $S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲\times۵+۲(۵+۹\times۳))=۳۷۰$

یعنی هر بازیکن باید ۳۷۰ متر را طی کند تا همهٔ توپ‌ها را در سبد بیندازد.

تست ۷ حداکثر چند جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی $۲۴,۲۱,۱۸,\ldots$ را باید جمع کنیم تا حاصل برابر ۷۸ شود؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

راه‌حل توجه کنید که در این دنبالهٔ حسابی $a_۱=۲۴$ و $d=۲۱-۲۴=-۳$. اکنون توجه کنید که $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$. بنابراین اگر $S_n=۷۸$، آن‌گاه $۷۸=\frac{n}{۲}(۲\times۲۴+(n-۱)(-۳))=\frac{n}{۲}(۵۱-۳n)$. به این ترتیب

$$۳n^۲-۵۱n+۱۵۶=۰\Rightarrow n^۲-۱۷n+۵۲=۰\Rightarrow(n-۴)(n-۱۳)=۰$$

بنابراین $n=۴$ یا $n=۱۳$، یعنی باید چهار یا سیزده جملهٔ نخست دنبالهٔ حسابی موردنظر را جمع کنیم تا حاصل برابر ۷۸ شود. در نتیجه، حداکثر سیزده جمله از ابتدای دنباله را باید جمع کرد تا مجموعشان برابر ۷۸ شود.

تست ۸ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع پنج جملهٔ سوم از مجموع پنج جملهٔ نخست ۲۰۰ واحد بیشتر است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

راه‌حل مجموع پنج جملهٔ نخست برابر است با $S_۵=\frac{۵}{۲}(۲a_۱+۴d)=۵(a_۱+۲d)$. پنج جملهٔ سوم دنبالهٔ حسابی، خود دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول $a_{۱۱}$ است. بنابراین

$$a_{۱۱}+a_{۱۲}+\cdots+a_{۱۵}=\frac{۵}{۲}(۲a_{۱۱}+۴d)=۵(a_{۱۱}+۲d)=۵(a_۱+۱۲d)$$

در نتیجه

$$۵(a_۱+۱۲d)=۵(a_۱+۲d)+۲۰۰\Rightarrow ۵۰d=۲۰۰\Rightarrow d=۴$$

البته برای محاسبهٔ مجموع پنج جملهٔ سوم می‌توانستیم از $S_{۱۵}-S_{۱۰}$ نیز استفاده کنیم:

$$S_{۱۵}-S_{۱۰}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)-\frac{۱۰}{۲}(۲a_۱+۹d)=۵a_۱+۶۰d=۵(a_۱+۱۲d)$$

تست ۹ اگر عددهای سمت چپ معادلهٔ $۱+۷+۱۳+\cdots+x=۲۸۰$ جمله‌های دنباله‌ای حسابی باشند، مجموع رقم‌های x کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

راه‌حل سمت چپ معادله، مجموع جمله‌های یک دنبالهٔ حسابی است که جملهٔ اول آن ۱ و قدرنسبت آن ۶ است. بنابراین

$$۱+۷+۱۳+\cdots+x=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(۲+۶(n-۱))=\frac{n}{۲}(۶n-۴)=۳n^۲-۲n$$

در نتیجه

$$۳n^۲-۲n=۲۸۰\Rightarrow ۳n^۲-۲n-۲۸۰=۰\Rightarrow(۳n+۲۸)(n-۱۰)=۰\Rightarrow n=-\frac{۲۸}{۳}\ (\text{غ.ق.ق.}),\ n=۱۰$$

به این ترتیب $x=a_{۱۰}=a_۱+(۱۰-۱)d=۱+۹\times۶=۵۵$. پس مجموع رقم‌های x برابر ۱۰ است.

۲۶۵ **نکته**

اگر S_n مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشد، آن‌گاه $S_1=a_1$ و $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$.

تست ۱۰

اگر مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی به‌صورت $S_n=2n^2-3n$ باشد، حاصل‌ضرب جملهٔ نخست و قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۱) -4 ۲) -6 ۳) -8 ۴) -9

راه‌حل

توجه کنید که $S_1=2\times1^2-3\times1=-1\Rightarrow a_1=-1$ ، $S_2=2\times2^2-3\times2=2\Rightarrow a_1+a_2=2\Rightarrow -1+a_2=2\Rightarrow a_2=3$

بنابراین قدرنسبت دنباله برابر است با $d=a_2-a_1=4$. در نتیجه $a_1d=-4$.

۲۶۶ **نکته**

اگر S_n مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشد، عددهایی حقیقی و یکتا مانند A و B وجود دارند که $S_n=An^2+Bn$.

تست ۱۱

اگر $S_n=-2n^2+(5+k)n-k+2$ مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشد، جملهٔ دوم این دنباله چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل

چون S_n باید به شکل An^2+Bn باشد، پس $-k+2=0$. در نتیجه $k=2$. به این ترتیب $S_n=-2n^2+7n$. در نتیجه

$S_1=-2\times1^2+7\times1=5\Rightarrow a_1=5$ ، $S_2=-2\times2^2+7\times2=6\Rightarrow a_1+a_2=6\Rightarrow 5+a_2=6\Rightarrow a_2=1$

۲۶۷ **نکته** مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

اگر جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی برابر a_1 و قدرنسبت آن برابر q باشد، مجموع n جملهٔ نخست این دنبالهٔ هندسی برابر است با

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

تست ۱۲

مجموع پنج جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۵ برابر $\frac{781}{75}$ شده است. جملهٔ نخست این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1}{85}$ ۲) $\frac{1}{75}$ ۳) $\frac{1}{65}$ ۴) $\frac{1}{55}$

راه‌حل

چون $q=5$ و $S_5=\frac{781}{75}$، پس $S_5=a_1\frac{q^5-1}{q-1}=a_1\frac{5^5-1}{5-1}=\frac{781}{75}$. بنابراین $a_1=\frac{1}{75}$.

تست ۱۳

در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ دهم، ۵ برابر جملهٔ سوم است. مجموع چهارده جملهٔ نخست چند برابر مجموع هفت جملهٔ نخست است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳۳ ۴) ۳۲

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $\frac{a_{10}}{a_3}=5\Rightarrow\frac{a_1q^9}{a_1q^2}=5\Rightarrow q^7=5$

اکنون نسبت S_{14} به S_7 را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{14}}{S_7}=\frac{a_1\frac{q^{14}-1}{q-1}}{a_1\frac{q^7-1}{q-1}}=\frac{q^{14}-1}{q^7-1}=\frac{(q^7-1)(q^7+1)}{q^7-1}=q^7+1=6$$

تست ۱۴

حاصل $\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{13}}{1+2+2^2+\cdots+2^6}$ کدام است؟

۱) $\frac{8191}{63}$ ۲) ۶۵ ۳) $\frac{4128}{31}$ ۴) ۱۲۹

راه‌حل عبارت صورت ۱۴ جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت ۲ است. و عبارت مخرج ۷ جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدر نسبت ۲ است. پس

$$\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{13}}{1+2+2^2+\cdots+2^6}=\frac{1\times\frac{2^{14}-1}{2-1}}{1\times\frac{2^7-1}{2-1}}=\frac{2^{14}-1}{2^7-1}=\frac{(2^7-1)(2^7+1)}{2^7-1}=2^7+1=129$$

تست ۱۵ **اگر** $\frac{(a^3+a^2+a+1)(a^8+a^4+1)}{a^9+a^6+a^3+1}=31$، **مقدار a کدام است؟**

۱) فقط -5 ۲) $-5,5$ ۳) $-6,5$ ۴) -7

راه‌حل توجه کنید که (چون $a\neq 1$)، $a^3+a^2+a+1=\frac{a^4-1}{a-1}$. اکنون توجه کنید که a^8+a^4+1 مجموع جمله‌های دنبالهٔ هندسی ۱، a^4 و a^8 با جملهٔ نخست ۱ و قدرنسبت a^4 است. در نتیجه

$$a^8+a^4+1=\frac{a^{12}-1}{a^4-1}$$

بنابراین صورت کسر داده شده برابر است با $\frac{a^{12}-1}{a-1}$. به همین ترتیب، مخرج کسر برابر است با $\frac{a^{12}-1}{a^3-1}$. در نتیجه

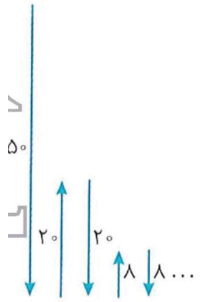
$$\frac{\frac{a^{12}-1}{a-1}}{\frac{a^{12}-1}{a^3-1}}=\frac{a^3-1}{a-1}=a^2+a+1=31\Rightarrow a^2+a-30=0\Rightarrow a=-6\ ,\ a=5$$

تست ۱۶ **توپی را از هر ارتفاعی که رها می‌کنیم، پس از برخورد با زمین به اندازهٔ دو پنجم ارتفاع اولیهٔ خود بالا می‌رود. اگر این توپ را از ارتفاع ۵۰ متری رها کنیم، مسافتی که تا برخورد دهم با زمین طی می‌کند، چند متر است؟**

۱) $\frac{350}{3}-\frac{200}{3}(\frac{2}{5})^{10}$ ۲) $\frac{350}{3}-\frac{200}{3}(\frac{2}{5})^{9}$ ۳) $\frac{200}{3}-\frac{200}{3}(\frac{2}{5})^{9}$ ۴) $50-\frac{200}{3}(\frac{2}{5})^{10}$

راه‌حل طول مسیری که توپ بعد از اولین برخورد تا دهمین برخورد با زمین طی می‌کند برابر است با

$$2(20+8+\cdots+20\times(\frac{2}{5})^8)=2\times 20\times\frac{(\frac{2}{5})^9-1}{\frac{2}{5}-1}=\frac{200}{3}-\frac{200}{3}(\frac{2}{5})^9$$



توپ قبل از اولین برخورد با زمین هم ۵۰ متر طی کرده است. پس طول کل مسیر برابر است با

$$50+\frac{200}{3}-\frac{200}{3}(\frac{2}{5})^9=\frac{350}{3}-\frac{200}{3}(\frac{2}{5})^9$$

تست ۱۷ **حداقل چند جمله از دنبالهٔ هندسی** $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots$ **را جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۱/۹۹۹ گردد؟**

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

راه‌حل مجموع n جملهٔ نخست این دنبالهٔ هندسی برابر است با

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{1\times((\frac{1}{2})^n-1)}{\frac{1}{2}-1}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

پس باید

$$2-\frac{1}{2^{n-1}}>1/999\Rightarrow\frac{1}{1000}>\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow 2^{n-1}>1000\Rightarrow n-1>9\Rightarrow n>10\Rightarrow n\geq 11$$

یعنی حداقل باید یازده جمله را جمع کنیم.

تست ۱۸

تعداد جمله‌های دنباله‌ای هندسی عددی زوج است و مجموع همهٔ این جمله‌ها، ده برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد است. قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۸ ۴) ۹

راه‌حل

فرض کنید تعداد جمله‌های دنبالهٔ موردنظر $2n$ باشد. بنابر فرض $S_{2n}=10(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$. در نتیجه

$$a_1\frac{q^{2n}-1}{q-1}=10(a_1+a_1q^2+\cdots+a_1q^{2n-2})=10(a_1+a_1q^2+\cdots+a_1(q^2)^{n-1})=10a_1\frac{(q^2)^n-1}{q^2-1}=10a_1\frac{q^{2n}-1}{(q-1)(q+1)}$$

بنابراین $q+1=10$. در نتیجه $q=9$.

نکته ۲۶۸

اگر S_n مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی باشد، آن‌گاه $S_1=a_1$ و $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$.

تست ۱۹

اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت $S_n=2^{n+2}-4$ باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

راه‌حل

می‌دانیم $a_1=S_1$، پس $a_1=S_1=2^3-4=4$. از طرف دیگر، $a_1+a_2=S_2=2^4-4=12\Rightarrow a_2=8$

بنابراین $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{8}{4}=2$.

دست‌گرمی

۲۷۱- در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ اول برابر -7 و قدرنسبت برابر ۲ است. مجموع ده جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۲۷۲- مجموع پانزده جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر ۳۰۰ است. جملهٔ هشتم دنباله کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۵ ۴) ۴۵

۲۷۳- چندتا از جمله‌های دنبالهٔ حسابی $9,17,25,\ldots$ را از ابتدا جمع کنیم تا حاصل ۶۳۶ شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۷۴- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع n جملهٔ نخست از رابطهٔ $S_n=5n^2-4n$ به‌دست می‌آید. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۲۷۵- در دنباله‌ای هندسی $a_1=135$ و $S_3=195$. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ یا $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ یا $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ یا $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$ یا $-\frac{1}{3}$

۲۷۶- چند تا از جمله‌های دنبالهٔ هندسی $\ldots,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{2}{9},\ldots$ را از ابتدا جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{55}{72}$ شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۷۷- در دنباله‌ای هندسی مجموع پنج جملهٔ نخست پنج برابر جملهٔ نخست است و مجموع پانزده جملهٔ نخست برابر ۱۰۰ است. مجموع جمله‌های نخست، ششم و یازدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۸۰ ۳) ۵۰ ۴) ۴۰

آزمون ۱۸۲ — مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۱)

۱۸۱۱- قدرنسبت دنباله‌ای حسابی برابر -۳ است و $a_۹+۴=۳a_۷$. مجموع دوازده جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۸۱۲- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر ۱۰۰ و مجموع شش جملهٔ نخست این دنباله، ۵ برابر مجموع شش جملهٔ بعدی آن است. قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۸ ۳) -۶ ۴) -۵

۱۸۱۳- در دنباله‌ای حسابی $a_۵=۱۳$ و قدرنسبت دنباله برابر $\frac{a_{۲۱}-a_{۱۵}}{a_{۲۷}-a_{۱۹}}$ است. مجموع هفده جملهٔ نخست این دنباله کدام است؟

۱) ۲۷۰ ۲) ۲۷۲ ۳) ۲۷۴ ۴) ۲۷۶

۱۸۱۴- به ازای هر عدد طبیعی مانند n، مجموع n جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر $۴n^۲-۳n$ است. جملهٔ عمومی این دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) $n-۲$ ۲) $۵n-۶$ ۳) $۷n-۸$ ۴) $۸n-۷$

۱۸۱۵- مجموع دو عدد برابر $\frac{۱۳}{۶}$ است. بین این دو عدد $۲n$ واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. اگر مجموع این $۲n$ عدد برابر $۲n+۱$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۸۱۶- در دنبالهٔ هندسی $\sqrt{۲}, \sqrt{۸}, \sqrt{۳۲}, \ldots$ مجموع ده جملهٔ اول کدام است؟

۱) $۵۱۱\sqrt{۲}$ ۲) $۱۰۲۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲۰۴۷\sqrt{۲}$ ۴) $۴۰۹۵\sqrt{۲}$

۱۸۱۷- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت منفی، $a_۱=۸$ و $S_۳=۱۰۴$. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

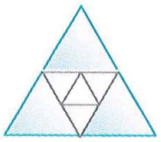
۱۸۱۸- مقدار x از معادلهٔ $۲^x+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}+\cdots+۲^{x+۵}=۵۰۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۱۹- حداقل چند جمله از ابتدای دنبالهٔ هندسی $۶, ۳, \frac{۳}{۲}, \ldots$ را جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از $\frac{۲۴۸}{۲۱}$ شود؟

۱) شش جمله ۲) هفت جمله ۳) هشت جمله ۴) نه جمله

۱۸۲۰- وسط ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی را به هم وصل می‌کنیم و سه مثلث از چهار مثلث ایجاد شده را رنگ می‌کنیم. سپس این کار را با مثلث باقی‌مانده تکرار می‌کنیم. حداقل چند مرحله باید رنگ‌آمیزی را انجام دهیم تا بیش از ۹۹/۹ درصد مساحت مثلث اولیه رنگ شود؟



۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

سؤال
۱۸۱۱
۱۸۱۲
۱۸۱۳
۱۸۱۴
۱۸۱۵
۱۸۱۶
۱۸۱۷
۱۸۱۸
۱۸۱۹
۱۸۲۰

آزمون ۱۸۳ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۲)

۱۸۲۱- جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی برابر -۶ و جملهٔ آخر آن برابر ۳۰ است. اگر مجموع جمله‌های این دنبالهٔ حسابی ۱۲۰ باشد، تعداد جمله‌های آن چندتا است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۸۲۲- اگر $\frac{n-۲}{۲n}, \frac{n-۳}{۲n}, \frac{n-۴}{۲n}$ سه جملهٔ نخست دنباله‌ای حسابی باشند و مجموع n جملهٔ نخست این دنباله برابر ۴۰ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۵۷ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۶۳ ۴) ۱۶۵

۱۸۲۳- مجموع تعدادی از جمله‌های دنبالهٔ حسابی $۵۰, ۴۶, ۴۲, \ldots$ از ابتدا حداکثر کدام است؟

۱) ۳۳۰ ۲) ۳۳۴ ۳) ۳۳۸ ۴) ۳۴۴

۱۸۲۴- در یک دنبالهٔ حسابی ۲ واحد از قدرنسبت کم می‌کنیم. برای اینکه مجموع ده جملهٔ اول ثابت بماند، چقدر باید به جملهٔ اول اضافه کنیم؟

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۱۸۲۵- اگر اعداد سمت چپ معادلهٔ $۱+۴+۷+\cdots+x=۱۴۵$ جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، مقدار x کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۵ ۳) ۲۸ ۴) ۳۱

۱۸۲۶- قدرنسبت دنباله‌ای هندسی برابر ۲ است. مجموع n جملهٔ نخست این دنباله کدام است؟

۱) $۲a_n - a_۱$ ۲) $۳a_n - a_۱$ ۳) $۲a_n + a_۱$ ۴) $۳a_n + a_۱$

۱۸۲۷- در دنباله‌ای هندسی $a_۲ = ۳$ و $a_۷ = ۹۶$. مقدار $S_{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۰۴۹}{۲}$ ۲) $\frac{۳۰۵۷}{۲}$ ۳) $\frac{۳۰۶۹}{۲}$ ۴) $\frac{۳۰۷۱}{۲}$

۱۸۲۸- مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a, aq, aq^۲, \ldots$ چند برابر مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a, \frac{a}{q}, \frac{a}{q^۲}, \cdots$ است؟

۱) q^n ۲) $q^{n-۱}$ ۳) $q^{n+۱}$ ۴) $q^{n+۲}$

۱۸۲۹- در دنباله‌ای هندسی و غیرثابت با جمله‌های مثبت $S_۶ = ۲۱S_۲$. قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۸۳۰- در دنباله‌ای هندسی، مجموع ده جملهٔ اول ۳۳ برابر مجموع پنج جملهٔ اول است. جملهٔ پنجم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) ۸۱ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۶ ۴) ۷۲۹

سؤال	گام
۱۸۲۱	۲۶۴
۱۸۲۲	۲۴۷ ۲۶۴
۱۸۲۳	۲۴۷ ۲۶۴
۱۸۲۴	۲۶۴
۱۸۲۵	۲۴۷ ۲۶۴
۱۸۲۶	۲۶۷
۱۸۲۷	۲۵۶ ۲۶۷
۱۸۲۸	۲۵۶ ۲۶۷
۱۸۲۹	۲۶۷
۱۸۳۰	۲۵۷ ۲۶۷

آزمون ۱۸۴ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۳)

۱۸۳۱- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع جمله‌های هفتم و چهاردهم برابر ۶۰ است. مجموع بیست جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۶۲۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۶۵۰

۱۸۳۲- در دنبالهٔ حسابی $۳,۷,۱۱,\ldots$ حداقل چند جمله از ابتدای آن را جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از ۳۰۰ شود؟

۱) یازده جمله ۲) دوازده جمله ۳) سیزده جمله ۴) چهارده جمله

۱۸۳۳- در دنباله‌ای حسابی و n جمله‌ای، $a_۱=-۷$ ، $a_۲=-۳$ و $S_n-a_n=۵۶$. مقدار n کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۱۸۳۴- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع سه جملهٔ آخر برابر ۸۰ است. اگر مجموع تمام جمله‌ها برابر ۳۰۰ باشد، تعداد جمله‌های دنباله کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۸۳۵- در یک دنبالهٔ حسابیِ $۲k+۱$ جمله‌ای، نسبت مجموع $k+۱$ جملهٔ با ردیف فرد به مجموع k جملهٔ با ردیف زوج کدام است؟

۱) $\frac{۲k}{۲k+۱}$ ۲) $\frac{۴k+۳}{۲k+۱}$ ۳) $\frac{۴k+۳}{۴k+۲}$ ۴) $\frac{k+۱}{k}$

۱۸۳۶- مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n=\frac{۴}{۳}(۳^n-۱)$ به‌دست می‌آید. جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۲۴ ۴) ۲۷۰

۱۸۳۷- در دنبالهٔ هندسی $۱,\sqrt[۳]{۳},\sqrt[۳]{۹},\ldots$ مجموع شش جملهٔ دوم چند برابر مجموع شش جملهٔ اول است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۸۳۸- دربارهٔ دنبالهٔ $a_۱,a_۲,\ldots$ می‌دانیم $S_n=۲^n-۱$. حاصل $a_۱^۲+\cdots+a_n^۲$ کدام است؟

۱) $(۲^n-۱)^۲$ ۲) $\frac{۱}{۳}(۲^n-۱)$ ۳) $۴^n-۱$ ۴) $\frac{۱}{۳}(۴^n-۱)$

۱۸۳۹- تعداد جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله‌های دنباله ۳ برابر مجموع جمله‌های با ردیف زوج باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۴۰- حاصل $\frac{t^{۱۱}+t^{۱۰}+t^۹+\cdots+t+۱}{t^۹+t^۶+t^۳+۱}$ به‌ازای $t=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ کدام است؟

۱) $۳+\sqrt{۵}$ ۲) $۳-\sqrt{۵}$ ۳) $۲+\sqrt{۵}$ ۴) $۴-\sqrt{۵}$

سؤال
۱۸۳۱
۱۸۳۲
۱۸۳۳
۱۸۳۴
۱۸۳۵
۱۸۳۶
۱۸۳۷
۱۸۳۸
۱۸۳۹
۱۸۴۰

آزمون ۱۸۵ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (۴)

۱۸۴۱- جملهٔ اول دنباله‌ای حسابی برابر ۸ و مجموع سیزده جملهٔ نخست آن برابر -۵۲ است. قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۱۸۴۲- حداکثر چند جمله از ابتدای دنبالهٔ حسابی $۱۸،۱۵،۱۲،\ldots$ را جمع کنیم تا مجموعشان برابر ۴۵ شود؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۸۴۳- در دنباله‌ای حسابی $S_{۱۷}-S_{۱۶}=۲۶$ و $S_{۳۰}-S_{۲۹}=۰$. قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۸۴۴- در دنباله‌ای حسابی $a_۷=۱۶$ و $S_{۱۲}=۱۷۴$. مقدار $a_۲+a_۴+\cdots+a_{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۷۵ ۳) ۴۵ ۴) ۲۵

۱۸۴۵- عددهای طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد:

$$(۱)،(۲،۳)،(۴،۵،۶)،(۷،۸،۹،۱۰)،\ldots$$

مجموع جمله‌ها در دستهٔ بیستم و پنجم کدام است؟

۱) ۷۸۲۵ ۲) ۷۸۳۰ ۳) ۷۸۳۵ ۴) ۷۸۴۰

۱۸۴۶- اگر $a، \sqrt{a^۲+۱}، a+۱،\ldots$ جمله‌های دنباله‌ای هندسی باشند، مجموع ده جملهٔ نخست دنباله کدام است؟

۱) $۳۳(۱+\sqrt{۲})$ ۲) $۳۱(۱+\sqrt{۲})$ ۳) $۳۱(\sqrt{۲}-۱)$ ۴) $۳۳(\sqrt{۲}-۱)$

۱۸۴۷- در دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۳، $S_{۹۹}-S_{۹۰}=۸۱$. مقدار $S_۹$ کدام است؟

۱) $۳^{-۷۶}$ ۲) $۳^{-۷۸}$ ۳) $۳^{-۸۴}$ ۴) $۳^{-۸۶}$

۱۸۴۸- در دنبالهٔ هندسی $a_۱، a_۲، \ldots، a_n$،

$$S_n=۱۶۰،\quad a_۳-a_۱=۳۲،\quad a_۴-a_۲=۹۶$$

مقدار n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۸۴۹- در دنباله‌ای هندسی و غیرثابت با جمله‌های مثبت $S_n=۳$ و $S_{۳n}=۳۹$. مقدار $S_{۴n}$ کدام است؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۰ ۴) ۶۰

۱۸۵۰- اگر قدرنسبت دنباله‌ای هندسی با جملهٔ عمومی a_n عددی در بازهٔ $[-۱،-\frac{۱}{۲}]$ باشد، مجموع بیشترین و کمترین مقدار $\frac{S_n}{a_{n+۱}-a_۱}$ کدام است؟

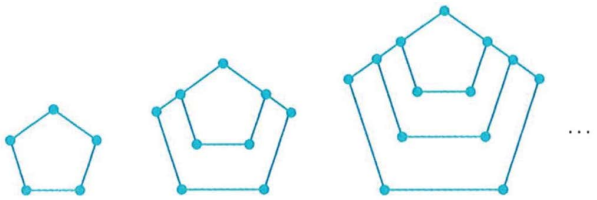
۱) $-\frac{۷}{۶}$ ۲) $-\frac{۶}{۷}$ ۳) $-\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۶}{۵}$

سؤال	گام
۱۸۴۱	۲۶۴
۱۸۴۲	۲۴۷ ۲۶۴
۱۸۴۳	۲۴۸ ۲۶۴
۱۸۴۴	۲۴۸ ۲۶۴
۱۸۴۵	۲۶۴
۱۸۴۶	۲۵۶ ۲۶۷
۱۸۴۷	۲۶۷
۱۸۴۸	۲۵۷ ۲۶۷
۱۸۴۹	۲۶۷
۱۸۵۰	۲۶۷

آزمون ۱۸۶

آزمون فصل هفتم (۱)

۱۸۵۱- تعداد نقاط روی شکل چندم از الگوی مقابل برابر ۶۱ است؟



۱) چهاردهم

۲) پانزدهم

۳) شانزدهم

۴) هفدهم

۱۸۵۲- در دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = 95n - n^2$ چند جملهٔ مثبت وجود دارد؟

۱) ۹۵ ۲) ۹۴ ۳) ۹۰ ۴) ۸۹

۱۸۵۳- در دنباله‌ای حسابی $a_5 = 2a_{10}$. مقدار $15a_{15}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۸۵۴- اگر $\log_2(16a)$، $\log_2(3a+4)$ و $\log_2 a$ سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۸۵۵- جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = 2 - 3n$ را ۴ واحد کاهش و قدرنسبت را ۶ واحد افزایش می‌دهیم. جملهٔ بیست‌ویکم دنبالهٔ حسابی جدید کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۲ ۳) ۵۵ ۴) ۵۷

۱۸۵۶- حاصل‌ضرب پانزده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\frac{1}{2}, 1, 2, \ldots$ کدام است؟

۱) 2^{30} ۲) 2^{60} ۳) 2^{75} ۴) 2^{90}

۱۸۵۷- اگر عددهای $3x-1$، $2x+3$ و $y-9$ جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی و هندسی باشند، حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۸ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۱۸۵۸- در دنباله‌ای هندسی $a_5 - a_3 = 96$ و $a_8 - a_6 = 12$. جملهٔ پنجم این دنباله چقدر است؟

۱) -64 ۲) -16 ۳) -32 ۴) -8

۱۸۵۹- عددهای طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد:

$$(1), (3,5), (7,9,11), \ldots$$

مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ سی‌اُم کدام است؟

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۷۵۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۸۵۰

۱۸۶۰- در دنباله‌ای هندسی مجموع پنج جملهٔ اول برابر ۸ و مجموع ده جملهٔ اول برابر ۲۶۴ است. جملهٔ هفتم دنباله کدام است؟

۱) $\frac{32}{31}$ ۲) $\frac{128}{31}$ ۳) $\frac{256}{31}$ ۴) $\frac{512}{31}$

سؤال
۱۸۵۱
۱۸۵۲
۱۸۵۳
۱۸۵۴
۱۸۵۵
۱۸۵۶
۱۸۵۷
۱۸۵۸
۱۸۵۹
۱۸۶۰

آزمون ۱۸۷ آزمون فصل هفتم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۱۸۶۱- در یک دنبالهٔ اعداد، $a_1=1$ و برای هر $n\geq 2$، $a_n=2a_{n-1}+1$. جملهٔ هشتم این دنباله کدام است؟ تجربی ۹۵

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۵۹ ۳) ۲۴۷ ۴) ۲۵۵

۱۸۶۲- اعداد 2^b، $4\sqrt{2}$، 2^a سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی‌اند. واسطهٔ حسابی a و b کدام است؟ ریاضی ۸۷

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) $\sqrt{2}$

۱۸۶۳- تفاضل جملهٔ دهم از جملهٔ دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۵ و مجموع جملهٔ دهم و دوازدهم برابر ۲۵ است. جملهٔ بیست و یکم این دنباله کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۸۴

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷/۵ ۴) ۳۸/۵

۱۸۶۴- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ تجربی ۹۲

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{7}{3}$

۱۸۶۵- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ ریاضی ۸۱

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۸۶۶- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول برابر ۳ است. مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟ ریاضی ۸۸

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

۱۸۶۷- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع بیست جملهٔ اول سه برابر مجموع دوازده جملهٔ اول آن است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ دهم کدام است؟ ریاضی ۹۰

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۱۸۶۸- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع پنج جملهٔ اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟ خارج از کشور تجربی ۹۱

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸۶۹- عددهای طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد:

$$(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),\ldots$$

مجموع جمله‌ها در دستهٔ بیستم کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۴

۱) ۴۰۱۰ ۲) ۴۰۲۰ ۳) ۴۰۳۰ ۴) ۴۰۴۰

۱۸۷۰- حاصل $\frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}$ به‌ازای $t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۳

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

سؤال	گام
۱۸۶۱	۲۴۶
۱۸۶۲	۲۴۶
۱۸۶۳	۲۴۸ ۲۵۱
۱۸۶۴	۲۴۸ ۲۶۰
۱۸۶۵	۲۴۸ ۲۵۶
۱۸۶۶	۲۵۷ ۲۶۷
۱۸۶۷	۲۴۸ ۲۶۴
۱۸۶۸	۲۴۸ ۲۶۴
۱۸۶۹	۲۶۴
۱۸۷۰	۲۶۷

۱۸۷۱- در یک دنبالهٔ اعداد، $a_1=3$ و برای هر $n\geq 2$، $a_n=2a_{n-1}-2$. مقدار a_8-a_7 کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۱۸۷۲- اعداد $2p+3, 3p+4, 5p-1$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ ریاضی - ۸۴

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸۷۳- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ متوالی برابر ۱۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟ تجربی - ۹۰

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸۷۴- در یک دنبالهٔ حسابی جملات اول، پنجم و یازدهم به‌ترتیب سه جملهٔ متوالی از دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از ۱ هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۸۷۵- در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند. چندمین جملهٔ این دنباله، صفر است؟ تجربی - ۸۸

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۱۸۷۶- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول ۱۵۳ است. جملهٔ اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟ ریاضی - ۸۹

۱) $\frac{81}{16}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۱۸۷۷- در بیست جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است. جملهٔ اول کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۸۵

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۷۸- عددهای طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد:

$$(1),(3,5),(7,9,11),\ldots$$

مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ سی‌اُم کدام است؟ تجربی - ۹۴

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۷۵۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۸۵۰

۱۸۷۹- تعداد جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله‌های دنباله ۳ برابر مجموع جمله‌های با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ ریاضی - ۹۴

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۸۰- حاصل $\frac{t^{11}+t^{10}+t^9+\cdots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}$ به‌ازای $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ کدام است؟ ریاضی - ۹۳

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: توان و ریشه

تعریف ریشهٔ nاُم

۲۶۹

فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n\geq 2$. عدد b را ریشهٔ nاُم عدد a می‌نامیم، به شرطی که $b^n=a$. ریشهٔ nاُم مثبت عدد مثبت a را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم. همچنین، $\sqrt[n]{0}=0$.

$a>0$	n زوج باشد	a دو ریشهٔ nاُم قرینه دارد: $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$
	n فرد باشد	a یک ریشهٔ nاُم دارد: $\sqrt[n]{a}$
$a<0$	n زوج باشد	a ریشهٔ nاُم ندارد.
	n فرد باشد	a یک ریشهٔ nاُم دارد: $\sqrt[n]{a}$

نکته ویژگی‌های ریشهٔ nاُم

۲۷۰

فرض کنید a و b عددهایی حقیقی و m و n عددهایی طبیعی باشند که $m,n\geq 2$. (اگر n زوج باشد، a و b نامنفی‌اند) در این صورت

۱) $(\sqrt[n]{a})^n=a$ ۲) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ۳) $(b\neq 0)\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ۴) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

۵) اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n}=a$ و اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

۶) اگر n عددی فرد باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}$ و اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a^nb}=|a|\sqrt[n]{b}$.

۷) اگر a عددی منفی و n عددی زوج باشد، آن‌گاه $a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^nb}$.

۸) $\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

۹) $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

۱۰) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ (اگر m یا n زوج باشد، a نامنفی است)

تست ۱ اگر $a<0$ ، حاصل عبارت $\sqrt[3]{a^3}+2\sqrt[4]{a^4}$ کدام است؟

۱) $3a$ ۲) $-a$ ۳) $-2a$ ۴) $-3a$

راه‌حل توجه کنید که $\sqrt[3]{a^3}=a$ و چون $a<0$ ، پس $\sqrt[4]{a^4}=|a|=-a$. بنابراین $\sqrt[3]{a^3}+2\sqrt[4]{a^4}=a+2(-a)=a-2a=-a$.

تست ۲ مقدار $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[4]{2}$ ۲) $\sqrt[6]{2}$ ۳) $\sqrt[8]{2}$ ۴) $\sqrt[24]{2}$

راه‌حل می‌توان نوشت $\sqrt[8]{2}=\sqrt[4\times 2]{2}=\sqrt[4\times 3\times 2]{2^3}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2^2\times 2}}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$.

تست ۳ اگر $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}=2$ ، مقدار $\sqrt[3]{4a^2\sqrt[3]{a^2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

راه‌حل توجه کنید که $\sqrt[15]{a^4}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^3\times a}}=\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}=2$. بنابراین $a^4=2^{15}$. از طرف دیگر،

$$\sqrt[3]{4a^2\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[3]{4\sqrt[3]{a^6\times a^2}}=\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^8}}=\sqrt[3]{4}\sqrt[9]{a^8}=\sqrt[3]{4}\sqrt[9]{(a^4)^2}=\sqrt[3]{4}\sqrt[9]{2^{30}}=\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2^{10}}=\sqrt[3]{2^{12}}=2^4=16$$

تست ۴ حاصل عبارت $\frac{\sqrt[4]{20}-\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[4]{4}-1$ ۲) $\sqrt[4]{5}-1$ ۳) $\sqrt[4]{4}+1$ ۴) $\sqrt[4]{5}+1$

راه‌حل توجه کنید که

$$\frac{\sqrt[4]{20}-\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1}=\frac{\sqrt[4]{5\times4}-\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1}=\frac{\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1}=\frac{\sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{4}-1)+\sqrt[4]{4}-1}{\sqrt[4]{4}-1}=\frac{(\sqrt[4]{4}-1)(\sqrt[4]{5}+1)}{\sqrt[4]{4}-1}=\sqrt[4]{5}+1$$

۲۷۱

نکته مقایسهٔ ریشه‌ها

۱) اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه $a<b\Leftrightarrow a^n<b^n$ و $a<b\Leftrightarrow\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

۲) اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند و n عددی طبیعی و زوج باشد، آن‌گاه $a<b\Leftrightarrow a^n<b^n$ و $a<b\Leftrightarrow\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

تست ۵ اگر $0<a<1$، آن‌گاه حاصل عبارت $A=|a-\sqrt{a}|-|a-\sqrt[3]{a}|+|\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{a}$ ۲) $2\sqrt[3]{a}$ ۳) $2a$ ۴) صفر

راه‌حل چون $0<a<1$، پس $a<\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}$. بنابراین $a-\sqrt{a}<0$، $a-\sqrt[3]{a}<0$ و $\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}>0$. پس

$$A=-(a-\sqrt{a})+(a-\sqrt[3]{a})-(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})=-a+\sqrt{a}+a-\sqrt[3]{a}-\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}=0$$

تست ۶ اگر $a=\sqrt{2}$، $b=\sqrt[3]{3}$ و $c=\sqrt[6]{6}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a<b<c$ ۲) $b<c<a$ ۳) $c<a<b$ ۴) $c<b<a$

راه‌حل توجه کنید که $a=\sqrt{2}=\sqrt[3\times2]{2^3}=\sqrt[6]{8}$، $b=\sqrt[3]{3}=\sqrt[3\times2]{3^2}=\sqrt[6]{9}$ و $c=\sqrt[6]{6}$. بنابراین

$$\sqrt[6]{6}<\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}\Rightarrow c<a<b$$

۲۷۲

تعریف توان گویا

- فرض کنید n عددی طبیعی باشد، $n\geq2$ و $a>0$. در این صورت $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$.
- فرض کنید $a>0$، m عددی صحیح و n عددی طبیعی باشد $(n\geq2)$. در این صورت $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

۲۷۳

نکته ویژگی‌های توان‌های گویا

فرض کنید a و b عددهایی حقیقی و مثبت و r و s عددهایی گویا باشند. در این صورت

۱) $a^r\times a^s=a^{r+s}$ ۲) $(a^r)^s=a^{rs}$ ۳) $(ab)^r=a^r\times b^r$ ۴) $(\frac{a}{b})^r=\frac{a^r}{b^r}$ ۵) $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

تست ۷ اگر $a>0$، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[6]{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt[12]{a}}$ ۲) $\sqrt[12]{a}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$ ۴) $\sqrt[6]{a}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt[6]{a}\times\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}}=a^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}=a^{-\frac{1}{12}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{12}}}=\frac{1}{\sqrt[12]{a}}$$

تست ۸

اگر $\frac{\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}=\sqrt[8]{a}$، مقدار a کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

راه‌حل توجه کنید که $2^{\frac{3}{8}}=2^{\frac{9}{24}}=(2^6)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}}=\sqrt[4]{2\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{6}}}=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$. بنابراین $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{8}}=2^{-\frac{1}{8}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{3}{8}}=2^{\frac{1}{8}}$. در نتیجه $\frac{\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}=\frac{2^{\frac{3}{8}}}{2^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{3}{8}-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{8}}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{8}}$

$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{8}}$، پس $a=\frac{1}{2}$.

نکته مقایسهٔ اعداد با نمای گویا ۲۷۴

فرض کنید a عددی حقیقی باشد و $a>1$.

- اگر r عددی گویا و مثبت باشد، آن‌گاه $a^r>1$.
- اگر r و s عددهایی گویا و مثبت باشند و $r>s$، آن‌گاه $a^r>a^s$.

فرض کنید a عددی حقیقی باشد و $0<a<1$.

- اگر r عددی گویا و مثبت باشد، آن‌گاه $0<a^r<1$.
- اگر r و s عددهایی گویا و مثبت باشند و $r>s$، آن‌گاه $a^r<a^s$.

تست ۹

اگر $a=\sqrt{3}$، $b=\sqrt[9]{9}$ و $c=\sqrt[5]{27}$، کدام درست است؟

۱) $c<b<a$ ۲) $b<a<c$ ۳) $a<c<b$ ۴) $a<b<c$

راه‌حل هر یک از عددهای a، b و c را به شکل اعداد توان‌دار با نمای گویا از ۳ می‌نویسیم: $a=3^{\frac{1}{2}}$. $b=9^{\frac{1}{9}}=(3^2)^{\frac{1}{9}}=3^{\frac{2}{9}}$. $c=27^{\frac{1}{5}}=(3^3)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{3}{5}}$

اکنون توجه کنید که چون $\frac{2}{9}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$، پس $c>a>b$.

دست‌گرمی

۲۷۸- اگر $x<0$، حاصل $\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}$ کدام است؟

۱) $3x$ ۲) x ۳) $-x$ ۴) $2x$

۲۷۹- اگر $ab>0$ و $b\sqrt[6]{a^6}-a=0$، حاصل $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{b^6}$ کدام است؟

۱) $1\pm a$ ۲) $a-1$ ۳) $b-1$ ۴) $a-b$

۲۸۰- اگر $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{8}}}=\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{2^n}}}$، مقدار n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۸۱- اگر $a>\sqrt{a}$، آن‌گاه کدام‌یک درست نیست؟

۱) $a^3>a^2$ ۲) $\sqrt{a}>\sqrt[3]{a}$ ۳) $\sqrt[3]{a^2}>a$ ۴) $\sqrt[4]{a^3}>\sqrt{a}$

۲۸۲- اگر $a^{\frac{3}{5}}=16$، مقدار $a^{\frac{3}{4}}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۲۸۳- اگر $\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}}=3^a$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{11}{12}$ ۲) $\frac{13}{12}$ ۳) $\frac{19}{24}$ ۴) $\frac{23}{24}$

آزمون ۱۸۹ — توان و ریشه (۱)

۱۸۸۱- حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}+\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}-1$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{5}-1$

۱۸۸۲- حاصل $\sqrt[7]{8\sqrt[4]{4}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt[4]{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt[4]{8}$

۱۸۸۳- حاصل $\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[3]{3}}-\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{27}}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۸۸۴- ساده شدهٔ عبارت $A=\frac{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2}}}}{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[8]{6^5}$ ۲) $\sqrt[4]{(\frac{2}{3})^5}$ ۳) $\sqrt[8]{(\frac{3}{2})^5}$ ۴) $\sqrt[4]{(\frac{2}{3})^3}$

۱۸۸۵- حاصل $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\times\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}\times\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}$ کدام است؟

۱) $x\sqrt[60]{x^{35}}$ ۲) $x\sqrt[60]{x^{33}}$ ۳) $x\sqrt[60]{x^{23}}$ ۴) $x\sqrt[60]{x^{27}}$

۱۸۸۶- اگر $\sqrt{3}=\sqrt[2n]{3}\times\sqrt[n]{9}$، مقدار $\sqrt[n]{37-n}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt[3]{2}$ ۴) $\sqrt[4]{2}$

۱۸۸۷- اگر $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=3$، مقدار $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt[3]{3}$

۱۸۸۸- اگر $x^{\frac{5}{2}}=32$، مقدار $x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ ۲) $\sqrt[3]{2}$ ۳) $2\sqrt[3]{2}$ ۴) $4\sqrt[3]{2}$

۱۸۸۹- اگر $0<a<1$، $x=\sqrt[4]{a^3}$، $y=\sqrt[3]{a^4}$ و $z=\sqrt[12]{a^{10}}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $z<y<x$ ۲) $z<x<y$ ۳) $y<z<x$ ۴) $x<z<y$

۱۸۹۰- چند عدد صحیح وجود دارد که حداقل یک ریشهٔ چهارم آن در بازهٔ $(-3,4)$ قرار داشته باشد؟

۱) ۶۳ ۲) ۶۴ ۳) ۲۵۵ ۴) ۲۵۶

سؤال
۱۸۸۱ ۱۸۸۲ ۱۸۸۳ ۱۸۸۴ ۱۸۸۵ ۱۸۸۶ ۱۸۸۷ ۱۸۸۸ ۱۸۸۹ ۱۸۹۰

آزمون ۱۹۰ توان و ریشه (۲)

۱۸۹۱- عبارت $\sqrt[۴]{-x^۵}$ با کدام عبارت برابر است؟

۱) $-x\sqrt[۴]{x}$ ۲) $x\sqrt[۴]{x}$ ۳) $-x\sqrt[۴]{-x}$ ۴) $x\sqrt[۴]{-x}$

۱۸۹۲- حاصل $\frac{۳}{\sqrt[۵]{۸۱}}-\sqrt[۵]{۹۶}-\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{۸۱}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt[۵]{۳}$ ۲) $۳\sqrt[۵]{۲}$ ۳) $-۲\sqrt[۵]{۳}$ ۴) $-۳\sqrt[۵]{۲}$

۱۸۹۳- حاصل $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲}}{۱+\sqrt[۶]{۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۹]{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $\sqrt[۶]{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۸۹۴- اگر $x(\sqrt[۷]{\frac{۱}{x^۸}-\frac{۱}{x^۷}})=\frac{۱}{۲}$، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۱۲۹}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$ ۳) $\frac{۱۲۸}{۱۲۷}$ ۴) $\frac{۱۲۸}{۱۲۹}$

۱۸۹۵- اگر $\sqrt{\sqrt{۳}}=\sqrt[۳]{۳\sqrt{x}}$، مقدار x کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt[۳]{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}$

۱۸۹۶- اگر $\sqrt[۴]{x\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}}=\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳\sqrt[۲]{۳^۲}}}$، مقدار x کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۱۸۹۷- اگر $\frac{\sqrt[۶]{۹^{۳x-۶}}}{\sqrt[۳]{۲۷^{۴x-۲}}}=۲۷$، مقدار x کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۸۹۸- اگر $\frac{\sqrt{a}\times\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۶]{a}}{\sqrt[۴]{a}\times\sqrt[۵]{a}\times\sqrt[۲]{a}}=۳$، مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۲۷

۱۸۹۹- اگر $a^۴b^۳=۲۷$، مقدار $\sqrt{a\sqrt[۳]{b}}\times\sqrt[۳]{b\sqrt{a}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt[۳]{۳}$ ۳) $\sqrt[۶]{۳}$ ۴) $۳\sqrt[۳]{۳}$

۱۹۰۰- اگر $\sqrt[۳]{a}>\sqrt{a}$، کدام‌یک درست نیست؟

۱) $\sqrt[۴]{a}>\sqrt{a}$ ۲) $\sqrt{a}>a$ ۳) $\sqrt{a^۳}>\sqrt[۳]{a^۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{a^۲}>\sqrt[۴]{a^۳}$

سؤال	گام
۱۸۹۱	۲۷۰
۱۸۹۲	۲۷۰ ۲۸۵
۱۸۹۳	۲۷۲ ۲۷۳
۱۸۹۴	۲۶۹ ۲۷۰
۱۸۹۵	۲۷۰ ۲۷۳
۱۸۹۶	۲۷۲ ۲۷۳
۱۸۹۷	۲۷۲ ۲۷۳
۱۸۹۸	۲۷۲ ۲۷۳
۱۸۹۹	۲۷۲ ۲۷۳
۱۹۰۰	۲۷۰ ۲۷۱ ۲۷۲ ۲۷۴

درس دوم: اتحاد

۲۷۵

نکته اتحاد مربع مجموع (تفاضل) دو جمله

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه

- $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$
- $(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$
- $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ و $a^۲+b^۲=(a-b)^۲+۲ab$

تست ۱ اگر $x-\frac{۱}{x}=۳$، مقدار $x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

راه‌حل طرفین تساوی $x-\frac{۱}{x}=۳$ را به توان دو می‌رسانیم و از اتحاد مربع تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$(x-\frac{۱}{x})^۲=۹\Rightarrow x^۲-۲x(\frac{۱}{x})+\frac{۱}{x^۲}=۹\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲=۹\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}=۱۱$$

تست ۲ اگر $a+b=۳$ و $a^۲b+ab^۲=-۳۰$، حاصل $a^۲-ab+b^۲$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۸ ۴) ۳۹

راه‌حل توجه کنید که $a^۲b+ab^۲=ab(a+b)=-۳۰\xrightarrow{a+b=۳}ab=-۱۰$

بنابراین $a^۲-ab+b^۲=(a+b)^۲-۳ab=۳^۲-۳(-۱۰)=۳۹$.

تست ۳ اگر $a+b=۷\sqrt{ab}$، حاصل عبارت $A=\frac{a^۲+b^۲+۳ab}{a^۲+b^۲-۴۲ab}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

راه‌حل اگر طرفین رابطهٔ $a+b=۷\sqrt{ab}$ را به توان دو برسانیم، آن‌گاه $(a+b)^۲=(۷\sqrt{ab})^۲\Rightarrow a^۲+b^۲+۲ab=۴۹ab\Rightarrow a^۲+b^۲=۴۷ab$

بنابراین عبارت مورد نظر به شکل $A=\frac{a^۲+b^۲+۳ab}{a^۲+b^۲-۴۲ab}=\frac{۴۷ab+۳ab}{۴۷ab-۴۲ab}=\frac{۵۰ab}{۵ab}=۱۰$ ساده می‌شود.

تست ۴ اگر $\sqrt{x-۱}+\sqrt{۴-x}=۲$، حاصل $۵x-x^۲$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) $\frac{۱۷}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) ۵

راه‌حل ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم: $۲+۲\sqrt{(x-۱)(۴-x)}=۳+۲\sqrt{-x^۲+۵x-۴}$. بنابراین $x-۱+۴-x=۴$.

در نتیجه $\sqrt{۵x-x^۲-۴}=\frac{۱}{۲}$.

$$۵x-x^۲-۴=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۵x-x^۲=\frac{۱۷}{۴}$$

۲۷۶

نکته اتحاد مزدوج

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$.

تست ۵ مقدار $(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^۲$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) $۸\sqrt{۳}$

راه‌حل با استفاده از اتحادهای مربع مجموع دو جمله و مزدوج می‌توان نوشت

$$(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^۲=(۲+\sqrt{۳})+(۲-\sqrt{۳})+۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\times\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=۴+۲\sqrt{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}=۴+۲\sqrt{۲^۲-(\sqrt{۳})^۲}=۴+۲=۶$$

تست ۶ مقدار $\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

راه‌حل

راه‌حل اول توجه کنید که $۵+۲\sqrt{۶}=\sqrt{۲}^۲+\sqrt{۳}^۲+۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲$. $۵-۲\sqrt{۶}=\sqrt{۲}^۲+\sqrt{۳}^۲-۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲$

در نتیجه $\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^۲}+\sqrt{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۲}=۲\sqrt{۳}$.

راه‌حل دوم فرض کنید $x=\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}+\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$. در این صورت

$$x^۲=(\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}})^۲+(\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}})^۲+۲\sqrt{۵-۲\sqrt{۶}}\times\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=۵-۲\sqrt{۶}+۵+۲\sqrt{۶}+۲\sqrt{(۵-۲\sqrt{۶})(۵+۲\sqrt{۶})}$$
$$=۱۰+۲\sqrt{۵^۲-(۲\sqrt{۶})^۲}=۱۰+۲\sqrt{۲۵-۲۴}=۱۰+۲=۱۲\Rightarrow x=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

تست ۷ مقدار $\sqrt{۲\sqrt{۲}+۱}\times\sqrt[۴]{۹-۴\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $۳-۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۱۵}$ ۴) ۷

راه‌حل

راه‌حل اول توجه کنید که

$$\sqrt{۲\sqrt{۲}+۱}\times\sqrt[۴]{۹-۴\sqrt{۲}}=\sqrt[۴]{(۹+۴\sqrt{۲})(۹-۴\sqrt{۲})}=\sqrt[۴]{((۲\sqrt{۲})^۲+۲\times۲\sqrt{۲}+۱)(۹-۴\sqrt{۲})}=\sqrt[۴]{(۲\sqrt{۲}+۱)^۲(۹-۴\sqrt{۲})}$$
$$=\sqrt[۴]{۹^۲-(۴\sqrt{۲})^۲}=\sqrt[۴]{۴۹}=\sqrt{۷}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $۹-۴\sqrt{۲}=(۲\sqrt{۲}-۱)^۲$. پس

$$\sqrt{۲\sqrt{۲}+۱}\times\sqrt[۴]{۹-۴\sqrt{۲}}=\sqrt{۲\sqrt{۲}+۱}\times\sqrt[۴]{(۲\sqrt{۲}-۱)^۲}=\sqrt{۲\sqrt{۲}+۱}\times\sqrt{۲\sqrt{۲}-۱}=\sqrt{(۲\sqrt{۲}+۱)(۲\sqrt{۲}-۱)}=\sqrt{(۲\sqrt{۲})^۲-۱^۲}=\sqrt{۷}$$

تست ۸ اگر $\sqrt{x-۱}-\sqrt{x+۳}=-\frac{۱}{۱۲}$ ، مقدار $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

راه‌حل فرض می‌کنیم مقدار عبارت خواسته شده برابر a باشد. یعنی $a=\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳}$. طرفین این تساوی و تساوی $-\frac{۱}{۱۲}=\sqrt{x-۱}-\sqrt{x+۳}$ را در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$-\frac{۱}{۱۲}a=(\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳})(\sqrt{x-۱}-\sqrt{x+۳})\Rightarrow-\frac{a}{۱۲}=x-۱-(x+۳)\Rightarrow-\frac{a}{۱۲}=-۴\Rightarrow a=۴۸$$

نکته اتحاد مربع مجموع سه جمله ۲۷۷

اگر a ، b و c عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه $(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+bc+ca)$. از این اتحاد نتیجه می‌شود

$$ab+bc+ca=\frac{۱}{۲}((a+b+c)^۲-a^۲-b^۲-c^۲),\quad a^۲+b^۲+c^۲=(a+b+c)^۲-۲(ab+bc+ca)$$

تست ۹ اگر $x+y+z=۳$ و $xy+xz+yz=۲$ ، آن‌گاه مقدار $x^۲+y^۲+z^۲$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

راه‌حل طرفین تساوی $x+y+z=۳$ را به توان دو می‌رسانیم: $(x+y+z)^۲=۳^۲\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲+۲(xy+xz+yz)=۹$

با توجه به $xy+xz+yz=۲$ ، می‌توان نوشت $x^۲+y^۲+z^۲+۲\times۲=۹$. پس $x^۲+y^۲+z^۲=۵$.

تست ۱۰ اگر $a^۲+۲ab=۳۰$ ، $b^۲-۲ac=۲۴$ و $c^۲-۲bc=۱۰$ ، مقدار $|c-a-b|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

راه‌حل اگر تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید $a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲bc-۲ca=۶۴\Rightarrow(c-a-b)^۲=۶۴\Rightarrow|c-a-b|=۸$

نکته اتحاد جملهٔ مشترک ۲۷۸

اگر a ، b و c عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$.

تست ۱۱ در عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ضریب x^2 کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

راه‌حل با استفاده از اتحادهای جملهٔ مشترک و مربع مجموع دو جمله، عبارت را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=((x+1)(x+4))((x+2)(x+3))=((x^2+5x)+4)((x^2+5x)+6)$$

$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$$

بنابراین ضریب x^2 در این عبارت برابر ۳۵ است.

تست ۱۲ اگر $x^2+5x=7$ ، حاصل عبارت $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ کدام است؟

۱) ۱۳۰ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۴۳ ۴) ۱۴۴

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $(x+1)(x+4)=x^2+5x+4=7+4=11$ و $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6=7+6=13$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با 11×13 یعنی ۱۴۳.

نکته اتحاد مکعب مجموع (تفاضل) دو جمله ۲۷۹

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه

- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
- $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

تست ۱۳ ضریب x^3 در عبارت $((x+2)^3-6x^2)^2$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

راه‌حل عبارت را با استفاده از اتحادهای مکعب مجموع دو جمله و مربع مجموع سه جمله به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$((x+2)^3-6x^2)^2=(x^3+6x^2+12x+8-6x^2)^2=(x^3+12x+8)^2=x^6+144x^2+64+24x^4+16x^3+192x$$

بنابراین ضریب x^3 در این عبارت برابر ۱۶ است.

تست ۱۴ اگر $a+\frac{3}{a}=5$ ، مقدار عبارت $a^3+\frac{27}{a^3}$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۵ ۳) ۸۰ ۴) ۱۷۰

راه‌حل طرفین تساوی $a+\frac{3}{a}=5$ را به توان سه می‌رسانیم:

$$(a+\frac{3}{a})^3=125\Rightarrow a^3+3a^2(\frac{3}{a})+3(\frac{9}{a^2})a+\frac{27}{a^3}=125\Rightarrow a^3+\frac{27}{a^3}+9a+\frac{27}{a}=125\Rightarrow a^3+\frac{27}{a^3}+9(a+\frac{3}{a})=125$$

اگر به جای $a+\frac{3}{a}$ مقدار آن یعنی ۵ را قرار دهیم، مقدار عبارت $a^3+\frac{27}{a^3}$ به‌دست می‌آید:

$$a^3+\frac{27}{a^3}+9(5)=125\Rightarrow a^3+\frac{27}{a^3}=80$$

تست ۱۵ اگر $x^2y+y^2x=20$ و $x^3+y^3=65$ ، مقدار xy کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

راه‌حل توجه کنید که $(x+y)^3=x^3+y^3+3(x^2y+y^2x)=65+60=125$. در نتیجه $x+y=5$. اکنون توجه کنید که

$$20=x^2y+y^2x=xy(x+y)=5xy\Rightarrow xy=4$$

تست ۱۶ اگر $x=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$، حاصل x^3-3x کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل طرفین رابطهٔ داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$x^3=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)\Rightarrow x^3=4+3x\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\Rightarrow x^3=4+3x$$

بنابراین $x^3-3x=4$.

نکته ۲۸۰

اگر a، b و c عددهایی حقیقی باشند و $a+b+c=0$، آن‌گاه $a^3+b^3+c^3=3abc$.

تست ۱۷ اگر $\sin x\cos x=\frac{1}{2}$، حاصل $\sin^6 x+\cos^6 x$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

راه‌حل تساوی $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ را به‌صورت $\sin^2 x+\cos^2 x-1=0$ می‌نویسیم. در نتیجه بنابر نکتهٔ قبل،

$$(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3+(-1)^3=3(\sin^2 x)(\cos^2 x)(-1)\Rightarrow\sin^6 x+\cos^6 x-1=-3(\sin x\cos x)^2$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

نکته اتحاد چاق و لاغر ۲۸۱

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه

- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

تست ۱۸ ساده شدهٔ عبارت $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ کدام است؟

۱) x^6-1 ۲) x^6-2x^4-1 ۳) $x^6-x^4-x^2+1$ ۴) $x^6-x^4+x^2-1$

راه‌حل با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=((x-1)(x^2+x+1))((x+1)(x^2-x+1))=(x^3-1)(x^3+1)=x^6-1$$

تست ۱۹ اگر $\frac{a-1}{a^2-a+1}\div\frac{a+1}{a^2+a+1}=\frac{7}{9}$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

راه‌حل ابتدا تقسیم را به ضرب تبدیل می‌کنیم سپس سمت چپ تساوی داده شده را با استفاده از اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$\frac{a-1}{a^2-a+1}\div\frac{a+1}{a^2+a+1}=\frac{7}{9}\Rightarrow\frac{a-1}{a^2-a+1}\times\frac{a^2+a+1}{a+1}=\frac{7}{9}\Rightarrow\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)}=\frac{7}{9}\Rightarrow\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{7}{9}$$

$$9a^3-9=7a^3+7\Rightarrow 2a^3=16\Rightarrow a^3=8\Rightarrow a=2$$

تست ۲۰ اگر $a+b=2$ و $a^3+b^3=38$، مقدار ab کدام است؟

۱) -5 ۲) ۵ ۳) -6 ۴) ۶

راه‌حل اول توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر.

$$a^3+b^3=(a+b)((a+b)^2-3ab)\Rightarrow 38=(2)(4-3ab)\Rightarrow 19=4-3ab\Rightarrow 3ab=-15\Rightarrow ab=-5$$

راه‌حل دوم اگر طرفین رابطهٔ $a+b=2$ را به توان سه برسانیم. داریم

$$(a+b)^3=2^3\Rightarrow a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=(a^3+b^3)+3ab(a+b)=8\Rightarrow 38+3ab\times 2=8\Rightarrow ab=-5$$

نکته تعمیم اتحاد چاق و لاغر

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه

- اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.
- اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، آن‌گاه $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$.
- اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، آن‌گاه $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$.

تست ۲۱ اگر $x^6-y^6=2(x-y)$ و $x\neq y$، حاصل عبارت $(x+y)(x^4+y^4+x^2y^2)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

راه‌حل توجه کنید که

$$\frac{x^6-y^6}{x-y}=x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5=x^4(x+y)+x^2y^2(x+y)+y^4(x+y)=(x+y)(x^4+y^4+x^2y^2)$$

در نتیجه طبق فرض سؤال، حاصل عبارت مورد نظر برابر ۲ است.

دست‌گرمی

۲۸۴- اگر $a+\frac{3}{2a}=4$، مقدار $4a^2+\frac{9}{a^2}$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۶ ۳) ۵۲ ۴) ۷۶

۲۸۵- مقدار $\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\div\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{3-2\sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۲۸۶- اگر $a-b+c=6$ و $ab+bc-ca=8$، مقدار $a^2+b^2+c^2$ کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۴۲ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

۲۸۷- اگر $x^2-3x=7$، حاصل $(x-1)(x-2)(x-4)(x+1)$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۷

۲۸۸- ضریب x^2 در عبارت $A=(x-2)^3-(2x-1)^3$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۲۸۹- مقدار عبارت $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)+1$ به ازای $x=\sqrt[12]{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt[4]{2}$

آزمون ۱۹۱

اتحاد (۱)

۱۹۰۱- اگر $x+y=۴$ و $xy=۲$، آن‌گاه حاصل $x^۴+y^۴$ کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۲ ۳) ۱۳۲ ۴) ۱۳۶

۱۹۰۲- مقدار $\sqrt{۱۴+۶\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۴-۶\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۱۴ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) ۲۸

۱۹۰۳- اگر $\sqrt{x+۱۱}-\sqrt{x+۳}=\sqrt{۲}$، مقدار $\sqrt{x+۱۱}+\sqrt{x+۳}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۷\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

۱۹۰۴- حاصل عبارت $\sqrt{\frac{\sqrt{۲۴}-۴}{\sqrt{۲۴}+۴}}-\sqrt{\frac{\sqrt{۲۴}+۴}{\sqrt{۲۴}-۴}}$ کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۶}$ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) -۲

۱۹۰۵- ساده شدهٔ عبارت $A=(a+b-c)^۲-۳(a-b+c)^۲+۲(a^۲+b^۲+c^۲)$ کدام است؟

۱) $۸(ab-ac+bc)$ ۲) $۸(ab+ac-bc)$

۳) $۴(ab-۲ac+۲bc)$ ۴) $۴(۲ab-۲ac+bc)$

۱۹۰۶- ضریب $x^۴$ در عبارت $(x^۲-۲x)^۳-۲x^۴$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۹۰۷- اگر $\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{۴}$ و $ab=۲$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۹۰۸- اگر $\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=۴$ و $ab=۳$، مقدار $\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}$ کدام است؟

۱) ۶۲ ۲) ۶۴ ۳) ۶۶ ۴) ۶۸

۱۹۰۹- مقدار عبارت $\frac{۵(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲})^{-۱}}{\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۹ ۳) ۴ ۴) ۱

۱۹۱۰- عبارت $A=x(x-۱)(x+۱)(x-۲)+۱$ با کدام عبارت برابر است؟

۱) $(x^۲-x+۱)^۲$ ۲) $(x^۲+x-۱)^۲$

۳) $(x^۲-x-۱)^۲$ ۴) $(x^۲+x+۱)^۲$

سؤال	گام
۱۹۰۱	۲۷۵
۱۹۰۲	۲۷۰ ۲۷۵
۱۹۰۳	۲۷۶
۱۹۰۴	۲۷۰ ۲۷۶
۱۹۰۵	۲۷۷
۱۹۰۶	۲۷۹
۱۹۰۷	۲۷۰ ۲۷۹
۱۹۰۸	۲۷۹ ۲۸۱
۱۹۰۹	۲۸۱
۱۹۱۰	۲۷۵ ۲۷۸

آزمون ۱۹۲ — اتحاد (۲)

۱۹۱۱- اگر $x+\frac{۲}{۳x}=۳$، حاصل $۳x^۲+\frac{۴}{۳x^۲}$ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۱۹۱۲- اگر $|a|-\frac{۱}{a}=۲$، مقدار $|a|+\frac{۱}{a}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۱۹۱۳- مقدار $\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-۱)(۳-۲\sqrt{۲})}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$ ۲) $۱-\sqrt{۲}$ ۳) $۲-\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}-۱$

۱۹۱۴- اگر $a=۳^{-\frac{۱}{۸}}-۱$، مقدار عبارت $(۱+۳^{\frac{۱}{۲}})(۱+۳^{\frac{۱}{۴}})(۱+۳^{\frac{۱}{۸}})$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{a}$ ۲) $\frac{۲}{a}$ ۳) $\frac{۱}{a+۱}$ ۴) $\frac{۲}{a+۱}$

۱۹۱۵- اگر $a^۲+b^۲+c^۲=۶۶$ و $a-b+c=۱۰$، مقدار $ab+bc-ca$ کدام است؟

۱) -۱۷ ۲) -۱۸ ۳) -۱۹ ۴) -۲۰

۱۹۱۶- اگر $a-b=\frac{۳}{ab}$، مقدار $(a-b)^۳-a^۳+b^۳$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۹ ۴) -۹

۱۹۱۷- اگر $a=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ و $b=\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$، مقدار $a^۳+b^۳$ کدام است؟

۱) $۹\sqrt{۳}$ ۲) $۱۸\sqrt{۳}$ ۳) $۲۷\sqrt{۳}$ ۴) $۶۶\sqrt{۳}$

۱۹۱۸- اگر $a-b=۵$ و $a^۲+b^۲=۱۷$، مقدار $a^۳-b^۳$ کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۵ ۳) ۷۴ ۴) ۸۵

۱۹۱۹- اگر a و b عددهایی منفی باشند، $ab=۱$ و $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}=۷$، مقدار $a^۳+b^۳$ کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) -۲۱ ۳) -۲۴ ۴) -۲۸

۱۹۲۰- اگر $a=\sqrt[۵]{۳}-۱$، مقدار عبارت $(a-۱)(a^۴+a^۳+a^۲+a+۱)(a^{۱۰}+a^۵+۱)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲۶ ۳) ۸۰ ۴) ۲۴۲

سؤال
۱۹۱۱
۱۹۱۲
۱۹۱۳
۱۹۱۴
۱۹۱۵
۱۹۱۶
۱۹۱۷
۱۹۱۸
۱۹۱۹
۱۹۲۰

آزمون ۱۹۳ اتحاد (۳)

۱۹۲۱- اگر $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=۸$، مقدار $\frac{a^۴+b^۴}{a^۲b^۲}$ کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۲ ۳) ۶۴ ۴) ۶۶

۱۹۲۲- اگر $a+\frac{۱}{a+۱}=۴$، مقدار $(a+۱)^۲+\frac{۱}{(a+۱)^۲}$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۷

۱۹۲۳- اگر $a=\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$ و $b=\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}$، مقدار $(a-b)^۶$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۲۱۶

۱۹۲۴- اگر $\sqrt{x-a}+\sqrt{x}=۱$ و $\sqrt{x-a}-\sqrt{x}=a+۱$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۱۹۲۵- اگر $a^۲+b^۲+c^۲=۲۸$ و $bc-ab-ac=۴$، مقدار $a-b-c$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۶

۱۹۲۶- اگر $x=\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-۲}+\sqrt[۳]{\sqrt{۳}+۲}$، مقدار $x^۳+۳x$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۹۲۷- اگر $a^۳+۳ab^۲=۷۶$ و $b^۳+۳a^۲b=۴۹$، مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۹۲۸- اگر $\frac{a-۱}{\sqrt{a}}=\sqrt{۲}$، مقدار $a^۳+\frac{۱}{a^۳}$ کدام است؟

۱) ۴۴ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۵۴

۱۹۲۹- اگر $a=\sqrt[۳]{۱۸}+\sqrt[۳]{۳۰}+\sqrt[۳]{۵۰}$ و $b=\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۵}$، مقدار ab کدام است؟

۱) $-\sqrt[۳]{۲}$ ۲) -۲ ۳) $-۲\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $-۴\sqrt[۳]{۲}$

۱۹۳۰- حاصل عبارت $A=(x-۲y)(x^۴+۲x^۳y+۴x^۲y^۲+۸xy^۳+۱۶y^۴)$ به‌ازای $x=۲\sqrt[۵]{۲}$ و $y=\sqrt[۵]{۴}$ کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۳۲ ۳) -۶۴ ۴) -۱۲۸

سؤال	گام
۱۹۲۱	۲۷۵
۱۹۲۲	۲۷۵
۱۹۲۳	۲۷۵ ۲۷۶
۱۹۲۴	۲۷۶
۱۹۲۵	۲۷۷
۱۹۲۶	۲۷۹
۱۹۲۷	۲۷۹
۱۹۲۸	۲۷۵ ۲۷۹ ۲۸۱
۱۹۲۹	۲۷۰ ۲۸۱
۱۹۳۰	۲۸۲

آزمون ۱۹۴ — اتحاد (۴)

۱۹۳۱- اگر $a^۲+b^۲=۸ab$ و $a>b>۰$، مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۵}{۲}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۷}{۵}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۹}{۵}}$

۱۹۳۲- اگر $\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۴}$، مقدار $\frac{x^۲}{x^۴+۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۳۴}$

۱۹۳۳- مقدار $\sqrt{\sqrt{۵}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۵}-۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۶]{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۱۹۳۴- حاصل عبارت $(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}+\sqrt{۳-\sqrt{۸}})\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) ۱۶

۱۹۳۵- اگر $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=۵$ و $a+b+c=۶abc$، مقدار $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۱۹۳۶- اگر $\sqrt[۳]{a+۵}-\sqrt[۳]{a-۵}=۱$، حاصل $a^۲-۲۵$ کدام است؟

۱) -۲۷ ۲) -۶۴ ۳) ۶۴ ۴) ۲۷

۱۹۳۷- اگر $a^۲+\frac{۱}{a^۲}=۱۸$ و $۰<a<۱$، مقدار $a^۳-\frac{۱}{a^۳}$ کدام است؟

۱) -۵۲ ۲) -۷۶ ۳) ۷۶ ۴) ۵۲

۱۹۳۸- اگر $a=\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۱۵}$، حاصل $\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳}$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۴}{a}$ ۲) $\frac{a}{۴}$ ۳) $\frac{۸}{a}$ ۴) $\frac{a}{۸}$

۱۹۳۹- اگر $a^۳-۳b^۳=۵$ و $۴a^۳-۲b^۳=۱۰$، مقدار $(a^۲-۲ab+b^۲)(a^۲+ab+b^۲)^۲$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۵ ۳) ۳۶ ۴) ۴۹

۱۹۴۰- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{x^۶+x^۷}{x^۲-۱}-۱=x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

سؤال	گا
۱۹۳۱	۵/
۱۹۳۲	۵/
۱۹۳۳	۵/ ۶/
۱۹۳۴	۰/ ۵/ ۶/
۱۹۳۵	۷/
۱۹۳۶	۹/
۱۹۳۷	۵/ ۹/
۱۹۳۸	۱/
۱۹۳۹	۵/ ۱/
۱۹۴۰	۲/

درس سوم: تجزیه

نکته

اگر یک چندجمله‌ای را به شکل حاصل‌ضرب چند عبارت چندجمله‌ای دیگر بنویسیم، می‌گوییم آن را **تجزیه** کرده‌ایم. برای این کار معمولاً از فاکتورگیری و اتحادها استفاده می‌کنیم.

تست ۱ در تجزیهٔ عبارت x^5-16x کدام عامل وجود ندارد؟

۱) $x-2$ ۲) $x+2$ ۳) x^2+4 ۴) x^2+2

راه‌حل: عبارت را به‌صورت $x^5-16x=x(x^4-16)=x(x^2-4)(x^2+4)=x(x-2)(x+2)(x^2+4)$ تجزیه می‌کنیم. بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل x^2+2 وجود ندارد.

تست ۲ در تجزیهٔ عبارت x^6-1 کدام عامل وجود دارد؟

۱) x^2-x+1 ۲) x^2-x-1 ۳) x^2+x-1 ۴) x^2+1

راه‌حل: عبارت را به‌صورت $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$ تجزیه می‌کنیم. بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل x^2-x+1 وجود دارد.

تست ۳ کدام‌یک از عبارت‌های زیر عامل x^4-5x^2+4 نیست؟

۱) $x-3$ ۲) $x-2$ ۳) $x-1$ ۴) $x+1$

راه‌حل: می‌توان نوشت $x^4-5x^2+4=(x^2-4)(x^2-1)=(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$. بنابراین $x-3$، عامل x^4-5x^2+4 نیست.

تذکر گاهی برای تجزیه، «دسته‌بندی جمله‌ها» و «شکستن جمله‌ها» مفید است.

تست ۴ کدام گزینه عاملی از $x^2+y^2-z^2-2xy$ است؟

۱) $x+y+z$ ۲) $x+y-z$ ۳) $x-y+z$ ۴) $x-y$

راه‌حل: توجه کنید که $x^2+y^2-z^2-2xy=x^2+y^2-2xy-z^2=(x-y)^2-z^2=(x-y-z)(x-y+z)$. بنابراین در تجزیهٔ عبارت عامل $x-y+z$ وجود دارد.

تست ۵ در تجزیهٔ عبارت $3a^2-7ab+2b^2$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $3a+b$ ۲) $a+2b$ ۳) $a-3b$ ۴) $3a-b$

راه‌حل: عبارت را به‌صورت $3a^2-7ab+2b^2=3a^2-ab-6ab+2b^2=a(3a-b)-2b(3a-b)=(3a-b)(a-2b)$ تجزیه می‌کنیم. بنابراین در تجزیهٔ عبارت عامل $3a-b$ وجود دارد.

تست ۶ کدام عامل در تجزیهٔ عبارت $A=x^3-13x^2+10x+24$ وجود ندارد؟

۱) $x-2$ ۲) $x+1$ ۳) $x-12$ ۴) $x+2$

راه‌حل: عبارت را به شکل $A=x^3-8-13x^2+26x-16x+32=(x^3-8)-13x(x-2)-16(x-2)$ می‌نویسیم. حال به کمک اتحاد چاق و لاغر، عبارت را تجزیه می‌کنیم: $A=(x-2)(x^2+2x+4)-13x(x-2)-16(x-2)=(x-2)(x^2+2x+4-13x-16)=(x-2)(x^2-11x-12)$ و به کمک اتحاد جملهٔ مشترک، پرانتز دوم را هم تجزیه می‌کنیم $A=(x-2)(x-12)(x+1)$. بنابراین در تجزیهٔ عبارت داده شده، عامل $x+2$ وجود ندارد.

۲۸۴

نکته ساده کردن عبارت‌های کسری

- برای ساده کردن عبارت‌هایی که از ضرب یا تقسیم کسرها تشکیل شده‌اند، صورت و مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم و عامل‌های مشترک را ساده می‌کنیم.
- برای ساده کردن عبارت‌هایی که از مجموع یا تفاضل کسرها تشکیل شده‌اند، ابتدا مخرج کسرها را در صورت امکان تجزیه می‌کنیم، سپس مخرج مشترک می‌گیریم.

تست ۷ اگر $a=\sqrt[3]{2}-1$، مقدار $(\frac{a^3+1}{a^2-a+1})^9$ کدام است؟

۱) $2\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{4}$ ۳) ۸ ۴) $2\sqrt[3]{4}$

راه‌حل بنابر اتحاد چاق و لاغر، $a=\sqrt[3]{2}-1 \Rightarrow a+1=\sqrt[3]{2}$ بنابراین $\frac{a^3+1}{a^2-a+1}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}=a+1=\sqrt[3]{2}$

$$(\frac{a^3+1}{a^2-a+1})^9=(\sqrt[3]{2})^9=2^3=8$$

تست ۸ ساده شدهٔ عبارت $\frac{2x^2+10xy}{x^2+3xy-10y^2}\times\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy}$ کدام است؟

۱) $x-2y$ ۲) $x+2y$ ۳) $2x$ ۴) ۲

راه‌حل توجه کنید که $2x^2+10xy=2x(x+5y)$، $x^2-4y^2=(x-2y)(x+2y)$ و $x^2+2xy=x(x+2y)$. همچنین،

$$x^2+3xy-10y^2=x^2+5xy-2xy-10y^2=x(x+5y)-2y(x+5y)=(x+5y)(x-2y)$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{2x^2+10xy}{x^2+3xy-10y^2}\times\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy}=\frac{2x(x+5y)}{(x+5y)(x-2y)}\times\frac{(x-2y)(x+2y)}{x(x+2y)}=2$$

تست ۹ حاصل عبارت $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}\div\frac{3x-1}{x-1}$ کدام است؟

۱) $1+3x$ ۲) $1+x$ ۳) ۱ ۴) ۲

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$3x^2+2x-1=(x^2-1)+(2x^2+2x)=(x-1)(x+1)+2x(x+1)=(x+1)(x-1+2x)=(x+1)(3x-1)$$

بنابراین، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}\div\frac{3x-1}{x-1}=\frac{(x+1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)}\times\frac{x-1}{3x-1}=1$$

تست ۱۰ ساده شدهٔ عبارت $\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2+x}+\frac{3}{x^2-x-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{x^2-2x}$ ۲) $\frac{3}{x^2+x}$ ۳) $\frac{1}{x^2-x-2}$ ۴) $\frac{1}{x^3-x^2-2x}$

راه‌حل به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2+x}+\frac{3}{x^2-x-2}=\frac{1}{x(x-2)}-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{3}{(x+1)(x-2)}=\frac{x+1-(x-2)+3x}{x(x-2)(x+1)}=\frac{3(x+1)}{x(x-2)(x+1)}=\frac{3}{x^2-2x}$$

دست‌گرمی

۲۹۰- کدام‌یک از عبارت‌های زیر عامل $x^۲-y^۲-۶x-۸y-۷$ است؟

۱) $x+y+۱$ ۲) $x+y-۱$ ۳) $x+y+۷$ ۴) $x-y+۷$

۲۹۱- کدام گزینه عاملی از $x^۴+۳x^۲+۴$ است؟

۱) $x^۲+x-۲$ ۲) $x^۲-x-۲$ ۳) $x^۲-x+۲$ ۴) $x^۲+x+۱$

۲۹۲- حاصل عبارت $\frac{۳y^۳+۳}{y-x}\div\frac{x-xy+y^۲x}{xy-x^۲}$ کدام است؟

۱) $y-x$ ۲) $y+x$ ۳) $۳(y+۱)$ ۴) $y+۱$

۲۹۳- هرگاه $a+b=۳$ و $b+۲=c$، حاصل عبارت $a^۲+ab+bc+ca$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۲۹۴- اگر $a-\frac{۱}{a}=\sqrt{۵}$، مقدار $\frac{a^۶-۱}{a^۴-a^۲}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۵

۱۹۴۱- در تجزیهٔ عبارت $۶x^۲+۷x-۳$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $۳x+۱$ ۲) $۳x-۱$ ۳) $۲x-۳$ ۴) $۳x-۲$

۱۹۴۲- کدام گزینه عاملی از $x^۲-۲x+۴y-y^۲-۳$ است؟

۱) $x-y+۱$ ۲) $x-y-۱$ ۳) $x+y+۳$ ۴) $x-y-۳$

۱۹۴۳- کدام گزینه عاملی از $x^۴+۱۶x^۲+۱۰۰$ است؟

۱) $x^۲+x+۱۰$ ۲) $x^۲-۲x+۱۰$ ۳) $x^۲-x+۱۰$ ۴) $x^۲-۵x+۱۰$

۱۹۴۴- کدام گزینه عاملی از $x^۳+۲x^۲+۲x+۱$ است؟

۱) $x^۲+۲x+۱$ ۲) $x^۲-x-۱$ ۳) $x^۲+x+۱$ ۴) $x^۲+۱$

۱۹۴۵- در تجزیهٔ عبارت $A=x^۴+y^۴+x^۲y^۲$ کدام عبارت وجود دارد؟

۱) $x^۲-y^۲+xy$ ۲) $x^۲-y^۲-xy$ ۳) $x^۲+y^۲-xy$ ۴) $x^۲+y^۲$

۱۹۴۶- ساده شدهٔ عبارت $\frac{x^۲+x+۱}{۲x^۲+۵x} \div \frac{x^۳-۱}{۲x^۲+۳x-۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x}$ ۲) x ۳) $\frac{۱}{۲-x}$ ۴) $\frac{۲}{۱+x}$

۱۹۴۷- ساده شدهٔ عبارت $\frac{x}{x^۲+۱}+\frac{۱}{x^۳+x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x}$ ۲) $\frac{۱}{x^۲+۱}$ ۳) $\frac{۲}{x}$ ۴) $\frac{۲}{x^۲+۱}$

۱۹۴۸- اگر $a-\frac{۱}{a}=۳$، مقدار $\frac{a^۶-a^۴+a^۲-۱}{-a^۲+a^۴}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۹۴۹- حاصل عبارت $\frac{a^۶-a^۴-a^۲+۱}{a^۳-a^۲-a+۱}$ به ازای $a=\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}+۲$ ۲) $۳\sqrt{۲}+۳$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$ ۴) $۳\sqrt{۲}-۳$

۱۹۵۰- اگر $ab=۱$ و $a-b=۷۶$، مقدار $\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

سؤال	گا
۱۹۴۱	۸۳
۱۹۴۲	۷۵ ۷۶ ۸۳
۱۹۴۳	۷۵ ۷۶ ۸۳
۱۹۴۴	۷۵ ۸۱ ۸۳
۱۹۴۵	۷۵ ۷۶ ۸۳
۱۹۴۶	۸۱ ۸۴
۱۹۴۷	۸۴
۱۹۴۸	۸۵ ۸۴
۱۹۴۹	۸۴ ۸۵
۱۹۵۰	۸۶ ۸۱ ۸۲

آزمون ۱۹۶ تجزیه (۲)

۱۹۵۱- در تجزیهٔ عبارت $۲a^۲-۳ab-۲b^۲$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $a+۲b$ ۲) $۲a-b$ ۳) $a-۲b$ ۴) $a+b$

۱۹۵۲- کدام‌یک از عبارت‌های زیر عامل $(x^۲-x)^۲-۱۴(x^۲-x)+۲۴$ نیست؟

۱) $x^۲+۴x+۳$ ۲) $x^۲-۲x-۳$ ۳) $x^۲+x-۶$ ۴) $x^۲-۳x-۴$

۱۹۵۳- اگر $۲x^۲-ax+۱$ عاملی از $۴x^۴+۳x^۲+۱$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۹۵۴- کدام عامل در تجزیهٔ عبارت $۴x^۴-۱۶x^۲y^۲+۹y^۴$ وجود دارد؟

۱) $۲x^۲-xy+۳y^۲$ ۲) $۲x^۲+xy+۳y^۲$

۳) $۲x^۲+۳xy+۳y^۲$ ۴) $۲x^۲-۲xy-۳y^۲$

۱۹۵۵- در تجزیهٔ عبارت $۳a^۳-۳ab^۲-۲a^۲b+۲b^۳$ کدام عبارت وجود دارد؟

۱) $۳a-۲b$ ۲) $a-۲b$ ۳) $۲a-b$ ۴) $۲a-۳b$

۱۹۵۶- ساده شدهٔ عبارت $\frac{x^۳+۱}{x^۲-۱}\div\frac{x^۲-x+۱}{x^۲+۲x-۳}$ کدام است؟

۱) $x+۲$ ۲) $x+۳$ ۳) $x-۲$ ۴) $x-۳$

۱۹۵۷- ساده شدهٔ عبارت $\frac{۲}{x^۲-۱}-\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x+۱}$ ۲) $\frac{۲}{x^۲-۱}$ ۳) $-\frac{۲}{x+۱}$ ۴) $\frac{۲}{x-۱}$

۱۹۵۸- ساده شدهٔ عبارت $\frac{۲}{\sqrt{x}-۲}-\frac{۲}{\sqrt{x}+۲}-\frac{۲x}{x-۴}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$ ۳) $\frac{-۱}{\sqrt{x}+۲}$ ۴) $\frac{۸}{x-۴}$

۱۹۵۹- اگر $a=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ و $b=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$، مقدار $(\frac{a}{b^۲}-\frac{b}{a^۲})\div(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+۱)$ کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $-۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۹۶۰- اگر $a=\sqrt[۳]{۵}$، مقدار $\frac{(a-۱)(a^۴+a^۲+۱)}{a^۲-a+۱}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

سؤال	گام
۱۹۵۱	۲۸۳
۱۹۵۲	۲۷۸ ۲۸۳ ۲۸۶ ۲۸۷
۱۹۵۳	۲۷۵ ۲۷۶ ۲۸۳
۱۹۵۴	۲۷۵ ۲۷۶ ۲۸۳
۱۹۵۵	۲۷۶ ۲۸۳
۱۹۵۶	۲۷۶ ۲۷۸ ۲۸۱ ۲۸۴
۱۹۵۷	۲۷۶ ۲۸۴
۱۹۵۸	۲۷۶ ۲۸۴
۱۹۵۹	۲۸۱ ۲۸۴
۱۹۶۰	۲۷۵ ۲۷۶ ۲۸۱ ۲۸۴

درس چهارم: گویا کردن مخرج‌های گنگ

تغییر مخرج کسر از عددی گنگ به عددی گویا را **گویا کردن مخرج کسر** می‌نامند. برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج کسر را در عاملی مناسب ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود.

نکته

- اگر مخرج کسر به‌صورت $\sqrt[n]{a^m}$ باشد که در آن $m<n$، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.
- اگر مخرج کسر به‌صورت $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ یا $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ باشد، صورت و مخرج کسر را به‌ترتیب در $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ضرب می‌کنیم.
- اگر مخرج کسر به‌صورت $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ یا $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ باشد، صورت و مخرج کسر را به‌ترتیب در $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ و $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ ضرب می‌کنیم.
- اگر مخرج کسر به‌صورت $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ یا $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ باشد، صورت و مخرج کسر را به‌ترتیب در $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ و $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ ضرب می‌کنیم.

تست ۱ برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{۲}{\sqrt[۷]{۸}}$، کوچک‌ترین عدد مثبتی که باید در صورت و مخرج این کسر ضرب کنیم، کدام است؟

۱) $\sqrt[۷]{۲}$ ۲) $\sqrt[۷]{۴}$ ۳) $\sqrt[۷]{۸}$ ۴) $\sqrt[۷]{۱۶}$

راه‌حل چون $\sqrt[۷]{۸}=\sqrt[۷]{۲^۳}$، پس باید صورت و مخرج کسر مورد نظر را در $\sqrt[۷]{۲^۴}$ ضرب کنیم، که برابر است با $\sqrt[۷]{۱۶}$.

تست ۲ معکوس کدام‌یک از عددهای زیر برابر $\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-۱}$ است؟

۱) $۳+\sqrt{۲}$ ۲) $۳-\sqrt{۲}$ ۳) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که اگر معکوس عدد a برابر با b باشد، معکوس عدد b برابر a است. بنابراین عدد مورد نظر معکوس عدد $\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-۱}$ است. اکنون توجه کنید که

$$\frac{۱}{\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-۱}}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{(\sqrt{۲}-۱)^۲}{\sqrt{۲}^۲-۱}=(\sqrt{۲}-۱)^۲=۲+۱-۲\sqrt{۲}=۳-۲\sqrt{۲}$$

تست ۳ حاصل عبارت $\frac{۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۳}+\sqrt{۵}-\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۵}-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

راه‌حل صورت و مخرج عبارت مورد نظر را در $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۶}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵})}{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲-(\sqrt{۵})^۲}=\frac{۲\sqrt{۶}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵})}{۲\sqrt{۶}}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}$$

تست ۴ حاصل $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}}+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۹}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt[۳]{۶}$ ۲) $\sqrt[۳]{۶}$ ۳) $\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۹}$ ۴) $\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۴}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر.

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-\sqrt[۳]{۳}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۹}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۹}}{۲-۳}=-\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۶}-\sqrt[۳]{۹}$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-\sqrt[۳]{۶}$.

تست ۵ مقدار $\frac{۷}{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۵}-\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۵}$ ۴) $۲\sqrt[۳]{۲}$

راه‌حل اگر از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۷}{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۷}{(\sqrt[۳]{۵})^۲-\sqrt[۳]{۵}\times\sqrt[۳]{۲}+(\sqrt[۳]{۲})^۲}\times\frac{\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۷(\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲})}{(\sqrt[۳]{۵})^۳+(\sqrt[۳]{۲})^۳}=\frac{۷(\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲})}{۵+۲}=\frac{۷(\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲})}{۷}=\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}$$

دست‌گرمی

۲۹۵- حاصل $\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱}-۵$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۲۹۶- حاصل $\frac{۴}{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$ ۲) $۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$ ۴) $۱-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$

۲۹۷- اگر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۹}+\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۳}+a$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sqrt[۳]{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۱-\sqrt[۳]{۳}}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

آزمون ۱۹۷ گویا کردن مخرج‌های گنگ

۱۹۶۱- معکوس عدد $\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۴+\sqrt{۲}}$ ۲) $\sqrt{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$ ۳) $\sqrt{\sqrt{۲}-۱}$ ۴) $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$

۱۹۶۲- حاصل $\frac{۷}{۳-\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۱۹۶۳- حاصل $\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱}-\sqrt[۴]{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۱۹۶۴- حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt{۲}-۱}-\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}+۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$ ۲) $\sqrt{۲}+۱$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۱۹۶۵- حاصل عبارت $\frac{۸\sqrt{۵}-۸}{\sqrt{۵}+۱}-\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۳ ۴) ۳

۱۹۶۶- اگر $x=\frac{\sqrt{۸}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+۳^{\frac{۱}{۲}}$، حاصل $(x-۱)^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹۶۷- حاصل عبارت $A=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) $۲-\sqrt{۳}$

۱۹۶۸- مقدار $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}}-(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}-\sqrt[۳]{۴})$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۴}$ ۲) $\sqrt[۳]{۹}$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $۲\sqrt[۳]{۹}$

۱۹۶۹- حاصل $A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}-\frac{۳\sqrt[۳]{۲}}{۲-\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۴}$ ۲) ۴ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) ۲

۱۹۷۰- حاصل $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}+\frac{۲}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۵}$ ۲) $\sqrt[۳]{۶}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲}$

سؤال	گا
۱۹۶۱	۷۰ ۷۶ ۸۵
۱۹۶۲	۷۶ ۸۵
۱۹۶۳	۶ ۵
۱۹۶۴	۶ ۵
۱۹۶۵	۵ ۶ ۵
۱۹۶۶	۵ ۶ ۵
۱۹۶۷	۵ ۶ ۵
۱۹۶۸	۱ ۵
۱۹۶۹	۱ ۵
۱۹۷۰	۱ ۵

درس پنجم: بخش‌پذیری و تقسیم

نکته ۲۸۶ **قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها**

فرض کنید $P(x)$ و $S(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $S(x)$ ثابت نباشد. در این صورت چندجمله‌ای‌هایی منحصر به‌فرد مانند $Q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند که $R(x)$ از درجهٔ $S(x)$ کمتر است و $P(x)=S(x)Q(x)+R(x)$. $Q(x)$ را **خارج‌قسمت** تقسیم $P(x)$ بر $S(x)$ می‌نامند و $R(x)$ **باقی‌ماندهٔ** این تقسیم است.

تعریف

اگر در تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $S(x)$ باقی‌مانده برابر صفر باشد، می‌گوییم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $S(x)$ بخش‌پذیر است.

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $ax+b$ تقسیم کرده‌ایم. در این صورت، بنابر قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌هایی منحصر به‌فرد مانند $Q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند که

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+R(x) \quad (1)$$

و درجهٔ $R(x)$ از درجهٔ $ax+b$ کمتر است. اکنون توجه کنید که چون درجهٔ $ax+b$ برابر ۱ است، پس درجهٔ $R(x)$ باید عددی صحیح و نامنفی و کمتر از ۱ باشد. بنابراین درجهٔ $R(x)$ برابر صفر است، یعنی $R(x)$ عددی ثابت مانند R است. به این‌ترتیب، تساوی (۱) به‌صورت مقابل درمی‌آید

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+R \quad (2)$$

توجه کنید که تا اینجا چیزی از $Q(x)$ و R نمی‌دانیم. برای اینکه R را به‌دست آوریم، یک راه این است که تساوی‌ای به‌دست آوریم که در آن $Q(x)$ وجود نداشته باشد. برای این کار، می‌توانیم ریشهٔ چندجمله‌ای $ax+b$، یعنی $x=-\frac{b}{a}$ را در تساوی (۲) قرار دهیم $P(-\frac{b}{a})=0\times Q(-\frac{b}{a})+R$، یعنی $R=P(-\frac{b}{a})$.

قضیه ۲۸۷ **باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $ax+b$ برابر است با $P(-\frac{b}{a})$.**

تست ۱ **باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=9x^3+3x^2+x+2$ بر $3x-1$ چقدر است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $3x-1$ برابر است با $P(\frac{1}{3})=9(\frac{1}{3})^3+3(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}+2=3$.

تست ۲ **باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^4-kx^3+2x^2+3$ بر $x-2$ برابر -5 است. مقدار k کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر با $P(2)$ است. بنابراین

$$P(2)=-5\Rightarrow 16-8k+8+3=-5\Rightarrow k=4$$

تست ۳ **اگر $P(x+1)=4x^3-mx^2-3x+2$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+1$ برابر ۴ باشد، مقدار m کدام است؟**

۱) ۷ ۲) -7 ۳) ۸ ۴) -8

راه‌حل باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+1$ برابر $P(-1)$ است، و چون بنابر فرض این باقی‌مانده برابر ۴ است، پس $P(-1)=4$.

اکنون اگر در تساوی $P(x+1)=4x^3-mx^2-3x+2$ قرار دهیم $x=-2$، به‌دست می‌آید

$$P(-1)=4\times(-8)-m\times 4-3\times(-2)+2\Rightarrow 4=-24-4m\Rightarrow m=-7$$

نکته ۲۸۸

اگر یک چندجمله‌ای بر حاصل‌ضرب چند تا چندجمله‌ای بخش‌پذیر باشد، بر هریک از این چندجمله‌ای‌ها نیز بخش‌پذیر است.

تست ۴ اگر چندجمله‌ای $P(x)=x^۵+mx^۲+nx+۳۲$ بر $x^۲-۴$ بخش‌پذیر باشد، مقدار $m-n$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) -۲۴ ۳) ۸ ۴) -۸

راه‌حل چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲-۴$ بخش‌پذیر است، پس بر $x-۲$ و $x+۲$ نیز بخش‌پذیر است. بنابراین

$$P(۲)=۰, P(-۲)=۰ \Rightarrow ۳۲+۴m+۲n+۳۲=۰, -۳۲+۴m-۲n+۳۲=۰ \Rightarrow m=-۸, n=-۱۶ \Rightarrow m-n=۸$$

تست ۵ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲-۱$ برابر $۳x+۵$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x-۲$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

راه‌حل چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲-۱$ برابر $۳x+۵$ است، پس بنابر قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها،

$$P(x)=(x^۲-۱)Q(x)+۳x+۵ \quad (۱)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۲x-۲$ برابر با $P(۱)$ است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید $P(۱)=۰+۳+۵=۸$. بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۸ است.

تست ۶ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ و $x-۲$ به‌ترتیب برابر با ۲ و ۳ است. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x^۲-۳x+۲$ را $R(x)$ بنامیم، مقدار $R(۳)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

راه‌حل با توجه به فرض $P(۱)=۲$ و $P(۲)=۳$. چون درجهٔ $x^۲-۳x+۲$ برابر ۲ است، بنابر قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها، درجهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲-۳x+۲$ حداکثر برابر ۱ است. فرض کنید $R(x)=ax+b$. در این صورت چون $x^۲-۳x+۲=(x-۱)(x-۲)$، پس $P(x)=(x-۱)(x-۲)Q(x)+ax+b$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$ و $x=۲$، به‌دست می‌آید:

$$P(۱)=a+b, P(۲)=۲a+b \Rightarrow a+b=۲, ۲a+b=۳ \Rightarrow a=b=۱$$

بنابراین

$$R(x)=x+۱ \Rightarrow R(۳)=۴$$

تست ۷ در تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۱$، خارج‌قسمت $Q(x)$ و باقی‌مانده برابر با ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-۱$ برابر ۲ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲-۱$ کدام است؟

۱) $۴x+۲$ ۲) $۴x-۲$ ۳) $۲x-۶$ ۴) $۲x+۶$

راه‌حل بنابر فرض‌های مسئله،

$$Q(x)=(x-۱)S(x)+۲ \quad (۲), \qquad P(x)=(x+۱)Q(x)+۴ \quad (۱)$$

اگر در تساوی (۱) به جای $Q(x)$ مقدار به‌دست آمده از تساوی (۲) را قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$P(x)=(x+۱)((x-۱)S(x)+۲)+۴=(x+۱)(x-۱)S(x)+۲(x+۱)+۴=(x^۲-۱)S(x)+۲x+۶$$

درنتیجه، بنابر قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها، باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر $۲x+۶$ است.

دست‌گرمی

۲۹۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^۵-۴x^۳+۳x^۲-x+۱$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۲۹۹- اگر چندجمله‌ای $P(x)=۳x^۷-۴ax-۵$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۰۰- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=ax^{۱۳}+bx^{۹۷}-۵$ بر $x+۴$ برابر ۱۶ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۴$ چقدر است؟

۱) ۲۱- ۲) ۲۶- ۳) ۲۱ ۴) ۱۶

۳۰۱- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر با ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(۴x)$ بر $۲x-۱$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۱۹۸ بخش‌پذیری و تقسیم (۱)

۱۹۷۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=3x^4+9x^3+x^2-1$ بر $x+3$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۹۷۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^3-3x^2+3x+6$ بر $x-\sqrt[3]{3}-1$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۱۹۷۳- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=ax^{13}+bx^{97}-5$ بر $x-4$ برابر ۱۶ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ چقدر است؟

۱) -21 ۲) -26 ۳) ۲۱ ۴) ۱۶

۱۹۷۴- چندجمله‌ای $P(x)=x^8+3x^7+ax^2-9$ بر $x+3$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ چقدر است؟

۱) -5 ۲) -1 ۳) -9 ۴) -4

۱۹۷۵- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر با ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(6x)$ بر $3x-1$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹۷۶- $P(x)$ چندجمله‌ای است. اگر $P(x-2)=x^2-3x+2$، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-3$ چقدر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۱۹۷۷- $P(x)$ چندجمله‌ای است و $P^2(x)-8xP(x)=-16x^2$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) -16 ۴) ۱۶

۱۹۷۸- در تقسیم چندجمله‌ای $x^4-3x^3+4x^2+1$ بر $x-1$ خارج‌قسمت چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقی‌مانده برابر ۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-3$ چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۱۹۷۹- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+3)^3$ برابر با $2x-5$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ چقدر است؟

۱) -15 ۲) -12 ۳) -11 ۴) -6

۱۹۸۰- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+3)^3$ برابر x^2-x-3 است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P^2(x)$ بر $x+3$ چقدر است؟

۱) ۸۱ ۲) ۶۴ ۳) ۴۹ ۴) ۳۶

سؤال	گام
۱۹۷۱	۲۸۷
۱۹۷۲	۲۸۷
۱۹۷۳	۲۸۷
۱۹۷۴	۲۸۷
۱۹۷۵	۲۸۷
۱۹۷۶	۲۸۷
۱۹۷۷	۲۸۷
۱۹۷۸	۲۸۶ ۲۸۷
۱۹۷۹	۲۸۶ ۲۸۷
۱۹۸۰	۲۸۶ ۲۸۷

آزمون ۱۹۹ بخش‌پذیری و تقسیم (۲)

۱۹۸۱- اگر چندجمله‌ای $P(x)=۲x^{۱۴}-ax^{۵}-۳$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۵

۱۹۸۲- چندجمله‌ای $P(x)=x^{۵}+۳x^{۴}-ax+۱۶$ بر $(x+۲)^{۲}$ بخش‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) -۱۶

۱۹۸۳- $P(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ سوم است که $P(۱)=P(۲)=P(-۲)=۰$ و $P(-۱)=۲۴$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۳$ چقدر است؟

۱) -۸۰ ۲) ۶۰ ۳) -۴۰ ۴) صفر

۱۹۸۴- اگر $P(x+۳)=x^{۳}-mx^{۲}+mx+۲$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۳)$ بر $x-۵$ برابر -۳ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۹۸۵- اگر $P(x)=x^{۴}+ax^{۳}+۶x^{۲}+bx+۱۰$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر ۱۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۲)$ بر $x+۳$ چقدر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۲ ۳) -۱۲ ۴) -۲۲

۱۹۸۶- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x+۱)$ و $Q(x+۱)$ بر $x-۲$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)Q(x-۱)$ بر $x-۴$ چقدر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۸ ۴) صفر

۱۹۸۷- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۳$ و $x+۳$ به‌ترتیب برابر با a و b است. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^{۲}-۹$ برابر با $۳x-۱$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۹۸۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۲)$ بر $x-۳$ برابر ۵ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر x برابر ۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^{۲}-۱$ کدام است؟

۱) $x-۴$ ۲) $-x+۴$ ۳) $x+۴$ ۴) $-x-۴$

۱۹۸۹- در تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ خارج‌قسمت چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقی‌مانده برابر -۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x+۱$ برابر با ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^{۲}-x-۲$ کدام است؟

۱) $-۵x+۳$ ۲) $۵x-۱۳$ ۳) $۱۰x-۱۳$ ۴) $-۱۰x+۱۳$

۱۹۹۰- اگر چندجمله‌ای $P(x)=ax^{۳}+۴x^{۲}+۱۴x+۱۰+a$ بر $x^{۲}+۲x+۱$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

سؤال
۱۹۸۱
۱۹۸۲
۱۹۸۳
۱۹۸۴
۱۹۸۵
۱۹۸۶
۱۹۸۷
۱۹۸۸
۱۹۸۹
۱۹۹۰

آزمون ۲۰۰

آزمون فصل هشتم (۱)

سؤال	گام
۱۹۹۱	۲۷۰ ۲۷۶
۱۹۹۲	۲۷۲ ۲۷۳ ۲۷۴
۱۹۹۳	۲۷۸
۱۹۹۴	۲۷۵ ۲۷۶
۱۹۹۵	۲۷۵ ۲۷۹
۱۹۹۶	۲۷۵ ۲۷۹
۱۹۹۷	۲۷۸ ۲۸۳
۱۹۹۸	۲۷۵ ۲۷۶
۱۹۹۹	۲۷۶ ۲۸۵
۲۰۰۰	۲۸۷

۱۹۹۱- مقدار $\frac{\sqrt{\sqrt{۵}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt[۶]{\sqrt{۵}+۲}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۵}+۲$ ۳) $\sqrt{۵}-۲$ ۴) ۲

۱۹۹۲- اگر $a=\sqrt{۲}$، $b=\sqrt[۳]{۴}$ و $c=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۳}}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a<b<c$ ۲) $c<a<b$ ۳) $a<c<b$ ۴) $c<b<a$

۱۹۹۳- اگر $a+b=۸$ و $b-c=۱۱$، مقدار $a^۲+ab+bc+ca$ کدام است؟

۱) -۲۶ ۲) -۲۴ ۳) -۲۰ ۴) -۱۸

۱۹۹۴- اگر $a-b+\sqrt{c}=۶$ و $\sqrt{a}+\sqrt{b-\sqrt{c}}=۳$، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۲۵}{۴}$ ۴) $\frac{۲۵}{۱۶}$

۱۹۹۵- اگر $a+\frac{۱}{a}=۳$، مقدار $a^۵+\frac{۱}{a^۵}$ کدام است؟

۱) ۱۲۱ ۲) ۱۲۲ ۳) ۱۲۳ ۴) ۱۲۴

۱۹۹۶- a عددی مثبت است و $\frac{a^۲}{۴}+\frac{۴}{a^۲}=۲۳$، مقدار $\frac{a^۳}{۸}+\frac{۸}{a^۳}$ کدام است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۰

۱۹۹۷- کدام گزینه عاملی از $(x^۲+x+۱)(x^۲+x+۲)-۱۲$ نیست؟

۱) $x^۲-x+۵$ ۲) $x^۲+x+۵$ ۳) $x-۱$ ۴) $x+۲$

۱۹۹۸- مقدار $\frac{۱}{۳}(\sqrt{۷}-۱)\sqrt{۴+\sqrt{۷}}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۹۹۹- مقدار $\frac{۲}{۱-\sqrt{۳}+\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۶}$

۳) $(۱-\sqrt{۳})(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $(۱+\sqrt{۳})(۱-\sqrt{۲})$

۲۰۰۰- اگر $P(x)=x^۴+ax^۳+۶x^۲+bx+۱۰$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر $x-۲$ برابر ۱۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x+۲$ چقدر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۲ ۳) -۱۲ ۴) -۲۲

آزمون ۲۰۱

۲۰۰۱- اگر $x=\sqrt[۷]{۳\sqrt[۳]{۳}}$ ، مقدار $\sqrt[۴]{x^{۲۱}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۹ ۴) $\sqrt[۳]{۹}$

۲۰۰۲- مقدار $\sqrt[۹]{۱۶}\times\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۴\sqrt[۳]{۴}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۹]{۱۶}$ ۲) $\sqrt[۹]{۸}$ ۳) $\sqrt[۹]{۴}$ ۴) ۲

۲۰۰۳- اگر $a,b>۰$ ، حاصل $\sqrt{\frac{a}{b^۳}}\times\sqrt[۳]{\frac{b^۲}{a^۵}}\times\sqrt[۱۲]{a^{۱۴}b^{۱۰}}$ کدام است؟

۱) $a^{-\frac{۵}{۶}}b^{\frac{۱}{۳}}$ ۲) $a^{\frac{۱}{۳}}b^{-\frac{۱}{۶}}$ ۳) $a^{-\frac{۵}{۶}}$ ۴) ۱

۲۰۰۴- اگر $۳^{x-۱}+۳^{-x-۱}=۲$ ، مقدار $۹^{x}+۹^{-x}$ کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۴۰

۲۰۰۵- اگر $a=\frac{\sqrt{۱۷}+۳}{۲}$ و $a+b=\sqrt{۱۷}$ ، مقدار $a^۳-b^۳+۹ab$ کدام است؟

۱) ۶۲ ۲) ۶۳ ۳) ۶۴ ۴) ۶۵

۲۰۰۶- اگر $\frac{۱}{x^۳-۱}=(۱+\sqrt[۸]{۲})(۱+\sqrt[۴]{۲})(۱+\sqrt{۲})(۱+۱)$ ، مقدار $x^{۴۸}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۰۰۷- مقدار $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۲}-۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) ۲

۲۰۰۸- مقدار $\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴}-\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۰۰۹- کدام عبارت در تجزیهٔ عبارت $x^۲y^۲-x^۲-y^۲-۴xy+۱$ وجود دارد؟

۱) $xy-x+y-۱$ ۲) $xy+x-y-۱$

۳) $xy-x-y-۱$ ۴) $xy+x+y+۱$

۲۰۱۰- چندجمله‌ای $P(x+۱)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. اگر $P(۱-x)=ax^۲-x+۲a$ ، مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

سؤال	گا
۲۰۰۱	۷۲ ۷۳
۲۰۰۲	۷۲ ۷۳
۲۰۰۳	
۲۰۰۴	۲۵
۲۰۰۵	۱
۲۰۰۶	۶
۲۰۰۷	۶
۲۰۰۸	۵ ۶ ۵
۲۰۰۹	۵
۲۰۱۰	

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: حل معادلهٔ درجهٔ دوم

هر معادله به‌صورت $ax^۲+bx+c=۰$ را که در آن $a\neq ۰$، **معادلهٔ درجهٔ دوم** می‌نامیم. مثلاً، هر یک از معادله‌های $۳x^۲-x-۴=۰$، $۲x^۲-۵x=۰$ و $۳x^۲-۱=۰$ معادله‌ای درجهٔ دوم هستند.

نکته **معادلهٔ درجهٔ دوم ناقص** ۲۸۹

اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم b یا c صفر باشد، می‌توان معادله را به کمک فاکتورگیری یا ریشه‌گیری حل کرد.

مثال: الف) در معادلهٔ $۲x^۲-۵x=۰$ مقدار c برابر صفر است. می‌توان نوشت $۲x^۲-۵x=۰\Rightarrow x(۲x-۵)=۰\Rightarrow x=۰$ یا $x=\frac{۵}{۲}$

ب) در معادلهٔ $۳x^۲-۱=۰$، مقدار b برابر صفر است. می‌توان نوشت $۳x^۲-۱=۰\Rightarrow ۳x^۲=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

نکته **روش کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم** ۲۹۰

اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم b و c هر دو مخالف صفر باشند، بهتر است معادله را از روش Δ حل کنیم. اگر $\Delta=b^۲-۴ac>۰$، جواب‌های معادله به‌صورت $x_۱=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ هستند.

مثال: معادلهٔ $۳x^۲-x-۴=۰$ را به روش Δ حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۳)(-۴)=۴۹$$

$$x_۱=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۱)-\sqrt{۴۹}}{۲(۳)}=-۱,\quad x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۱)+\sqrt{۴۹}}{۲(۳)}=\frac{۴}{۳}$$

تست ۱ مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۶x-۱۲=۰$ کدام است؟

۱) $\{۳+\sqrt{۱۲},۳-\sqrt{۱۲}\}$ ۲) $\{۶+\sqrt{۲۱},۶-\sqrt{۲۱}\}$ ۳) $\{۳+\sqrt{۲۱},۳-\sqrt{۲۱}\}$ ۴) $\{۶+\sqrt{۱۲},۶-\sqrt{۱۲}\}$

راه‌حل: دلتای معادله برابر است با $\Delta=۳۶+۴۸=۸۴$. بنابراین جواب‌های معادله $x_۱=\frac{۶+\sqrt{۸۴}}{۲}=۳+\sqrt{۲۱}$ و $x_۲=\frac{۶-\sqrt{۸۴}}{۲}=۳-\sqrt{۲۱}$ هستند.

نکته ۲۹۱

اگر $x=k$ جواب یک معادله باشد، در معادله صدق می‌کند، یعنی اگر در معادله به جای x قرار دهیم k، تساوی برقرار می‌شود.

تست ۲ اگر $x=۱$ یک جواب معادلهٔ $ax^۲+a^۲x-۲=۰$ باشد، کمترین مقدار ممکن a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

راه‌حل: چون $x=۱$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند: $a(۱)^۲+a^۲(۱)-۲=۰\Rightarrow a^۲+a-۲=۰\Rightarrow(a-۱)(a+۲)=۰\Rightarrow a=۱, a=-۲$

پس کمترین مقدار ممکن a برابر -۲ است.

حل برخی معادله‌های درجهٔ دوم ۲۹۲

نکته **روش مربع کامل کردن**

مربع کامل کردن، حل برخی معادله‌های درجهٔ دوم را سریع‌تر می‌کند. معادله‌ای به‌صورت $x^۲+mx=n$ را با اضافه کردن $\frac{m^۲}{۴}$ به طرفین معادله می‌توان به روش مربع کامل کردن حل کرد.

$$x^۲+mx=n\Rightarrow x^۲+mx+\frac{m^۲}{۴}=n+\frac{m^۲}{۴}\Rightarrow(x+\frac{m}{۲})^۲=\frac{۴n+m^۲}{۴}$$

مثال: $x^۲+۴x=۷\Rightarrow x^۲+۴x+۴=۷+۴\Rightarrow(x+۲)^۲=۱۱\Rightarrow x+۲=\pm\sqrt{۱۱}\Rightarrow x=-۲\pm\sqrt{۱۱}$

نکته

تجزیه به کمک اتحاد جملهٔ مشترک، حل برخی معادله‌های درجهٔ دوم را سریع‌تر می‌کند.

تست ۳ اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})x+\sqrt{۱۵}=۰$ باشند و $x_۱<x_۲$، مقدار $x_۱^۲+x_۲^۴$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۸ ۳) ۱۴ ۴) ۳۴

راه‌حل معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم. باید دو عدد پیدا کنیم که مجموع آن‌ها $-(\sqrt{۳}+\sqrt{۵})$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\sqrt{۱۵}$ باشد و از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده کنیم:

$$(x-\sqrt{۳})(x-\sqrt{۵})=۰\xrightarrow{x_۱<x_۲}x_۱=\sqrt{۳}\ ,\ x_۲=\sqrt{۵}$$

بنابراین $x_۱^۲+x_۲^۴=(\sqrt{۳})^۲+(\sqrt{۵})^۴=۳+۲۵=۲۸$.

نکته

- اگر $a+b+c=۰$، یعنی مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد، جواب‌های معادله $x=۱$ و $x=\frac{c}{a}$ هستند.
- اگر $a-b+c=۰$، جواب‌های معادلهٔ $x=-۱$ و $x=-\frac{c}{a}$ هستند.

تست ۴ اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲-(۳-۲\sqrt{۲})x-\sqrt{۸}=۰$ باشند و $x_۱<x_۲$، مقدار $۳x_۱+x_۲$ کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۸}$ ۲) $۱+\sqrt{۸}$ ۳) $۳-\sqrt{۸}$ ۴) $۳+\sqrt{۸}$

راه‌حل چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است $(۰=-\sqrt{۸}-(-۳+۲\sqrt{۲})+۳)$، پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}=\frac{-\sqrt{۸}}{۳}$ است.

چون $x_۱<x_۲$، بنابراین

$$x_۱=-\frac{\sqrt{۸}}{۳},\ x_۲=۱\Rightarrow ۳x_۱+x_۲=۱-\sqrt{۸}$$

تست ۵ اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $(\cos^۲\alpha)x^۲+x+\sin^۲\alpha=۰$ باشند و $x_۱<x_۲$، حاصل $x_۲^۲-x_۱$ کدام است؟ $(۴۵^\circ<\alpha<۹۰^\circ)$

۱) $\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ ۲) $\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ ۳) $\frac{۱}{\sin\alpha}$ ۴) $\frac{۱}{\cos\alpha}$

راه‌حل در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a-b+c=۰$، آن‌گاه جواب‌های معادله $x=-۱$ و $x=-\frac{c}{a}$ هستند، با توجه به اینکه $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$، پس

$$a-b+c=\cos^۲\alpha-۱+\sin^۲\alpha=۱-۱=۰$$

بنابراین یکی از جواب‌های معادله -۱ و دیگری $-\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}=-\tan^۲\alpha$ است. توجه کنید که چون

$$۴۵^\circ<\alpha<۹۰^\circ\Rightarrow\tan\alpha>۱\Rightarrow\tan^۲\alpha>۱\Rightarrow-\tan^۲\alpha<-۱$$

چون $x_۱<x_۲$، بنابراین $x_۱=-\tan^۲\alpha$ و $x_۲=-۱$، پس

$$x_۲^۲-x_۱=(-۱)^۲-(-\tan^۲\alpha)=۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

بحث در تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

معادلهٔ درجهٔ دوم ممکن است جواب حقیقی نداشته باشد. یک جواب حقیقی داشته باشد یا دو جواب حقیقی داشته باشد. این موضوع به مقدار Δ بستگی دارد.

نکته ۲۹۴

وضعیت جواب (ریشه)های حقیقی معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ را در جدول زیر آورده‌ایم:

وضعیت جواب‌های معادله	$\Delta=b^2-4ac$
معادله دو جواب حقیقی دارد: $x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta>0$
معادله یک جواب حقیقی (ریشهٔ مضاعف) دارد: $x_1=-\frac{b}{2a}$	$\Delta=0$
معادله جواب حقیقی ندارد.	$\Delta<0$

تذکر هر جا از جواب‌های معادلهٔ درجه دوم صحبت می‌کنیم منظورمان جواب‌های حقیقی معادله است.

تست ۶ کدام معادله جواب ندارد؟

۱) $x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{3}=0$ ۲) $\sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ ۳) $\sqrt{3}x^2-3\sqrt{2}x+1=0$ ۴) $x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0$

راه‌حل در معادلهٔ $x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0$ مقدار Δ عددی منفی است:

$$\Delta=(-\sqrt{3})^2-4\times1\times\sqrt{2}=3-4\sqrt{2}<0$$

بنابراین معادله جواب ندارد. در بقیهٔ معادلات مقدار Δ عددی مثبت است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است. بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) $x^2-\sqrt{2}x-3=0\Rightarrow\Delta=2+12=14>0$

گزینهٔ (۲) $\sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x+1=0\Rightarrow\Delta=12-4\sqrt{2}>0$

گزینهٔ (۳) $\sqrt{3}x^2-3\sqrt{2}x+1=0\Rightarrow\Delta=18-4\sqrt{3}>0$

تست ۷ اگر معادلهٔ $2x^2-kx-k-2=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، این ریشه کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) -4 ۴) ۴

راه‌حل شرط داشتن ریشهٔ مضاعف صفر بودن Δ است:

$$\Delta=k^2-8(-k-2)=0\Rightarrow k^2+8k+16=0\Rightarrow(k+4)^2=0\Rightarrow k=-4$$

پس معادله به‌صورت $2x^2+4x+2=0$ و ریشهٔ مضاعف آن $x=-\frac{-k}{2\times2}=-\frac{4}{4}=-1$ است.

تست ۸ اگر معادلهٔ $x^2-x-m+1=0$ دو جواب داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>\frac{3}{4}$ ۲) $m<\frac{3}{4}$ ۳) $m>\frac{4}{3}$ ۴) $m<\frac{4}{3}$

راه‌حل چون معادله دو جواب دارد، پس $\Delta>0$. بنابراین

$$\Delta=b^2-4ac>0\Rightarrow(-1)^2-4\times1\times(-m+1)>0\Rightarrow1-4(-m+1)>0\Rightarrow1+4m-4>0\Rightarrow4m>3\Rightarrow m>\frac{3}{4}$$

مسائل کاربردی

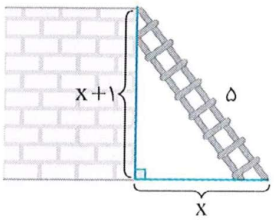
مدل‌سازی برخی مسائل کاربردی به حل و بحث معادله‌های درجهٔ دوم منجر می‌شود.

تست ۹

نردبانی به طول ۵ متر را طوری به دیوار تکیه داده‌ایم که فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار یک متر کمتر از فاصلهٔ سر نردبان تا زمین است. فاصلهٔ پای این نردبان تا دیوار چند متر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

راه‌حل



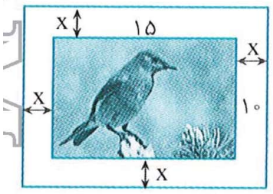
فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار را x بگیرید. در این صورت فاصلهٔ سر نردبان تا زمین $x+1$ است. در نتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$x^2+(x+1)^2=5^2\Rightarrow x^2+x^2+2x+1=25\Rightarrow x^2+x-12=0$$
$$(x+4)(x-3)=0\Rightarrow x_1=-4\ (\text{غ.ق.ق.}),\ x_2=3$$

پس فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار ۳ متر است.

تست ۱۰

عکسی به ابعاد ۱۵×۱۰ در قابی مستطیلی با مساحت $300\,cm^2$ قرار گرفته است. با توجه به شکل، محیط قاب چند سانتی‌متر است؟



۱) ۵۶ ۲) ۷۰
۳) ۷۶ ۴) ۸۶

راه‌حل

با توجه به شکل، طول قاب برابر با $15+2x$ و عرض آن برابر با $10+2x$ است. در نتیجه

$$\text{مساحت قاب}=(10+2x)(15+2x)=300\Rightarrow 150+20x+30x+4x^2=300\Rightarrow 4x^2+50x-150=0$$

بنابراین مسئله به حل معادلهٔ $4x^2+50x-150=0$ منجر می‌شود: $4x^2+50x-150=0\Rightarrow(2x-5)(2x+30)=0\Rightarrow x=\frac{5}{2},\ x=-15\ (\text{غ.ق.ق.})$

پس محیط قاب برابر است با $2\times((15+2\times\frac{5}{2})+(10+2\times\frac{5}{2}))=70\,cm$.

دست‌گرمی

۳۰۲- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^2-8x+13=0$ کدام است؟

۱) $\{4-\sqrt{3},4+\sqrt{3}\}$ ۲) $\{4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}\}$ ۳) $\{2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\}$ ۴) $\{3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}\}$

۳۰۳- کدام معادله به ازای همهٔ مقادیر m جواب دارد؟

۱) $x^2-2x+m=0$ ۲) $x^2-x+m^2=0$ ۳) $mx^2-x-m=0$ ۴) $mx^2-x+1=0$

۳۰۴- اگر معادلهٔ $x^2-(k+1)x+1=0$ جواب داشته باشد، حداقل مقدار مثبت k کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

۳۰۵- کوچک‌ترین جواب معادلهٔ $92x^2-167x+75=0$ کدام است؟

۱) $\frac{75}{92}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{167}{92}$ ۴) $\frac{27}{92}$

۳۰۶- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+2\sqrt{6}=0$ باشند و $x_2>x_1$، مقدار $x_1^4+x_2^2$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۳

۳۰۷- مجموع مربع‌های دو عدد فرد طبیعی متوالی برابر ۱۳۰ است. اختلاف مربع‌های این دو عدد کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

آزمون ۲۰۲ حل معادلهٔ درجهٔ دوم (۱)

۲۰۱۱- اگر معادلهٔ $2x^2+2x+k-2=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۲۰۱۲- اگر معادلهٔ $x^2-2kx+\frac{k}{4}=0$ دو جواب داشته باشد، حدود k کدام است؟

۱) $(\frac{1}{4},+\infty)$ ۲) $(-\infty,0)$

۳) $\mathbb{R}-[-\frac{1}{4},0]$ ۴) $\mathbb{R}-[0,\frac{1}{4}]$

۲۰۱۳- اگر معادلهٔ $x^2-4x+k-1=0$ جواب نداشته باشد، معادلهٔ $x^2+2x-k+6=0$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) حداکثر ۱

۲۰۱۴- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{5})x+\sqrt{10}=0$ باشند و $x_1<x_2$، مقدار $x_1^2+x_2^4$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۹ ۳) ۹ ۴) ۱۴

۲۰۱۵- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $3x^2-(3-2\sqrt{3})x-\sqrt{12}=0$ باشند و $x_1<x_2$، مقدار $3x_1+x_2$ کدام است؟

۱) $1-\sqrt{12}$ ۲) $1+\sqrt{12}$ ۳) $3-\sqrt{12}$ ۴) $3+\sqrt{12}$

۲۰۱۶- اگر a و b جواب‌های معادلهٔ $x^2-x-5=0$ باشند، مقدار عبارت $(a^2-a-2)(b^2-b+2)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۱ ۴) ۲۵

۲۰۱۷- طول مستطیلی چهار واحد از عرض آن بیشتر است. اگر اندازهٔ قطر مستطیل برابر $\sqrt{30}$ باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۰۱۸- نسبت دو عدد طبیعی برابر ۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۶ واحد بیشتر از مجموع آن‌هاست. اختلاف این دو عدد کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۲۰۱۹- اندازهٔ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه اعداد x، $2x$ و $2x-1$ هستند. محیط این مثلث کدام است؟

۱) $9-5\sqrt{3}$ ۲) $10-5\sqrt{3}$

۳) $9+5\sqrt{3}$ ۴) $10+5\sqrt{3}$

۲۰۲۰- تفاضل مکعبات دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر ۴۸۸ است. تفاضل مربعات این اعداد کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۴۸

سؤال	گام
۲۰۱۱	۲۹۴
۲۰۱۲	۲۹۴ ۳۱۸
۲۰۱۳	۲۹۴
۲۰۱۴	۲۹۲
۲۰۱۵	۲۹۳
۲۰۱۶	۲۹۱
۲۰۱۷	۲۹۰ ۲۹۵
۲۰۱۸	۲۹۰ ۲۹۵
۲۰۱۹	۲۹۰ ۲۹۵
۲۰۲۰	۲۹۲ ۲۹۵

آزمون ۲۰۳ — حل معادلهٔ درجهٔ دوم (۲)

۲۰۲۱- اگر معادلهٔ $mx^۲+۲(m+۱)x+m+۱=۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۱ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

۲۰۲۲- اگر معادلهٔ $۴x^۲+۶x+k-۲=۰$ حداکثر یک جواب داشته باشد، حداقل مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۹}{۴}$

۲۰۲۳- اگر معادلهٔ $x^۲+۲x+b=۰$ دو جواب داشته باشد، معادلهٔ $x^۲-۶x+b+۸=۰$ چند جواب دارد؟

۱) حداکثر یک ۲) دقیقاً دو ۳) صفر ۴) یک یا دو

۲۰۲۴- اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^۲+(m-۱)x+m-۲m^۲=۰$ منفی و جواب دیگر کوچک‌تر از ۲ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}<m<۲$ ۲) $\frac{۱}{۲}<m<۲$ یا $-\frac{۱}{۲}<m<۰$

۳) $m<-\frac{۱}{۲}$ یا $m>۲$ ۴) $-\frac{۱}{۲}<m<۲$

۲۰۲۵- اگر $x=\sqrt{۲}-۲$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-mx+m-۲=۰$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

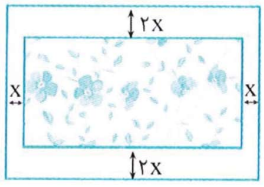
۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}+۲$

۳) $-\sqrt{۲}+۲$ ۴) $-\sqrt{۲}-۲$

۲۰۲۶- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $(\sin^۲\alpha)x^۲+x+\cos^۲\alpha=۰$ باشند و $x_۱<x_۲$، حاصل $x_۲^۲-x_۱$ کدام است؟ $(۰^\circ<\alpha<۴۵^\circ)$

۱) $\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ ۲) $\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$ ۳) $\frac{۱}{\sin\alpha}$ ۴) $\frac{۱}{\cos\alpha}$

۲۰۲۷- مطابق شکل مقابل، عکسی به طول ۱۲ و عرض ۶ سانتی‌متر درون قابی مستطیلی به مساحت ۱۰۴ سانتی‌متر مربع قرار گرفته است. محیط قاب چند سانتی‌متر است؟



۱) ۴۰ ۲) ۴۲

۳) ۴۴ ۴) ۴۶

۲۰۲۸- دو سال پیش سن مریم ۷ برابر سن برادرش بوده است. اکنون سن مریم، مربع سن برادرش است. مجموع سن مریم و برادرش در حال حاضر کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۰

۲۰۲۹- مجموع اندازهٔ مساحت و طول قطر یک مربع برابر $\frac{۷}{۲}$ است. محیط این مربع کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۸-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴-\sqrt{۲}$

۲۰۳۰- سیمی به طول ۲۰ سانتی‌متر را به دو تکه تقسیم کرده‌ایم و با هر تکه یک مربع ساخته‌ایم. مجموع مساحت‌های این دو مربع ۱۳ سانتی‌متر مربع شده است. طول تکهٔ بزرگ‌تر چقدر از طول تکهٔ کوچک‌تر بیشتر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

سؤال
۲۰۲۱
۲۰۲۲
۲۰۲۳
۲۰۲۴
۲۰۲۵
۲۰۲۶
۲۰۲۷
۲۰۲۸
۲۰۲۹
۲۰۳۰

درس دوم: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

بدون حل کردن معادلهٔ درجهٔ دوم می‌توان مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های آن را پیدا کرد.

نکته

جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، به شرط اینکه $\Delta=b^2-4ac>0$، عبارت‌اند از

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad,\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

در این صورت، اگر مجموع جواب‌ها را با S و حاصل‌ضرب جواب‌ها را با P نشان دهیم، آن‌گاه

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad P=x_1x_2=\frac{c}{a}$$

همچنین، قدرمطلق تفاضل جواب‌ها برابر می‌شود با

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال: در معادلهٔ $2x^2+5x+1=0$ مجموع جواب‌ها برابر $-\frac{5}{2}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.

تست ۱ اگر مجموع جواب‌های معادلهٔ $2x^2+(3m-1)x+4m=0$ برابر ۵ باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها کدام است؟

۱) -3 ۲) -4 ۳) -6 ۴) -8

راه‌حل

مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{3m-1}{2}$ است، پس

$$-\frac{3m-1}{2}=5\Rightarrow 3m-1=-10\Rightarrow m=-3$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با

$$\frac{4m}{2}=2m=-6$$

تست ۲ اگر -3 و ۲ جواب‌های معادلهٔ $x^2+mx+n=0$ باشند، مقدار mn کدام است؟

۱) -6 ۲) -3 ۳) ۶ ۴) ۳

راه‌حل

توجه کنید که $m=-(-3+2)=1$ و $n=(-3)(2)=-6$، بنابراین $mn=-6$.

تست ۳ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $-2x^2+3x+k+1=0$ باشند و $|x_1-x_2|=\frac{5}{2}$، مقدار k کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

راه‌حل

توجه کنید که $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. بنابراین

$$\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{3^2-4(k+1)(-2)}}{|-2|}\Rightarrow 5=\sqrt{17+8k}\Rightarrow 25=17+8k\Rightarrow k=1$$

نکته

- اگر جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم قرینهٔ یکدیگر باشند، مجموعشان برابر صفر است.
- اگر جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم عکس یکدیگر باشند، حاصل‌ضربشان برابر ۱ است.

تست ۴ اگـر جواب‌هـای معادلـهٔ $۲x^۲+(m+n)x-۱=۰$ قرینهٔ یکدیگر و جواب‌هـای معادلهٔ $x^۲+۳x-m+n=۰$ عکس یکدیگر باشـند، مقدار mn کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $-\frac{۱}{۹}$

راه‌حل مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲+(m+n)x-۱=۰$ برابر است با $-\frac{m+n}{۲}$، که چون برابر با صفر است، پس $m+n=۰$. از طرف دیگر حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۳x-m+n=۰$ برابر است با $-m+n$، که چون برابر ۱ است، پس $-m+n=۱$. بنابراین

$$\begin{cases} m+n=۰ \\ -m+n=۱ \end{cases} \Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}\ ,\ n=\frac{۱}{۲} \Rightarrow mn=-\frac{۱}{۴}$$

نکته

اگـر α و β جواب‌هـای معادلـهٔ درجه دومی باشـند، برخی عبارت‌ها برحسـب α و β را می‌توان برحسـب مجموع جواب‌هـای معادله (S) و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله (P) نوشت.

$$\text{مجموع معکوس‌های جواب‌ها}=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}$$

$$\text{مجموع مربع‌های جواب‌ها}=\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$$

$$\text{مجموع مکعب‌های جواب‌ها}=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳PS$$

$$\text{قدرمطلق تفاضل جواب‌ها}=|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^۲}=\sqrt{(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta}=\sqrt{S^۲-۴P}$$

تست ۵ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-۴x-۳=۰$ باشند، مقدار $\frac{\alpha}{\beta^۲}+\frac{\beta}{\alpha^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۴}{۹}$ ۲) $\frac{-۱}{۹}$ ۳) $\frac{۶۸}{۹}$ ۴) $\frac{-۴}{۹}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=۲$ و $\alpha\beta=-\frac{۳}{۲}$. بنابراین

$$\frac{\alpha}{\beta^۲}+\frac{\beta}{\alpha^۲}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{۲^۳-۳(-\frac{۳}{۲})(۲)}{(-\frac{۳}{۲})^۲}=\frac{۶۸}{۹}$$

تست ۶ در معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ مجموع جذر جواب‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

راه‌حل اگر جواب‌ها را α و β در نظر بگیریم، آن‌گاه $\alpha+\beta=۳$ و $\alpha\beta=۱$. پس

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{۳+۲\sqrt{۱}}=\sqrt{۵}$$

تست ۷ اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۵x+۳=۰$ باشند، مقدار $x_۱^۲+۵x_۲+۹$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۳۱

راه‌حل چون $x_۱$ جواب معادلهٔ مورد نظر است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x_۱^۲-۵x_۱+۳=۰ \Rightarrow x_۱^۲=۵x_۱-۳$$

از طرف دیگر، $x_۱+x_۲=۵$. بنابراین

$$x_۱^۲+۵x_۲+۹=۵x_۱-۳+۵x_۲+۹=۵(x_۱+x_۲)+۶=۵\times۵+۶=۳۱$$

تست ۸ اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-2x-1=0$ باشند، مقدار $5x_1^4+12x_2^3$ کدام است؟

۱) -71 ۲) ۱۵۴ ۳) ۱۶۹ ۴) -76

راه‌حل توجه کنید که معادله را می‌توان به صورت $x^2=2x+1$ نوشت. چون x_1 جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x_1^2=2x_1+1 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} x_1^4=(2x_1+1)^2=4x_1^2+4x_1+1=4(2x_1+1)+4x_1+1=12x_1+5$$

از طرف دیگر، چون x_2 جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$x_2^2=2x_2+1 \xrightarrow{\times x_2} x_2^3=2x_2^2+x_2=2(2x_2+1)+x_2=5x_2+2$$

بنابراین $5x_1^4+12x_2^3=5(12x_1+5)+12(5x_2+2)=60(x_1+x_2)+49 \xrightarrow{x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2} 5x_1^4+12x_2^3=60\times 2+49=169$.

نکته ۲۹۸

اگر در مسئله‌ای رابطه‌ای بین دو جواب معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده باشد، با این رابطه، مجموع جواب‌ها و حاصل‌ضرب جواب‌ها، یک دستگاه معادلات تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم.

تست ۹ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-(k+2)x-6=0$ باشند و $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\frac{5}{6}$. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{-7}{2}$ ۴) $\frac{-9}{2}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=k+2$ و $\alpha\beta=-6$. از طرف دیگر $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\frac{5}{6}$. پس $\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{5}{6}$. بنابراین

$$\frac{2(k+2)}{-6}=\frac{5}{6}\Rightarrow 2k+4=-5\Rightarrow k=-\frac{9}{2}$$

تست ۱۰ در معادلهٔ $x^2-mx-8=0$ یکی از جواب‌ها مربع جواب دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -1

راه‌حل اگر α و β جواب‌های معادله باشند. آن‌گاه $\alpha=\beta^2$. از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=-8\Rightarrow\beta^3=-8\Rightarrow\beta=-2$$

پس $\alpha=4$. همچنین

$$\alpha+\beta=m\Rightarrow m=4-2=2$$

نکته تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم ۲۹۹

اگر x_1 و x_2 عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ هستند، که در آن $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$. بنابراین برای نوشتن معادلهٔ درجهٔ دومی که جواب‌های آن معلوم هستند، ابتدا مجموع (S) و حاصل‌ضرب جواب‌ها (P) را حساب می‌کنیم، سپس معادله را به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ می‌نویسیم.

تست ۱۱ معادلهٔ درجهٔ دومی که جواب‌های آن $\frac{3}{\sqrt{2}+1}$ و $\frac{-3}{\sqrt{2}-1}$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2+3x-6=0$ ۲) $x^2-6x-9=0$ ۳) $x^2-3x-6=0$ ۴) $x^2+6x-9=0$

راه‌حل مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$S=\frac{3}{\sqrt{2}+1}-\frac{3}{\sqrt{2}-1}=\frac{3(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{3(-2)}{2-1}=-6,\quad P=(\frac{3}{\sqrt{2}+1})(-\frac{3}{\sqrt{2}-1})=\frac{-9}{2-1}=-9$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2+6x-9=0$$

تست ۱۲ جواب‌های کدام معادله عکس و قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۵=۰$ هستند؟

۱) $۵x^۲-۳x-۱=۰$ ۲) $۵x^۲+۳x-۱=۰$ ۳) $۵x^۲+۳x-۲=۰$ ۴) $۵x^۲-۳x-۲=۰$

راه‌حل اگر جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۵=۰$ را α و β بنامیم، آن‌گاه $\alpha+\beta=۳$ و $\alpha\beta=-۵$. از طرف دیگر جواب‌های معادلهٔ مورد نظر $-\frac{۱}{\alpha}$ و $-\frac{۱}{\beta}$ هستند. بنابراین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ای که می‌خواهیم بنویسیم به‌صورت $S=(-\frac{۱}{\alpha})+(-\frac{۱}{\beta})=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{۳}{-۵}=\frac{۳}{۵}$ و $P=(-\frac{۱}{\alpha})(-\frac{۱}{\beta})=\frac{۱}{\alpha\beta}=-\frac{۱}{۵}$ هستند. پس معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۵}x-\frac{۱}{۵}=۰\Rightarrow ۵x^۲-۳x-۱=۰$$

تست ۱۳ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲-x-۳=۰$ باشند، معادلهٔ درجه دومی که جواب‌های آن $\alpha-\frac{۱}{\alpha}$ و $\beta-\frac{۱}{\beta}$ باشند، کدام است؟

۱) $۳x^۲-۴x-۳=۰$ ۲) $۳x^۲+۴x-۳=۰$ ۳) $x^۲-۴x-۱=۰$ ۴) $x^۲+۴x+۱=۰$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=۱$ و $\alpha\beta=-۳$. پس مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$S=\alpha-\frac{۱}{\alpha}+\beta-\frac{۱}{\beta}=\alpha+\beta-(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})=\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۱-\frac{۱}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

$$P=(\alpha-\frac{۱}{\alpha})(\beta-\frac{۱}{\beta})=\alpha\beta-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{۱}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}=-۳+\frac{۱}{-۳}-\frac{۱-۲(-۳)}{-۳}=-۱$$

پس معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۴}{۳}x-۱=۰\Rightarrow ۳x^۲-۴x-۳=۰$$

دست‌گرمی

۳۰۸- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۴x-۱=۰$ باشند، مقدار $x_۱^۲x_۲+x_۱x_۲^۲$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۴ ۳) -۲ ۴) ۲

۳۰۹- در معادلهٔ $x^۲-۲x-۵=۰$ مجموع مکعب‌های جواب‌ها کدام است؟

۱) ۳۸ ۲) -۹۵ ۳) ۱۵۵ ۴) -۳۵

۳۱۰- در معادلهٔ $۲x^۲-mx+m-۱=۰$ یکی از جواب‌ها عکس و قرینهٔ جواب دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۳۱۱- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۵x-۴m+۱۶=۰$ باشند و $۲x_۱-x_۲=۱۷$، مقدار m کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۳۱۲- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۷=۰$ باشند، مقدار عبارت $\alpha+۲\beta^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۳۱۳- معادلهٔ درجهٔ دومی که جواب‌های آن $۲-\sqrt{۳}$ و $۳+\sqrt{۳}$ باشند، کدام است؟

۱) $x^۲-۵x-\sqrt{۳}=۰$ ۲) $x^۲+۵x-۳+\sqrt{۳}=۰$

۳) $x^۲-۵x+۳-\sqrt{۳}=۰$ ۴) $x^۲+۵x+۳-\sqrt{۳}=۰$

۳۱۴- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$ باشند، معادلهٔ درجه دومی که جواب‌هایش $\frac{۱}{x_۱+۱}$ و $\frac{۱}{x_۲+۱}$ هستند، کدام است؟

۱) $x^۲-۳x+۱=۰$ ۲) $x^۲-۳x-۱=۰$ ۳) $x^۲-x+۱=۰$ ۴) $x^۲-x-۳=۰$

آزمون ۲۰۴ روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۱)

۲۰۳۱- اگر مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲-(m+۱)x-۲m-۱=۰$ برابر ۵ باشد، حاصل‌ضرب جواب‌های آن کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۹ ۳) -۱۱ ۴) -۱۳

۲۰۳۲- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۵=۰$ باشند، حاصل $x_۱(x_۲-۲)+x_۲(x_۱-۲)$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۲ ۳) -۱۶ ۴) -۴

۲۰۳۳- از هر یک از جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۵=۰$ دو واحد کم می‌کنیم. حاصل‌ضرب آن‌ها به اندازهٔ چند واحد تغییر می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) صفر

۲۰۳۴- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+(k+۱)x+۸=۰$ باشند و $\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=-\frac{۳}{۴}$، مقدار k کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۰۳۵- در معادلهٔ $۲x^۲+۱۰x+m-۱=۰$ یکی از جواب‌ها دو برابر عکس جواب دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

۲۰۳۶- در معادلهٔ $۸x^۲+mx-۲۷=۰$ یکی از جواب‌ها مربع جواب دیگر است. مقدار m کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۶ ۳) -۲ ۴) -۱

۲۰۳۷- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x+k=۰$ باشند و $x_۱^۳+x_۲^۳=۶$، مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۰۳۸- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳kx+۹=۰$ باشند و $\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}=۶$، مقدار k کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۰۳۹- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x-۱=۰$ باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی که جواب‌های آن $(\alpha-\beta)^۲$ و $(\alpha+\beta)^۲$ هستند، کدام است؟

۱) $x^۲-۱۳x-۱۴=۰$ ۲) $x^۲-۲۲x+۱۱۷=۰$

۳) $x^۲-۲۲x-۱۱۷=۰$ ۴) $x^۲-۱۳x+۱۴=۰$

۲۰۴۰- اگر جواب‌های معادلهٔ $9x^۲-ax+b=۰$ از مربع معکوس جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲+۳x=۹$ سه واحد کمتر باشند، مقدار a کدام است؟

۱) -۳۲ ۲) -۴۹ ۳) -۵۲ ۴) -۵۶

سؤال	گام
۲۰۳۱	۲۹۶
۲۰۳۲	۲۹۶
۲۰۳۳	۲۹۱ ۲۹۶
۲۰۳۴	۲۹۶ ۲۹۷ ۲۹۸
۲۰۳۵	۲۹۶ ۲۹۸
۲۰۳۶	۲۹۶ ۲۹۸
۲۰۳۷	۲۹۶ ۲۹۷ ۲۹۸
۲۰۳۸	۲۹۶ ۲۹۸
۲۰۳۹	۲۹۶ ۲۹۹
۲۰۴۰	۲۹۲ ۲۹۶ ۲۹۸

آزمون ۲۰۵ روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۲)

۲۰۴۱- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $2x^2-x-7=0$ باشند، مقدار عبارت $\alpha+2\beta^2$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $\frac{11}{2}$ ۳) $\frac{13}{2}$ ۴) $\frac{15}{2}$

۲۰۴۲- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $2x^2-3x-5=0$ باشند، مقدار $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ کدام است؟

۱) $-\frac{5}{4}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $-\frac{15}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

۲۰۴۳- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $2x^2-x-5=0$ باشند، مقدار $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) $-\frac{23}{5}$ ۲) $-\frac{23}{10}$ ۳) $-\frac{21}{5}$ ۴) $-\frac{21}{10}$

۲۰۴۴- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $-2x^2+5x+k+1=0$ باشند و $|x_1-x_2|=3$، مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۰۴۵- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-x+2k-3=0$ باشند و $x_1^2-x_2^2=6$، مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{11}{8}$ ۲) $-\frac{13}{8}$ ۳) $-\frac{23}{8}$ ۴) $-\frac{25}{8}$

۲۰۴۶- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-15x+9=0$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۰۴۷- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $3x^2-6x-4=0$ باشند، معادلهٔ درجه دومی که جواب‌هایش $x_1^2+x_1x_2$ و $x_2^2+x_1x_2$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-4x-16=0$ ۲) $3x^2-12x+16=0$

۳) $x^2-12x+16=0$ ۴) $3x^2-12x-16=0$

۲۰۴۸- جواب‌های کدام معادله مکعب جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ هستند؟

۱) $x^2-72x-125=0$ ۲) $x^2-25x-27=0$

۳) $x^2-18x-125=0$ ۴) $x^2-18x-27=0$

۲۰۴۹- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2+x-3=0$ باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی که جواب‌های آن $\alpha^2+\frac{1}{\beta}$ و $\beta^2+\frac{1}{\alpha}$ هستند، کدام است؟

۱) $3x^2-22x+23=0$ ۲) $3x^2-23x+22=0$

۳) $3x^2-23x-22=0$ ۴) $3x^2-22x-23=0$

۲۰۵۰- اگر $x_1+x_2+x_1x_2=-1$ و $x_1+x_2-x_1x_2=-11$، معادلهٔ درجه دومی که جواب‌هایش x_1 و x_2 هستند کدام است؟

۱) $x^2+6x-5=0$ ۲) $x^2-6x-5=0$

۳) $x^2+6x+5=0$ ۴) $x^2-12x+6=0$

سؤال	گا
۲۰۴۱	۹۶ ۹۷
۲۰۴۲	۹۶
۲۰۴۳	۹۶ ۹۷
۲۰۴۴	۹۶
۲۰۴۵	۹۶
۲۰۴۶	۹۶
۲۰۴۷	۹۶ ۹۹
۲۰۴۸	۹۶ ۹۷ ۹۹
۲۰۴۹	۹۶ ۹۷ ۹۹
۲۰۵۰	۹۹

درس سوم: رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

- معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+5x+1=0$ را در نظر بگیرید که دو جواب دارد. توجه کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های این معادله برابر $\frac{1}{3}$ است، پس این جواب‌ها هم‌علامت هستند. از طرف دیگر، مجموع این جواب‌ها برابر $-\frac{5}{3}$ است. پس هر دو جواب منفی هستند.
- اگر معادلهٔ درجهٔ دوم دو جواب داشته باشد، از روی حاصل‌ضرب و مجموع جواب‌ها می‌توان علامت آن‌ها را مشخص کرد.

رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۳۰۰

معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\Delta>0$.

- اگر $\frac{c}{a}<0$، آن‌گاه معادله دو جواب مختلف‌العلامت دارد. در این صورت، اگر $-\frac{b}{a}>0$، آن‌گاه قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت کوچک‌تر است و اگر $-\frac{b}{a}<0$، آن‌گاه قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است.
- اگر $\frac{c}{a}>0$، آن‌گاه معادله دو جواب هم‌علامت دارد. در این‌صورت، اگر $-\frac{b}{a}>0$، آن‌گاه هر دو جواب مثبت‌اند و اگر $-\frac{b}{a}<0$، آن‌گاه هر دو جواب منفی‌اند.
- اگر $\frac{c}{a}=0$، آن‌گاه یکی از جواب‌های معادله برابر صفر است. در این صورت اگر $-\frac{b}{a}>0$، آن‌گاه جواب دیگر مثبت است و اگر $-\frac{b}{a}<0$، آن‌گاه جواب دیگر منفی است.

۳۰۱

تذکر اگر $\frac{c}{a}\leq 0$، آن‌گاه $ac\leq 0$ و در نتیجه $\Delta=b^2-4ac\geq 0$. بنابراین برای اینکه معادله‌ای دو جواب داشته باشد، در حالت $\frac{c}{a}\leq 0$ نیازی به بررسی مثبت بودن Δ نیست ولی در حالت $\frac{c}{a}>0$ باید از مثبت بودن Δ مطمئن شویم.

تست ۱ علامت جواب‌های معادلهٔ $3x^2+2x+m(m-2)=0$ با هم فرق دارد. حدود m کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $m<0$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $0<m<2$

راه‌حل کافی است حاصل‌ضرب جواب‌های معادله منفی باشد، یعنی $\frac{m(m-2)}{3}<0$.

پس با توجه به جدول تعیین علامت، $0<m<2$.

m	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\frac{m(m-2)}{3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

تست ۲ اگر معادلهٔ $x^2-mx+3-m=0$ دو جواب مثبت داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $0<m<3$ ۲) $0<m<2$ ۳) $m<-6$ ۴) $2<m<3$

راه‌حل اگر α و β جواب‌های معادله باشند، باید شرایط زیر برقرار باشند تا معادله دو جواب مثبت داشته باشد:

$$\Delta>0,\quad \alpha+\beta>0,\quad \alpha\beta>0$$

بنابراین

$$\Delta=m^2-4(3-m)>0\Rightarrow m^2+4m-12>0\Rightarrow(m+6)(m-2)>0\Rightarrow m>2 \quad \text{یا} \quad m<-6$$

$$\alpha+\beta>0\Rightarrow m>0,\quad \alpha\beta>0\Rightarrow 3-m>0\Rightarrow m<3$$

بنابراین $2<m<3$.

تست ۳

در معادلهٔ $x^۲-mx+m^۲-۴=۰$ قدرمطلق جواب منفی معادله از جواب مثبت آن بزرگ‌تر است. حدود m کدام است؟

۱) $۰<m<۲$ ۲) $-۲<m<۰$ ۳) $-۲<m<۲$ ۴) $۱<m<۲$

راه‌حل

معادله دو جواب مختلف‌العلامت دارد. پس حاصل‌ضرب جواب‌ها منفی است:

$$m^۲-۴<۰\Rightarrow m^۲<۴\Rightarrow -۲<m<۲$$

از طرف دیگر قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع جواب‌ها منفی است، یعنی $m<۰$. بنابراین $-۲<m<۰$.

دست‌گرمی

۳۱۵- اگر معادلهٔ $mx^۲-۲x+m+۲=۰$ دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $۰<m<۲$ ۲) $-۲<m<۰$ ۳) $-۲<m<-۱$ ۴) $۱<m<۲$

۳۱۶- به ازای چه مقادیری از a معادلهٔ $a-۲x^۲-۴x=۰$ دو جواب منفی دارد؟

۱) $a>۰$ ۲) $a>-۲$ ۳) $-۱<a<۵$ ۴) $-۲<a<۰$

۳۱۷- اگر معادلهٔ $۲x^۲+(a+۱)x+۸=۰$ دو جواب مثبت داشته باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(-\infty,-۹)$ ۲) $(-\infty,-۱)$ ۳) $(۷,+\infty)$ ۴) $(-۱,۷)$

۳۱۸- معادلهٔ $(k+۶)x^۲+۱۷(k+۱)x+۵(k-۲)=۰$ دو جواب مانند $x_۱$ و $x_۲$ دارد که $x_۱<۰<x_۲$ و $|x_۱|>x_۲$. مجموعهٔ مقادیر k کدام است؟

۱) $(-۶,-۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۰,۳)$ ۴) $(-۱,۲)$

آزمون ۲۰۶ رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۲۰۵۱- به ازای چند مقدار صحیح m معادلهٔ $(m+۲)x^۲-x+m-۴=۰$ یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۰۵۲- اگر جواب‌های معادلهٔ $a^۲x^۲+x-a^۲+۱=۰$ هم‌علامت نباشند، حدود a کدام است؟

۱) $|a|<۱$ ۲) $|a|>۱$ ۳) $|a|<۲$ ۴) $|a|>۲$

۲۰۵۳- اگر معادلهٔ $x^۲+۲mx-m-۱=۰$ دو جواب هم‌علامت داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m<-۱$ ۲) $m>-۱$ ۳) $m<۱$ ۴) $m>۱$

۲۰۵۴- اگر معادلهٔ $۴ax^۲-۴(a+۲)x+۹=۰$ دو جواب حقیقی مثبت داشته باشد، a چند مقدار طبیعی نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۵۵- اگر معادلهٔ $۲x^۲+mx+m-۲=۰$ دو جواب منفی داشته باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(۲,+\infty)-\{۴\}$ ۲) $(۲,+\infty)$ ۳) $(۲,۴)$ ۴) $(۰,۴)$

۲۰۵۶- معادلهٔ $x^۲+(m-۴)x+۲m+۴=۰$ دو جواب نامنفی دارد. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۵۷- اگر معادلهٔ $-x^۲+(m-۲)x+m+۱=۰$ دو جواب منفی داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-۱<m<۰$ ۲) $m<۰$ ۳) $m<-۱$ ۴) $-۱<m<-\frac{۱}{۲}$

۲۰۵۸- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $mx^۲+(۲m-۱)x-۲=۰$ باشند، $x_۱<۰<x_۲$ و $|x_۲|>|x_۱|$، حدود m کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}<m<\frac{۱}{۲}$ ۲) $۰<m<۱$ ۳) $۰<m<\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}<m<۰$

۲۰۵۹- معادلهٔ $x^۲-۲x+m-۲=۰$ حداقل یک جواب دارد که مثبت نیست. حداکثر مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۶۰- معادلهٔ $x^۲-۲mx-m-۲=۰$ حداقل یک جواب مثبت دارد. حدود m کدام است؟

۱) $m<-۲$ ۲) $m>-۲$ ۳) $-۲<m<۲$ ۴) $-۲<m<۰$

سؤال	گام
۲۰۵۱	۲۹۶ ۳۰۰ ۳۰۱
۲۰۵۲	۲۹۶ ۳۰۰ ۳۰۱
۲۰۵۳	۲۹۶ ۳۰۰
۲۰۵۴	۲۹۶ ۳۰۰ ۳۱۸
۲۰۵۵	۲۹۶ ۳۰۰
۲۰۵۶	۲۹۶ ۳۰۰ ۳۱۸
۲۰۵۷	۲۹۶ ۳۰۰
۲۰۵۸	۲۹۶ ۳۰۰ ۳۱۸
۲۰۵۹	۲۹۶ ۳۰۰
۲۰۶۰	۲۹۶ ۳۰۰

درس چهارم: معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم خاص

معادله‌های درجهٔ سوم

نکته

اگر $x=a$ جواب معادلهٔ $P(x)=0$ باشد، آن‌گاه $x-a$ یکی از عامل‌های چندجمله‌ای $P(x)$ است.

گاهی می‌توان با حدس و آزمایش یک جواب معادله را پیدا کرد. مثلاً، معلوم است که $x=1$ جواب معادلهٔ $x^3-2x+1=0$ است. بنابراین $x-1$ عاملی از $P(x)=x^3-2x+1$ است. پس با تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ می‌توان عامل دیگری از آن را پیدا کرد:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x+1 & x-1 \\ \hline -(x^3-x^2) & x^2+x-1 \\ \hline x^2-2x+1 & \\ -(x^2-x) & \\ \hline -x+1 & \\ -(-x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

بنابراین $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$. در نتیجه

$$x^3-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$$

پس

$$x-1=0 \Rightarrow x=1, \quad x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

به همین روش معلوم می‌شود که اگر یک جواب از معادلهٔ درجهٔ سوم را بدانیم، پیداکردن جواب‌های دیگر معادلهٔ مورد نظر به کمک تجزیه و تقسیم به حل معادله‌ای درجهٔ دوم منجر می‌شود.

تست ۱

اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $4x^3+16x^2+9x+a=0$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، اختلاف دو جواب دیگر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

راه‌حل

چون $x=\frac{1}{2}$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند

$$4(\frac{1}{8})+16(\frac{1}{4})+9(\frac{1}{2})+a=0 \Rightarrow a=-9$$

با توجه به اینکه $2x-1$ عامل سمت چپ معادله است، پس به کمک تقسیم می‌توان نوشت

$$4x^3+16x^2+9x-9=0 \Rightarrow (2x-1)(2x^2+9x+9)=0 \Rightarrow (2x-1)(2x+3)(x+3)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, x=-\frac{3}{2}, x=-3$$

بنابراین اختلاف دو جواب دیگر برابر $\frac{3}{2}$ است.

توجه داشته باشید که اختلاف جواب‌ها را می‌توان به صورت زیر هم به‌دست آورد

$$2x^2+9x+9=0 \Rightarrow |x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{9}}{|2|}=\frac{3}{2}$$

تست ۲

اگر معادلهٔ $x^3+x^2-mx+m-2=0$ دو جواب منفی داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $m<1$ ۳) $1<m<2$ ۴) $-2<m<-1$

راه‌حل

توجه کنید که $x=1$ جواب معادلهٔ مورد نظر است: $1^3+1^2-m\times 1+m-2=0$. بنابراین $x-1$ یکی از عامل‌های $x^3+x^2-mx+m-2$ است. اگر این چندجمله‌ای را بر $x-1$ تقسیم کنیم، معلوم می‌شود که $x^3+x^2-mx+m-2=(x-1)(x^2+2x-m+2)$. چون جواب معادلهٔ $x-1=0$ مثبت است، پس معادلهٔ $x^2+2x-m+2=0$ باید دو جواب منفی داشته باشد. مجموع جواب‌های این معادله برابر -2 است که منفی است، پس

$$\Delta>0 \Rightarrow 4-4(-m+2)>0 \Rightarrow m>1, \quad \frac{c}{a}>0 \Rightarrow -m+2>0 \Rightarrow m<2$$

بنابراین $1<m<2$.

معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$

۳۰۳

با تغییر متغیر $t=x^2$، معادلهٔ دومجذوری $ax^4+bx^2+c=0$ به معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ تبدیل می‌شود. اگر t_1 جواب نامنفی این معادلهٔ درجه دوم باشد، $x=\pm\sqrt{t_1}$ جواب‌های معادلهٔ دومجذوری هستند.

تست ۳ جواب کوچک‌تر معادلهٔ $x^4-2\sqrt{2}x^2-1=0$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ۲) $-\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ۳) $-\sqrt{\sqrt{2}+1}$ ۴) $-\sqrt{\sqrt{2}-1}$

راه‌حل اگر فرض کنیم $t=x^2\geq 0$، معادله به‌صورت $t^2-2\sqrt{2}t-1=0$ در می‌آید که جواب‌های آن به‌صورت زیر هستند:

$$\Delta=(2\sqrt{2})^2+4=12\Rightarrow t=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{12}}{2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$$

جواب $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ قابل قبول نیست زیرا منفی است. بنابراین

$$t=\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow x^2=\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله برابر $-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ است.

نکته ۳۰۴

اگر $b,c\neq 0$، وضعیت تعداد جواب‌های معادلهٔ دومجذوری را در جدول زیر آورده‌ایم.

$ax^4+bx^2+c=0$	$at^2+bt+c=0$
جواب ندارد.	۱) جواب ندارد. ۲) ریشهٔ مضاعف منفی دارد. ۳) دو جواب منفی دارد.
دو جواب دارد.	۱) ریشهٔ مضاعف مثبت دارد. ۲) دو جواب مختلف‌العلامت دارد.
چهار جواب دارد.	دو جواب مثبت دارد.

تذکر در حالت‌های خاص زیر، معادلهٔ دومجذوری $ax^4+bx^2+c=0$ ممکن است یک جواب یا سه جواب داشته باشد.

$$b=0\ ,\ c=0\Rightarrow x=0$$

$$b\neq 0\ ,\ c=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}\qquad(-\frac{b}{a}>0)$$

تست ۴ به ازای کدام مقادیر m معادلهٔ $x^4-2mx^2+m+2=0$ چهار جواب دارد؟

۱) $m>2$ ۲) $m<2$ ۳) $0<m<2$ ۴) $-2<m<2$

راه‌حل اگر فرض کنیم $t=x^2$، آن‌گاه $t\geq 0$ و $x=\pm\sqrt{t}$ و معادله به شکل $t^2-2mt+m+2=0$ درمی‌آید. اگر این معادله دارای دو جواب مثبت مانند t_1 و t_2 باشد، معادلهٔ اصلی دارای چهار جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t_1}$ و $x=\pm\sqrt{t_2}$ خواهد بود. برای اینکه معادلهٔ اخیر دارای دو جواب مثبت باشد، باید

$$\Delta>0\Rightarrow 4m^2-4(m+2)>0\Rightarrow m^2-m-2>0\Rightarrow(m-2)(m+1)>0\Rightarrow m>2 \text{ یا } m<-1$$

$$t_1t_2>0\Rightarrow m+2>0\Rightarrow m>-2$$

$$t_1+t_2>0\Rightarrow 2m>0\Rightarrow m>0$$

بنابراین باید $m>2$.

تست ۵ به ازای چند عدد طبیعی مانند k، معادلهٔ $x^۴-۲x^۲+k-۳=۰$ دو جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر فرض کنیم $t=x^۲$، آن‌گاه $t^۲-۲t+k-۳=۰$. اگر این معادله دارای دو جواب مختلف‌العلامت باشد یا دارای ریشهٔ مضاعف مثبت باشد، معادلهٔ اولیه دارای دو جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t_۱}$ خواهد بود. پس

$$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow k-۳<۰\Rightarrow k<۳ \quad \text{یا} \quad \Delta=۰,-\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow ۴-۴(k-۳)=۰\Rightarrow k=۴$$

بنابراین به‌ازای اعداد طبیعی $k=۱$، $k=۲$ و $k=۴$ معادله دارای دو جواب است.

تست ۶ اگر معادلهٔ $x^۴-۲x^۲-m^۲-۴=۰$ جواب نداشته باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

راه‌حل اگر فرض کنیم $t=x^۲$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$، $t\geq ۰$ و معادله به شکل $t^۲-۲t-m^۲-۴=۰$ درمی‌آید. در این معادله

$$\Delta=۴-۴(-m^۲-۴)=۲۰+۴m^۲>۰$$

بنابراین معادله همواره دو جواب دارد. باتوجه به اینکه حاصل‌ضرب جواب‌های این معادله برابر $-m^۲-۴$ است و این مقدار همواره منفی است، پس یکی از جواب‌های این معادله مثبت $(t_۱)$ و یکی دیگر منفی است $(t_۲)$. بنابراین معادلهٔ اصلی به ازای هر مقدار m دارای دو جواب به شکل $x=\pm\sqrt{t_۱}$ است. پس هیچ مقداری برای m وجود ندارد که به‌ازای آن معادلهٔ $x^۴-۲x^۲-m^۲-۴=۰$ جواب نداشته باشد.

نکته

می‌توانیم برخی معادله‌ها را با استفاده از تغییر متغیر به معادله‌ای درجهٔ دوم تبدیل کنیم.

مثال: معادلهٔ $(x-۱)^۴+(x-۱)^۲-۲=۰$ با تغییر متغیر $(x-۱)^۲=t$ به صورت $t^۲+t-۲=۰$ درمی‌آید، که به‌صورت $t=\frac{-۱\pm\sqrt{۹}}{۲}=-۲,۱$ حل می‌شود. بنابراین

$$t=-۲\Rightarrow(x-۱)^۲=-۲ \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$t=۱\Rightarrow(x-۱)^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}x-۱=-۱\\x-۱=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۲\end{cases}$$

تست ۷ معادلهٔ $(x^۲-x)^۲-۵(x^۲-x)+۴=۰$

۱) فقط دو جواب مثبت دارد.
۲) فقط دو جواب منفی دارد.
۳) دو جواب مثبت و دو جواب منفی دارد.
۴) چهار جواب مثبت دارد.

راه‌حل فرض می‌کنیم $x^۲-x=t$ و معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^۲-۵t+۴=۰\Rightarrow t=۱,t=۴$$

اگر $t=۱$،

$$x^۲-x=۱\Rightarrow x^۲-x-۱=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ فوق برابر -۱ است. پس معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

اگر $t=۴$،

$$x^۲-x=۴\Rightarrow x^۲-x-۴=۰$$

معادلهٔ فوق هم یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. پس معادلهٔ $(x^۲-x)^۲-۵(x^۲-x)+۴=۰$ دو جواب مثبت و دو جواب منفی دارد.

تست ۸ معادلهٔ $(x^۲-۳x+۳)^۲-(x-۱)(x-۲)=۷$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل معادله را به صورت $(x^۲-۳x+۳)^۲-(x^۲-۳x+۲)=۷$ می‌نویسیم. فرض می‌کنیم $t=x^۲-۳x$ و معادله به صورت $(t+۳)^۲-(t+۲)=۷$ درمی‌آید. بنابراین

$$t^۲+۶t+۹-t-۲-۷=۰\Rightarrow t^۲+۵t=۰\Rightarrow t=۰\,,\ t=-۵$$

اگر $t=۰$، آن‌گاه

$$x^۲-۳x=۰\Rightarrow x(x-۳)=۰\Rightarrow x=۰\,,\ x=۳$$

اگر $t=-۵$، آن‌گاه

$$x^۲-۳x=-۵\Rightarrow x^۲-۳x+۵=۰$$

معادلهٔ اخیر جواب ندارد. زیرا $\Delta=۹-۲۰<۰$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

تست ۹ اگر معادلهٔ $mx^۶-x^۳+m-۱=۰$ دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-۱<m<۱$ ۲) $-۱<m<۰$ ۳) $۰<m<۱$ ۴) $m>۱$

راه‌حل اگر فرض کنیم $x^۳=t$، معادله به شکل $mt^۲-t+m-۱=۰$ در می‌آید. اگر این معادله دو جواب مختلف‌العلامت مانند $t_۱$ و $t_۲$ داشته باشد، معادلهٔ اصلی هم دو جواب مختلف‌العلامت $\sqrt[۳]{t_۱}$ و $\sqrt[۳]{t_۲}$ خواهد داشت. بنابراین کافی است $t_۱t_۲$ منفی باشد. پس

$$\frac{m-۱}{m}<۰\Rightarrow ۰<m<۱$$

دست‌گرمی

۳۱۹- مجموع جواب‌های منفی معادلهٔ $x^۳-x^۲-۳x-۱=۰$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۵}$ ۳) $۱-\sqrt{۲}$ ۴) $۱-\sqrt{۵}$

۳۲۰- اگر $x=۲$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^۳+ax^۲+x+۶=۰$ باشد، مجموع مربع‌های جواب‌های دیگر این معادله چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

۳۲۱- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^۴-۳x^۲-۱=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$

۳۲۲- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۴-۲x^۲+m^۲-۱=۰$ چهار عضو دارد. حدود m کدام است؟

۱) $m\in(-\sqrt{۲}\,,\sqrt{۲})$ ۲) $m\in(-۱\,,۱)$

۳) $m\in(-\sqrt{۲}\,,\sqrt{۲})-[-۱\,,۱]$ ۴) $m\in(-\infty\,,-\sqrt{۲})\cup(\sqrt{۲}\,,+\infty)$

۳۲۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x^۲-x)^۲+۲x^۲-۲x-۳=۰$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۰۶۱- اگر $x=\frac{۱}{۳}$ ، $x=-۱$ و $x=k$ جواب‌های معادلهٔ $۶x^۳-۵x^۲+ax+b=۰$ باشند، مقدار $\frac{ab}{k}$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) -۸ ۳) -۱۶ ۴) ۷

۲۰۶۲- حاصل‌ضرب جواب‌های منفی معادلهٔ $x^۳+x^۲-۵x-۶=۰$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۱۲ ۳) $\sqrt{۱۳}+۱$ ۴) $\sqrt{۱۳}-۱$

۲۰۶۳- معادلهٔ $x^۳+۲x^۲-mx-m-۱=۰$ سه جواب دارد. مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۴},+\infty)$ ۲) $(-\frac{۵}{۴},+\infty)$

۳) $(-\frac{۱}{۴},+\infty)$ ۴) $(-\frac{۵}{۴},+\infty)-\{-۱\}$

۲۰۶۴- معادلهٔ $x^۴-۵x^۲-۳=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۶۵- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^۴-۴x^۲-۱۲=۰$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۸ ۳) -۶ ۴) -۲

۲۰۶۶- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۴+(۲m-۱)x^۲-۲m=۰$ چهار عضو دارد. مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(-\infty,۰)-\{-\frac{۱}{۲}\}$ ۲) $(-\infty,۰)$

۳) $(-\infty,-\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-\infty,\frac{۱}{۲})-\{۰\}$

۲۰۶۷- به ازای کدام مقدارهای k مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۴-kx^۲+\frac{۳-۲k}{۴}=۰$ دو عضو دارد؟

۱) $k\geq\frac{۳}{۲}$ ۲) $k>\frac{۳}{۲}$

۳) $k>\frac{۳}{۲}$ یا $k=۱$ ۴) $k\geq\frac{۳}{۲}$ یا $k=۱$

۲۰۶۸- اگر معادلهٔ $x^۴-۲mx^۲+m^۲-۴=۰$ جواب نداشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>۲$ ۲) $۰<m<۲$

۳) $m<-۲$ ۴) $-۲<m<۰$

۲۰۶۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۰۷۰- معادلهٔ $(x^۲-۷x+۱۱)^۲=۳x^۲-۲۱x+۳۷$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

سؤال
۲۰۶۱
۲۰۶۲
۲۰۶۳
۲۰۶۴
۲۰۶۵
۲۰۶۶
۲۰۶۷
۲۰۶۸
۲۰۶۹
۲۰۷۰

درس پنجم: معادله‌های گویا

به معادلهٔ $A(x)=0$، که در آن $A(x)$ عبارتی گویا است، **معادلهٔ گویا** می‌گوییم.

مثال: معادله‌های $x^2-3x+2=0$، $\frac{x-1}{x+1}-1=0$ و $\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}=0$ معادله‌هایی گویا هستند.

تذکر اگر معادله‌ای به شکل $A(x)=B(x)$ باشد، که در آن $A(x)$ و $B(x)$ عبارت‌هایی گویا هستند، می‌توان آن را به‌صورت $A(x)-B(x)=0$ نوشت، که چون $A(x)-B(x)$ عبارتی گویا مانند $C(x)$ است، پس به معادلهٔ گویای $C(x)=0$ رسیده‌ایم.

روش حل معادله‌های گویا

برای حل کردن معادله‌ای گویا باید پس از ساده کردن آن به معادله‌ای به صورت $P(x)=0$ برسیم، که در آن $P(x)$ چندجمله‌ای است. برای ساده کردن معادلهٔ گویا می‌توان کارهای زیر را انجام داد.

۱) ضرب کردن دو طرف معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن

۲) طرفین - وسطین کردن و ساده کردن

۳) مخرج مشترک گرفتن و ساده کردن

مثال:

الف) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ضرب در } 2x(x-1)} 2(x-1)+2x=x(x-1) \Rightarrow x^2-5x+2=0$

ب) $\frac{1}{2x^3-3x+1}=\frac{2}{4x^3-5x+1} \xrightarrow[\text{کردن}]{\text{طرفین - وسطین}} 4x^3-5x+1=2(2x^3-3x+1)$

$4x^3-5x+1=4x^3-6x+2 \Rightarrow x-1=0$

پ) $\frac{2x^3}{x^5-1}=\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک گرفتن}} \frac{2x^3}{x^5-1}=\frac{x^2+1+x^2-1}{x^4-1} \Rightarrow \frac{2x^3}{x^5-1}=\frac{2x^2}{x^4-1}$

$\xrightarrow[\text{کردن}]{\text{طرفین - وسطین}} 2x^3(x^4-1)=(x^5-1)(2x^2) \Rightarrow 2x^7-2x^3=2x^7-2x^2 \Rightarrow 2x^2(x-1)=0$

نکته

جواب‌های به‌دست آمده از حل کردن معادله‌ای گویا در صورتی قابل قبول هستند که مخرج هیچ یک از کسرهای موجود در معادله را صفر نکنند. برای مشخص کردن جواب‌های قابل قبول، می‌توانیم به جای قرار دادن جواب‌ها در مخرج کسرها، از ابتدا دامنهٔ عبارت گویا را مشخص کنیم و جواب‌هایی را که در دامنه نیستند حذف کنیم.

تست ۱ معادلهٔ $\frac{x+2}{x^2+2x-15}=\frac{x-7}{x^2-2x-3}$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

راه‌حل معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$(x-7)(x^2+2x-15)=(x^2-2x-3)(x+2) \Rightarrow x^3-5x^2-29x+105=x^3-7x-6$

$5x^2+22x-111=0 \Rightarrow x=3 \,,\, x=-7/4$

البته، چون مخرج کسرها به‌ازای $x=3$ صفر است، پس فقط جواب $x=-7/4$ قابل قبول است. بنابراین معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

تست ۲ معادلهٔ $\frac{۲}{۲x-۱}-\frac{x}{۵(x+۲)}=\frac{۲}{(۲x-۱)(x+۲)}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرهای دو طرف که برابر $۵(۲x-۱)(x+۲)$ است ضرب می‌کنیم:

$$۲\times۵-x(۲x-۱)=۲(۵(x+۲))\Rightarrow ۱۰-۲x^۲+x=۱۰x+۲۰\Rightarrow ۲x^۲+۹x+۱۰=۰\Rightarrow x=-۲\,,\ x=-\frac{۵}{۲}$$

چون مخرج دوتا از کسرها به ازای $x=-۲$ صفر است، پس فقط جواب $x=-\frac{۵}{۲}$ قابل قبول است.

تست ۳ اگر مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۲}{x-۲}+\frac{a}{x+۲}=۱$ برابر ۶ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

راه‌حل معادلهٔ داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{۲x+۴+ax-۲a}{x^۲-۴}=۱\Rightarrow x^۲-۴=(a+۲)x+۴-۲a\Rightarrow x^۲-(a+۲)x+۲a-۸=۰$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ داده شده ۶ است، پس $a+۲=۶$، یعنی $a=۴$. توجه کنید که در این صورت معادله دو جواب $x=۰$ و $x=۶$ را دارد، که هر دو قابل‌قبول هستند.

تست ۴ معادلهٔ $\frac{x}{x-۱}+\frac{a}{x+۱}=\frac{۲x^۲}{x^۲-۱}$ جواب ندارد. a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل دو طرف معادله را در $x^۲-۱$ ضرب می‌کنیم و معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x(x+۱)+a(x-۱)=۲x^۲\Rightarrow x^۲-(a+۱)x+a=۰\Rightarrow(x-۱)(x-a)=۰$$

پس $x=۱$ و $x=a$ جواب‌های معادلهٔ بالا هستند که $x=۱$ قابل قبول نیست و فقط $x=a$ می‌تواند جواب معادلهٔ اصلی باشد. اگر $a=۱$ یا $a=-۱$، آن‌گاه جواب $x=a$ هم قابل قبول نیست، زیرا باعث صفر شدن مخرج دوتا از کسرهای موجود در معادله می‌شود. بنابراین به ازای دو مقدار $a=۱$ و $a=-۱$ معادله جواب ندارد.

نکته

برخی معادله‌های گویا را می‌توان به کمک تغییر متغیر حل کرد.

تست ۵ مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $(x+\frac{۱}{x})^۲-۳(x+\frac{۱}{x})+۲=۰$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر فرض کنیم $x+\frac{۱}{x}=t$، آن‌گاه معادلهٔ مورد نظر می‌شود $t^۲-۳t+۲=۰$، پس

$$t=۲\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۲\Rightarrow x^۲-۲x+۱\Rightarrow(x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱\,,\quad t=۱\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۱\Rightarrow x^۲-x+۱=۰\,(\Delta<۰)\,,$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر $\{۱\}$ است، که یک عضو دارد.

تست ۶ معادلهٔ $۴(x^۲+\frac{۱}{x^۲})-۸(x-\frac{۱}{x})=۵$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که $x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x-\frac{۱}{x})^۲+۲$. بنابراین معادلهٔ داده شده را می‌توان این‌طور نوشت

$$۴((x-\frac{۱}{x})^۲+۲)-۸(x-\frac{۱}{x})=۵\Rightarrow ۴(x-\frac{۱}{x})^۲-۸(x-\frac{۱}{x})+۳=۰$$

اگر فرض کنیم $x-\frac{۱}{x}=t$، این معادله می‌شود $۴t^۲-۸t+۳=۰$ که جواب‌های آن $t=\frac{۱}{۲}$ و $t=\frac{۳}{۲}$ هستند. به این ترتیب.

$$x-\frac{۱}{x}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۲}x-۱=۰\Rightarrow x=۲, x=-\frac{۱}{۲} \quad , \quad x-\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x^۲-\frac{۱}{۲}x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱۷}}{۴}$$

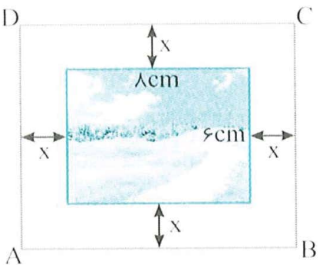
پس معادله چهار جواب دارد.

مدل‌سازی

مدل‌سازی برخی مسائل کاربردی به حل و بحث معادله‌ای گویا منجر می‌شود. توجه کنید که جواب‌های به‌دست آمده، باید با شرایط مسئله مطابقت داشته باشند.

تست ۷

مطابق شکل تصویری ۸×۶ در قاب ABCD قرار گرفته است. اگر نسبت مساحت تصویر به مساحت قاب برابر $\frac{۲}{۵}$ باشد، مقدار x کدام است؟



۱) $۱/۵cm$ ۲) $۲cm$
۳) $۴cm$ ۴) $۲/۵cm$

راه‌حل ابعاد قاب برحسب x برابر با $۸+۲x$ و $۶+۲x$ هستند. در نتیجه مساحت قاب برابر است با $(۸+۲x)(۶+۲x)$. بنابراین باید معادلهٔ $\frac{۲}{۵}=\frac{۴۸}{(۶+۲x)(۸+۲x)}$ را حل کنیم:

$$(۶+۲x)(۸+۲x)=۱۲۰\Rightarrow ۴x^۲+۲۸x+۴۸=۱۲۰\Rightarrow x^۲+۷x-۱۸=۰\Rightarrow x=-۹, x=۲$$

فقط جواب $x=۲cm$ قابل قبول است.

تست ۸

کارگری یک کار را در x ساعت تمام می‌کند. کارگر دیگری همان کار را در $۲x-۲$ ساعت تمام می‌کند. اگر این دو کارگر با هم کار کنند، این کار در $\frac{۳x}{۵}$ ساعت تمام می‌شود. مقدار x کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۳/۵$ ۳) ۴ ۴) $۴/۵$

راه‌حل کارگر اول در یک ساعت $\frac{۱}{x}$ و کارگر دوم در یک ساعت $\frac{۱}{۲x-۲}$ از کار را انجام می‌دهد. پس دو کارگر باهم در یک ساعت $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x-۲}$ از کار را انجام می‌دهند. از طرف دیگر طبق فرض مسئله دو کارگر باهم در یک ساعت $\frac{۱}{\frac{۳x}{۵}}$ از کار را انجام می‌دهند. بنابراین $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x-۲}=\frac{۵}{۳x}$. طرفین معادله را در $۶x(x-۱)$ ضرب می‌کنیم

$$۶(x-۱)+۳x=۱۰(x-۱)\Rightarrow x=۴$$

تست ۹

فاصلهٔ دو شهر A و B برابر ۴۵۰ کیلومتر است. اتومبیلی از شهر A به شهر B می‌رود و برمی‌گردد. سرعت رفت پنج کیلومتر بر ساعت کمتر از سرعت برگشت است و زمان رفت یک ساعت بیشتر از زمان برگشت است. سرعت رفت چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

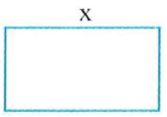
راه‌حل فرض کنید زمان و سرعت رفت به‌ترتیب برابر t و v باشند. در این صورت زمان و سرعت برگشت به‌ترتیب برابر $t-۱$ و $v+۵$ خواهد بود. چون فاصلهٔ دو شهر برابر ۴۵۰ کیلومتر است. پس تساوی‌های $۴۵۰=vt$ و $۴۵۰=(v+۵)(t-۱)$ برقرارند. بنابراین در تساوی دوم قرار می‌دهیم $t=\frac{۴۵۰}{v}$ و مقدار v را به‌دست می‌آوریم:

$$۴۵۰=(v+۵)(\frac{۴۵۰}{v}-۱)\Rightarrow ۴۵۰=۴۵۰-v+\frac{۲۲۵۰}{v}-۵\Rightarrow v^۲+۵v-۲۲۵۰=۰\Rightarrow (v+۵۰)(v-۴۵)=۰\Rightarrow v=۴۵\,km/h$$

نکته — مستطیل طلایی

۳۱۰

مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر نسبت طول به عرض آن باشد. این نسبت برابر $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ است.



$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

تست ۱۰

محیط یک مستطیل طلایی برابر $۲\sqrt{۵}+۶$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}+۲$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۵}+۴$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

راه‌حل

نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ است. اگر طول این مستطیل برابر x و عرض آن برابر y باشد، آن‌گاه

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\Rightarrow x=(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})y$$

از طرف دیگر، $۲(x+y)=۲\sqrt{۵}+۶\Rightarrow ۲((\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})y+y)=۲\sqrt{۵}+۶\Rightarrow(\sqrt{۵}+۳)y=۲\sqrt{۵}+۶\Rightarrow y=۲\ ,\ x=\sqrt{۵}+۱$

بنابراین مساحت این مستطیل برابر است با $S=xy=(\sqrt{۵}+۱)۲=۲\sqrt{۵}+۲$.

دست‌گرمی

۳۲۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۲x}{x-۱}-\frac{x}{x+۱}=۰$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۳ ۳) صفر ۴) -۲

۳۲۵- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{x+۳}{x-۳}+\frac{x-۳}{x+۳}=\frac{۱۰}{۳}$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۲۴ ۳) -۳۶ ۴) -۴۸

۳۲۶- اگر مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱}{x-a}+\frac{۲}{x+۳}=۴$ برابر $-\frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۲۷- معادلهٔ $\frac{۱}{x}+\frac{۳}{x+a}=۲$ جواب دارد. مجموعهٔ مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[۰,-\infty)$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) $\mathbb{R}-\{۰\}$

۳۲۸- معادلهٔ $\frac{۱۵}{x^۲+x+۱}=۲(x^۲+x)+۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x+\frac{۱}{x})^۲=۴+\frac{۳}{۲}(x-\frac{۱}{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۳۳۰- دو عدد وجود دارد که مجموع معکوس هر کدام از آن‌ها با معکوس مربعش برابر ۴ است. حاصل‌ضرب این دو عدد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

۳۳۱- اگر دو ماشین با هم کار کنند، در ۶ ساعت کاری را انجام می‌دهند. اگر سرعت کار یکی از آن‌ها سه برابر دیگری باشد، ماشین کندتر به تنهایی در چند ساعت کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

آزمون ۲۰۸ معادله‌های گویا (۱)

سؤال	گام
۲۰۷۱	۳۰۶
۲۰۷۲	۲۹۶ ۳۰۶
۲۰۷۳	۳۰۶ ۳۰۷
۲۰۷۴	۳۰۶ ۳۰۷
۲۰۷۵	۲۹۶ ۳۰۶
۲۰۷۶	۲۹۴ ۳۰۶ ۳۰۷
۲۰۷۷	۳۰۶ ۳۰۷ ۳۰۸
۲۰۷۸	۳۰۶ ۳۰۹
۲۰۷۹	۳۰۶ ۳۰۹
۲۰۸۰	۳۰۶ ۳۱۰

۲۰۷۱- جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $\frac{۲}{x^۲+۱}=\frac{۱}{x+۱}$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۲}$ ۲) $۱-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $۲+\sqrt{۲}$

۲۰۷۲- معادلهٔ $\frac{x}{x^۴-x^۲-۲x+۱}-\frac{۱}{x^۳-۱}=۰$ دو جواب دارد. حاصل‌ضرب این جواب‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۲۰۷۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۲}{x+۱}=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) -۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۰۷۴- اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱}{x-a}+\frac{۴}{x-۲}=۱$ برابر ۵ باشد، جواب دیگر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) جواب دیگری ندارد.

۲۰۷۵- اگر حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{۲}{x+۳}+\frac{۱}{x-a}=۴$ برابر $\frac{۷}{۴}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) -۲

۲۰۷۶- به ازای چند مقدار طبیعی از a معادلهٔ $\frac{۱}{x+۱}-\frac{۲}{x^۲-۱}=a$ جواب ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۷۷- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{۲x+۱}{x}+\frac{-۶x}{۲x+۱}=۵$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

۲۰۷۸- کوچک‌ترین عددی که مجموع آن با معکوسش برابر ۴ است، کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $۳-\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) $۳+\sqrt{۳}$

۲۰۷۹- یک قطار مسیر ۲۰۰ کیلومتری شهر A به شهر B و بالعکس را با سرعت ثابت طی می‌کند. اگر سرعت رفت ۵ کیلومتر بر ساعت از سرعت برگشت بیشتر باشد و زمان رفت $\frac{۴}{۹}$ ساعت کمتر از زمان برگشت باشد، زمان رفت چند ساعت است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۰۸۰- نسبت محیط به مساحت یک مستطیل طلایی برابر $۳-\sqrt{۵}$ است. اندازهٔ ضلع بزرگ‌تر مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۷+۳\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۷+۳\sqrt{۵}}{۴}$ ۳) $\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$

آزمون ۲۰۹ — معادله‌های گویا (۲)

۲۰۸۱- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $\frac{x-1}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=0$ باشند، مقدار x_1+x_2 کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۰۸۲- معادلهٔ $\frac{x-12}{x^2+3x}-\frac{2}{x}=\frac{5}{x+3}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۸۳- اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x-2}=1$ برابر ۶ باشد، جواب دیگر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۸۴- معادلهٔ $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{a(x+1)}{(a+1)(x-1)}$ یک جواب دارد. مجموعهٔ مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,-1\}$

۲۰۸۵- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{5}{x^2+3x-4}-\frac{3}{x^2+5x+4}=k$ برابر -4 است. مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $-\frac{3}{5}$

۲۰۸۶- معادلهٔ $(x+\frac{2}{x})^4-9(x+\frac{2}{x})^2-10=0$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۰۸۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{21}{x^2+4x+10}-x^2-4x=6$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۲۰۸۸- مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن نسبت اندازهٔ ضلع‌های زاویهٔ قائمه برابر $\frac{3}{4}$ و مجموع معکوس اندازهٔ سه ضلع آن برابر $\frac{47}{30}$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۰۸۹- هزینهٔ یک سفر تفریحی یک روزه برای کلاسی ۷۰۰ هزار تومان است. مدرسه برای کاهش هزینه‌ها، پنج نفر از دانش‌آموزان کلاس دیگر را هم به اردو می‌برد و هزینهٔ سرانه به میزان ۷ هزار تومان کاهش می‌یابد. تعداد افراد کلاس چند نفر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۲۰۹۰- صد کیلوگرم محلول آب و شکر با غلظت ۲۰٪ موجود است. اگر نیمی از آب آن را تبخیر کنیم، چند کیلوگرم شکر باید اضافه کنیم تا غلظت آن ۴۰٪ گردد؟

۱) $\frac{20}{3}$ ۲) $\frac{10}{3}$

۳) ۸ ۴) این کار ممکن نیست.

سؤال
۲۰۸۱
۲۰۸۲
۲۰۸۳
۲۰۸۴
۲۰۸۵
۲۰۸۶
۲۰۸۷
۲۰۸۸
۲۰۸۹
۲۰۹۰

درس ششم: تعیین علامت و نامعادله

تعیین علامت عبارتی مانند $A(x)$ یعنی اینکه مشخص کنیم این عبارت به ازای چه مقادیری از x منفی، به ازای چه مقادیری از x برابر صفر و به ازای چه مقادیری از x مثبت است.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ اول

برای تعیین علامت مقدار y که از رابطهٔ $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ به‌دست می‌آید، ابتدا جواب معادلهٔ $ax+b=0$ را پیدا می‌کنیم، که $-\frac{b}{a}$ است. سپس جدول مقابل را تشکیل می‌دهیم.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$y=ax+b$	علامت y مخالف علامت a		0	علامت y موافق علامت a	

تست ۱ جدول تعیین علامت عبارت $y=a^2(-2-x)-2-x$ به کدام شکل است؟

۱)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	

۲)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	

۳)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	

۴)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	

راه‌حل عبارت را به شکل $(-x-2)(a^2+1)=(-x-2)+(a^2+1)(-x-2)=y=a^2(-x-2)$ می‌نویسیم. چون a^2+1 عددی مثبت است، کافی است عبارت $-x-2$ را تعیین علامت کنیم که به شکل مقابل تعیین علامت می‌شود:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$-x-2$		$+$	0	$-$	

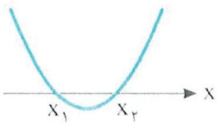
تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم

چندجمله‌ای درجهٔ دوم ax^2+bx+c را در نظر بگیرید $(a\neq 0)$. هنگام تعیین علامت این چندجمله‌ای سه حالت ممکن است پیش بیاید. فرض کنید $\Delta=b^2-4ac$.

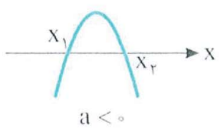
حالت اول $\Delta>0$. در این حالت معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دو جواب دارد. این جواب‌ها را x_1 و x_2 بنامید و فرض کنید $x_1<x_2$. در این صورت جدول تعیین علامت ax^2+bx+c به شکل زیر است:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a		0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

از روی شکل‌های زیر هم که سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ را نشان می‌دهند، می‌توان به نتیجه‌های این جدول پی‌برد.



$a>0$

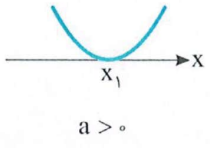


$a<0$

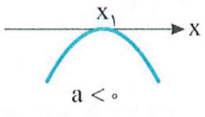
حالت دوم $\Delta=0$. در این حالت معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ یک جواب (ریشهٔ مضاعف) دارد. این جواب را x_1 بنامید. در این صورت جدول تعیین علامت ax^2+bx+c به شکل زیر است:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a		0	موافق علامت a	

از روی شکل‌های زیر هم که سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+b+c$ را نشان می‌دهند، می‌توان به نتیجه‌های این جدول پی‌برد.



$a>۰$



$a<۰$

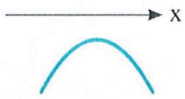
حالت سوم $\Delta<۰$. در این صورت معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ جواب حقیقی ندارد. جدول تعیین علامت $ax^۲+bx+c$ به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a		

از روی شکل‌های زیر هم که سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را نشان می‌دهند، می‌توان به نتیجه‌های این جدول پی‌برد.



$a>۰$



$a<۰$

تست ۲ **جدول تعیین علامت عبارت $y=۲x^۲-\sqrt{۳۲}x+۴$ کدام است؟**

۱)

x	$-\infty$		$+\infty$
y		− ۰ −	

۲)

x	$-\infty$		$+\infty$
y		+ ۰ +	

۳)

x	$-\infty$				$+\infty$
y		+	۰	− ۰	+

۴)

x	$-\infty$		$+\infty$
y		+	

راه‌حل چون $\Delta=(-\sqrt{۳۲})^۲-۴\times۲\times۴=۰$ و ضریب $x^۲$ برابر ۲ و عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت عبارت به شکل مقابل است:

x	$-\infty$		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
y		+	۰	+	

تست ۳ **جدول تعیین علامت عبارت $y=(m-۲)x^۲+mnx+m$ به شکل زیر است. مقدار mn کدام است؟**

x	$-\infty$		۴		$+\infty$
y		+	۰	−	

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) ۲ ۴) -۲

راه‌حل چون عبارت یک ریشه دارد و در دو طرف ریشه علامت عبارت متفاوت است، پس این عبارت باید از درجهٔ اول باشد. یعنی ضریب $x^۲$ باید صفر باشد:

$m-۲=۰\Rightarrow m=۲$

بنابراین عبارت به‌صورت $y=۲nx+۲$ است. چون $x=۴$ ریشهٔ عبارت است، پس

$۰=۲n\times۴+۲\Rightarrow n=\frac{-۱}{۴}$

بنابراین $mn=\frac{-۱}{۲}$.

تست ۴ **جدول تعیین علامت عبارت $y=(m+۱)x^۲-(m+۱)^۲x+n$ به شکل زیر است. مقدار n کدام است؟**

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	

۱) ۶ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) صفر

راه‌حل با توجه به جدول، $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌های عبارت هستند: $x=۲\Rightarrow ۴(m+۱)-۲(m+۱)^۲+n=۰$ ، $x=۱\Rightarrow m+۱-(m+۱)^۲+n=۰$ (*)

دو طرف تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم. بنابراین

$$(m+۱)^۲-۳(m+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}m+۱=۰\Rightarrow m=-۱\\ m+۱=۳\Rightarrow m=۲\end{cases}$$

به ازای $m=-۱$ نتیجه می‌شود $y=n$ که علامت y ثابت خواهد بود و به ازای $m=۲$ از معادلهٔ (*) به‌دست می‌آید $۳-۹+n=۰\Rightarrow n=۶$

تست ۵ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^۲+bx-۱}$ بازهٔ $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$ است. مقدار b کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\{x\in\mathbb{R}|ax^۲+bx-۱\geq ۰\}$. از طرف دیگر، چون دامنهٔ تابع f بازهٔ $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$ است، پس جدول تعیین علامت عبارت $ax^۲+bx-۱$ به‌صورت روبه‌رو است. بنابراین عبارت $ax^۲+bx-۱$ عبارتی درجهٔ دوم نیست، چون جدول تعیین علامت هیچ عبارت درجهٔ دومی به‌صورت بالا نیست. بنابراین $a=۰$. اکنون توجه کنید که $-\frac{۱}{۲}$ جواب معادلهٔ $bx-۱=۰$ است، پس $b(-\frac{۱}{۲})-۱=۰$، یعنی $b=-۲$. توجه کنید که در این صورت $f(x)=\sqrt{-۲x-۱}$، و واضح است که $D_f=(-\infty,-\frac{۱}{۲}]$.

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$ax^۲+bx-۱$		$+$	۰	$-$	

نکته ۳۱۳

عبارت $ax^۲+bx+c$ را در نظر بگیرید.

- اگر $\Delta<۰$ و $a>۰$، عبارت همواره مثبت است.
- اگر $\Delta<۰$ و $a<۰$، عبارت همواره منفی است.
- اگر $\Delta\leq ۰$ و $a>۰$، عبارت همواره نامنفی است.
- اگر $\Delta\leq ۰$ و $a<۰$، عبارت همواره نامثبت است.

تست ۶ اگر مقدار عبارت $y=۲x^۲-۴x+۲m-۳$ به‌ازای هر مقدار x نامنفی باشد، کدام‌یک درست است؟

۱) حداقل مقدار m برابر $\frac{۳}{۲}$ است.
۲) حداکثر مقدار m برابر $\frac{۳}{۲}$ است.
۳) حداقل مقدار m برابر $\frac{۵}{۲}$ است.
۴) حداکثر مقدار m برابر $\frac{۵}{۲}$ است.

راه‌حل باید $\Delta\leq ۰$ و $a>۰$، چون $a=۲$، پس

$$\Delta=(-۴)^۲-۴(۲)(۲m-۳)\leq ۰\Rightarrow ۲m-۳\geq ۲\Rightarrow m\geq\frac{۵}{۲}$$

یعنی حداقل مقدار m برابر $\frac{۵}{۲}$ است.

نکته ۳۱۴

برای تعیین علامت عبارت‌هایی که از ضرب و تقسیم چند عبارت تشکیل شده‌اند، ابتدا هر یک از آن‌ها را تعیین علامت می‌کنیم و در آخر علامت عبارت مورد نظر را تعیین می‌کنیم.

علامت حاصل‌ضرب دو عبارت جبری هم‌علامت، مثبت و علامت حاصل‌ضرب دو عبارت جبری مختلف‌العلامت، منفی است. در مورد تقسیم دو عبارت جبری هم این مطلب درست است. همچنین، اگر حداقل یکی از دو عبارت برابر صفر گردد، حاصل‌ضرب آن‌ها صفر است و در تقسیم عبارت‌ها، اگر مخرج صفر باشد، عبارت تعریف‌نشده می‌شود.

تست ۷ عبارت $y=-x^۴+۴x^۲+۵$ در بازهٔ (a,b) مثبت است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

راه‌حل عبارت را به شکل $y=-x^۴+۴x^۲+۵=-(x^۲+۱)(x^۲-۵)$ می‌نویسیم. چون عبارت $-(x^۲+۱)$ همواره منفی است. کافی است عبارت $x^۲-۵$ را تعیین علامت کرده و علامت آن را قرینه کنیم تا علامت y به‌دست آید. بنابراین عبارت y در بازهٔ $(-\sqrt{۵},\sqrt{۵})$ مثبت است. پس کمترین مقدار a برابر $-\sqrt{۵}$ و بیشترین مقدار b برابر $\sqrt{۵}$ است. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $۲\sqrt{۵}$ است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{۵}$		$\sqrt{۵}$		$+\infty$
$x^۲-۵$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

۳۱۵ **نکته** علامت عبارت‌های توانی

اگر A یک چندجمله‌ای و n عددی طبیعی باشد، علامت عبارت A^n در دو حالت زیر تعیین می‌شود:

- اگر n فرد باشد، A^n مانند A تعیین علامت می‌شود.
- اگر n زوج باشد، ریشه‌های A^n همان ریشه‌های A است و علامت A^n در بقیهٔ نقاط مثبت است.

تست ۸ عبارت $y=\frac{(x-2)^3(x-1)^2}{(x+1)^4(3-x)^5}$ در بازهٔ (a,b) مثبت است. مقدار $a+b$ کدام است؟ ($b-a$ حداکثر مقدار ممکن است.)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل چون عبارت $(x-1)^2$ برای هر $x\neq 1$ مثبت است و عبارت $(x+1)^4$ برای هر $x\neq -1$ مثبت است، پس این دو عبارت را در جدول تعیین علامت نمی‌نویسیم. بنابراین جدول تعیین علامت عبارت مورد نظر به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
$(x-2)^3$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$(3-x)^5$		$+$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$	
y		$-$	ت ن	$-$	۰	$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	

بنابراین عبارت مورد نظر در بازهٔ $(2,3)$ مثبت است، پس $a=2$ و $b=3$ و در نتیجه $a+b=5$.

۳۱۶ **روش سریع‌تر برای تعیین علامت عبارت‌ها**

برای تعیین علامت یک عبارت، ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج عبارت را پیدا کرده و در جدول قرار می‌دهیم. سپس علامت ستون سمت راست جدول (یا هر ستون دیگر) را به کمک عددگذاری تعیین می‌کنیم. اکنون علامت عبارت را در ریشه‌ها تغییر می‌دهیم. توجه کنید که علامت عبارت در ریشه‌های عبارت‌هایی که به صورت A^{2k} یا $|A|$ باشند، تغییر نمی‌کند و علامت عبارت در دو طرف این ریشه‌ها یکسان است. در حقیقت، ریشه‌های عبارت‌هایی به‌صورت A^{2k} و $|A|$ را در جدول قرار می‌دهیم ولی از تعیین علامت آن‌ها صرف‌نظر می‌کنیم.

مثال: عبارت $y=\frac{|x-2|(x^2-1)}{-(x^2-5x+4)^3(x+2)^4}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

ریشه‌های صورت و مخرج کسر $x=2$، $x=1$، $x=-1$، $x=4$ و $x=-2$ هستند. همچنین عبارت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y=\frac{|x-2|(x-1)(x+1)}{-(x-1)^3(x-4)^3(x+2)^4}=\frac{|x-2|(x+1)}{-(x-1)^2(x-4)^3(x+2)^4}$$

به ازای $x=5$ مقدار عبارت مورد نظر منفی است، پس جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		4		$+\infty$
y		$-$	ت ن	$-$	۰	$+$	ت ن	$+$	۰	$+$	ت ن	$-$	

توجه کنید که در دو طرف عددهای ۲، ۱ و -2، علامت عبارت یکسان است، زیرا این عددها ریشهٔ عبارت‌های دارای قدرمطلق یا توان زوج هستند.

نامعادله

منظورمان از **نامعادله** یکی از عبارت‌های زیر است که در آن‌ها A و B عبارت‌هایی جبری‌اند:

$$A<B,\quad A\leq B,\quad A>B,\quad A\geq B$$

همچنین، منظورمان از حل کردن نامعادله پیدا کردن مقادیری است که به ازای آن‌ها نابرابری داده شده درست است.

نکته ۳۱۷ **ویژگی‌های نابرابری‌ها**

فرض کنید A ، B و C عبارت‌هایی جبری باشند.

۱) اگر $A<B$ ، آن‌گاه $A+C<B+C$. اگر $A\leq B$ ، آن‌گاه $A+C\leq B+C$.

۲) اگر $A<B$ و $C>0$ ، آن‌گاه $AC<BC$. اگر $A\leq B$ و $C\geq 0$ ، آن‌گاه $AC\leq BC$.

۳) اگر $A<B$ و $C<0$ ، آن‌گاه $AC>BC$. اگر $A\leq B$ و $C\leq 0$ ، آن‌گاه $AC\geq BC$.

نکته ۳۱۸

- برای حل نامعادله‌ها می‌توانیم از تعیین علامت استفاده کنیم. کافی است تمام عبارت‌های جبری را به یک طرف نامعادله ببریم، سپس عبارت به‌دست آمده را تعیین علامت کنیم.
- برای حل نامعادله‌های دوگانه و دستگاه نامعادلات می‌توانیم هر یک از نامعادله‌ها را جداگانه حل کنیم و سپس اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را پیدا کنیم.

تست ۹ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2\leq 5x-4$ بازهٔ $[a\,.\,b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل نامعادله را به صورت $x^2-5x+4\leq 0$ می‌نویسیم. اکنون عبارت x^2-5x+4 را تعیین علامت می‌کنیم و بازه‌ای را که در آن مقدار این عبارت نامثبت است، به عنوان مجموعهٔ جواب‌های نامعادله در نظر می‌گیریم.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، بازهٔ $[1\,.\,4]$ است. پس $a=1$ و $b=4$ و در نتیجه $b-a=3$.

تست ۱۰ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $0<x^2-3x<4$ به صورت $(a\,.\,a+5)-[b-3\,.\,b]$ است. مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -3 ۲) ۳ ۳) -4 ۴) ۴

راه‌حل نامعادلات $x^2-3x<4$ و $x^2-3x>0$ را حل می‌کنیم و بین مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

(۱) $x^2-3x<4\Rightarrow x^2-3x-4<0\Rightarrow (x+1)(x-4)<0\Rightarrow -1<x<4$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
x^2-3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

(۲) $x^2-3x>0\Rightarrow x(x-3)>0\Rightarrow x>3$ یا $x<0$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

پس از اشتراک‌گیری (۱) و (۲) مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به صورت $[0\,.\,3)-(-1\,.\,4)$ می‌شود. پس $a=-1$ و $b=3$. در نتیجه $a-b=-4$.

تست ۱۱ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\dfrac{(x^2-3x+2)(x^2+3x-4)^2}{|x-1|}<0$ بازهٔ $(a\,.\,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اول نامعادله به‌صورت $y=\dfrac{(x-1)^3(x-2)(x+4)^2}{|x-1|}<0$ است و ریشه‌های صورت و مخرج آن $x=1$ ، $x=2$ و $x=-4$ هستند. به‌ازای $x=3$ مقدار y مثبت است. پس جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-4		1		2		$+\infty$
y		$+$	0	$+$	ت ن	$-$	0	$+$	

واضح است که عبارت در بازهٔ $(1\,.\,2)$ منفی است. پس $a=1$ و $b=2$ و در نتیجه $a+b=3$.

راه‌حل دوم دو عبارت $(x^۲+۳x-۴)^۲$ و $|x-۱|$ همواره نامنفی هستند، بنابراین کافی است عبارت $(x^۲-۳x+۲)$ را تعیین علامت کنیم (توجه کنید مقادیری را نیز که به‌ازای آن‌ها دو عبارت $(x^۲+۳x-۴)^۲$ و $|x-۱|$ صفر می‌شوند، در نظر می‌گیریم.)

$$x^۲-۳x+۲=(x-۲)(x-۱)=۰\Rightarrow x=۲, x=۱\ ,\quad |x-۱|=۰\Rightarrow x=۱\ ,\quad (x^۲+۳x-۴)^۲=((x-۱)(x+۴))^۲=۰\Rightarrow x=۱, x=-۴$$

x	$-\infty$		-۴		۱		۲		$+\infty$
y		$+$	۰	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	

واضح است که عبارت در بازهٔ $(۱, ۲)$ منفی است، پس $a=۱$ و $b=۲$ و در نتیجه $a+b=۳$.

تست ۱۲ **مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x-\frac{۱}{x-۱}>۵$ به صورت $(a, ۱)\cup(b, +\infty)$ است. مقدار ab کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل نامعادله را به شکل مقابل می‌نویسیم:

$$x-۵-\frac{۱}{x-۱}>۰\Rightarrow\frac{(x-۵)(x-۱)-۱}{x-۱}>۰\Rightarrow\frac{x^۲-۶x+۴}{x-۱}>۰$$

تعیین علامت عبارت $y=\frac{x^۲-۶x+۴}{x-۱}$ به شکل مقابل است:

x	$-\infty$		$۳-\sqrt{۵}$		۱		$۳+\sqrt{۵}$		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(۳-\sqrt{۵}, ۱)\cup(۳+\sqrt{۵}, +\infty)$ است. در نتیجه $a=۳-\sqrt{۵}$ و $b=۳+\sqrt{۵}$ و $ab=۴$.

تست ۱۳ **مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $-۱\le\frac{x}{x+۱}<۲$ به صورت $\mathbb{R}-[a, b)$ است. مقدار ab کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

راه‌حل اول باید نامعادله‌های $\frac{x}{x+۱}<۲$ و $-۱\le\frac{x}{x+۱}$ را حل کنیم. ابتدا نامعادلهٔ $\frac{x}{x+۱}<۲$ را به صورت $\frac{x}{x+۱}-۲<۰$ یا $\frac{-x-۲}{x+۱}<۰$ می‌نویسیم.

اکنون به کمک تعیین علامت، مجموعهٔ جواب‌های آن را مشخص می‌کنیم:

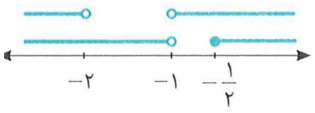
x	$-\infty$		-۲		-۱		$+\infty$
$\frac{-x-۲}{x+۱}$		$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	

مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله به صورت $(-\infty, -۲)\cup(-۱, +\infty)$ است. به همین ترتیب نامعادلهٔ $-۱\le\frac{x}{x+۱}$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+۱}+۱\ge۰\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x+۱}\ge۰$$

x	$-\infty$		-۱		$-\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$\frac{۲x+۱}{x+۱}$		$+$	ت ن	$-$	۰	$+$	

مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله نیز به صورت $(-\infty, -۱)\cup[-\frac{۱}{۲}, +\infty)$ است.



اشتراک دو مجموعهٔ جواب به‌دست آمده، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اولیه است.

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر به صورت $(-۲, -\frac{۱}{۲})=\mathbb{R}-[-۲, -\frac{۱}{۲}, +\infty)\cup(-\infty, -۲)$ است، پس

$a=-۲$ و $b=-\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $ab=۱$.

راه‌حل دوم نامعادله را به صورت $-۱\le\frac{x+۱-۱}{x+۱}<۲$ می‌نویسیم. بنابراین

$$-۱\le\frac{x+۱}{x+۱}-\frac{۱}{x+۱}<۲\Rightarrow-۱\le۱-\frac{۱}{x+۱}<۲\Rightarrow-۲\le-\frac{۱}{x+۱}<۱\Rightarrow-۱<\frac{۱}{x+۱}\le۲$$

اگر $\frac{۱}{x+۱}\le۲<۰$، آن‌گاه $x+۱\ge\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $x\ge-\frac{۱}{۲}$. اگر $-۱<\frac{۱}{x+۱}$، آن‌گاه $x+۱<-۱$ و در نتیجه $x<-۲$. اجتماع دو مجموعهٔ جواب‌های به‌دست آمده یعنی $\mathbb{R}-[-۲, -\frac{۱}{۲}]$، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر است.

دست‌گرمی

۳۳۲- جدول تعیین علامت عبارت $y=(a-b)x-۲a+۲b$ به شکل زیر است. اگر a عددی طبیعی باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

x	$-\infty$		b		$+\infty$
y		+	۰	−	

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۳۳۳- جدول تعیین علامت عبارت $y=(a-۲)x^۲-(a+b)x+۲a$ به شکل زیر است. مقدار $a-b$ کدام است؟

x	$-\infty$		۴		$+\infty$
y		+	۰	−	

۱) ۲ ۲) ۳
۳) -۲ ۴) -۳

۳۳۴- جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{(x^۲-۳x+۲)(x^۲-۱)}{(x-۲)^۳}$ کدام است؟

۱)
x	$-\infty$				$+\infty$
y		−	۰	−	ت ن +

۲)
x	$-\infty$						$+\infty$
y		−	۰	+	ت ن	+	

۳)
x	$-\infty$						$+\infty$
y		−	۰	+	۰	+	ت ن +

۴)
x	$-\infty$								$+\infty$
y		−	۰	+	ت ن	−	۰	+	

۳۳۵- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۴x-۱<۳x-۲<۵x+۶$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۳۶- اگر مقدار عبارت $y=(m-۱)x^۲+\sqrt{۸}x+m$ به ازای هر x مثبت باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>۲$ ۲) $-۱<m<۲$ ۳) $۱<m<۲$ ۴) $-۱<m<۱$

۳۳۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{(۱-x)^۲(x+۲)^۳}{x|x|(۲-x)^۵}\geq ۰$ کدام است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $(-\infty,-۲]\cup\{۱\}\cup(۲,+\infty)$
۳) $(-\infty,-۲)\cup[۱,۲)$ ۴) $(-\infty,-۲]\cup(۰,۲)$

۳۳۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x-\frac{۲}{x}\geq ۱$ به صورت $[a,+\infty)-[۰,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۲۱۰ تعیین علامت و نامعادله (۱)

۲۰۹۱- جدول تعیین علامت عبارت $y=x^3-3x^2+2x$ کدام است؟

۱)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-$	$+$ $-$ $+$	

۲)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+$	$-$ $+$ $-$	

۳)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+$	$-$ $+$	

۴)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-$	$-$ $+$	

۲۰۹۲- جدول تعیین علامت عبارت $y=(m^2-4)x^2+mnx+m$ به شکل زیر است. مقدار mn کدام است؟

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

۲۰۹۳- جدول تعیین علامت عبارت $y=(m+2)x^2-(m+2)^2x+n$ به شکل زیر است. مقدار n کدام است؟

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	0	$+$	

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۲۰۹۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوگانه $x^3<x<x^2$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-1)$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $\varnothing$ ۴) $(-\infty,1)$

۲۰۹۵- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x(x^2-4x-5)^2(1-x^2)>0$ به صورت $(-\infty,a)\cup(b,-a)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

۲۰۹۶- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x^3+1}{x^2-6x+8}\leq 0$ به صورت $(-\infty,a]\cup(a+3,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۹۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2(x^2-1)<2$ به صورت (a,b) است. مقدار ab کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) -2 ۳) $-2\sqrt{2}$ ۴) -4

۲۰۹۸- اگر معادلهٔ $x^2+(a-1)x+2a-6=0$ دو جواب مانند x_1 و x_2 داشته باشد که $x_1<-3<x_2$، حدود a کدام است؟

۱) $a>5$ ۲) $a>6$ ۳) $a<6$ ۴) $a<5$

۲۰۹۹- اگر مقدار عبارت $y=mx^2-2x+m$ همواره مثبت باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(-1,1)-\{0\}$ ۲) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

۳) $(1,+\infty)$ ۴) $(-1,+\infty)-\{0\}$

۲۱۰۰- اگر عبارت $y=mx^2-2mx+2$ به ازای هر مقدار x بزرگ‌تر از -6 باشد، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

سؤال
۲۰۹۱ ۲۰۹۲ ۲۰۹۳ ۲۰۹۴ ۲۰۹۵ ۲۰۹۶ ۲۰۹۷ ۲۰۹۸ ۲۰۹۹ ۲۱۰۰

آزمون ۲۱۱ تعیین علامت و نامعادله (۲)

سؤال	گام
۲۱۰۱	۲۷۸ ۳۱۲
۲۱۰۲	۳۱۱
۲۱۰۳	۳۱۸
۲۱۰۴	۲۷۶ ۳۱۶ ۳۱۸
۲۱۰۵	۳۱۶ ۳۱۸
۲۱۰۶	۳۱۱ ۳۱۸
۲۱۰۷	۳۱۶ ۳۱۸
۲۱۰۸	۳۱۳ ۳۲۷
۲۱۰۹	۳۱۲ ۳۱۳ ۳۱۸
۲۱۱۰	۳۱۲ ۳۱۳ ۳۱۸

۲۱۰۱- جدول تعیین علامت عبارت $y=x^۴-۳x^۲-۴$ به کدام شکل است؟

۱)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	+	۰ − ۰ +	

۲)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	+	۰ − ۰ − ۰ +	

۳)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	+	۰ − ۰ + ۰ − ۰ +	

۴)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	+	۰ + ۰	

۲۱۰۲- جدول تعیین علامت عبارت $y=m^۲x+|m|$، که در آن $m\neq ۰$، کدام است؟

۱)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	−	۰ +	

۲)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	+	۰ −	

۳)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	−	۰ + ۰ −	

۴)
x	$-\infty$		$+\infty$
y	+	۰ − ۰ +	

۲۱۰۳- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۳x^۲\leq x^۳-۴\leq ۳x^۲$ به صورت $[a\,.\,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۰۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(x^۲-۲x-۴)^۲\geq ۴(x^۲-۲)^۲$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۱۰۵- عبارت $y=\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲-۴}$ به ازای مقادیری از x که عضو مجموعهٔ $(a\,.\,b)-\{c\}$ باشند، منفی است. مقدار $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۲۱۰۶- اگر عبارت $ax-b$ فقط در بازهٔ $(۲\,.\,+\infty)$ مثبت باشد، عبارت $\frac{ax+b}{x-۲}$ در کدام بازه منفی است؟

۱) $(-\infty\,.\,-۲)\cup(۲\,.\,+\infty)$ ۲) $(-\infty\,.\,۲)$

۳) $(-۲\,.\,۲)$ ۴) $[۰\,.\,۲)$

۲۱۰۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x+۵<\frac{۹}{x+۳}$ به صورت $(a\,.\,-۳)\cup(b\,.\,+\infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

۲۱۰۸- مقدار عبارت $mx^۲-x+m$ به‌ازای هر مقدار x، منفی است. حدود m کدام است؟

۱) $m<۰$ ۲) $-\frac{۱}{۲}<m<\frac{۱}{۲}$

۳) $m>\frac{۱}{۲}$ یا $m<-\frac{۱}{۲}$ ۴) $m<-\frac{۱}{۲}$

۲۱۰۹- اگر عبارت $y=mx^۲-۲mx+۲$ به‌ازای هر مقدار x بزرگ‌تر از -۲ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $۰<m<۴$ ۲) $۰\leq m<۴$ ۳) $-۴<m\leq ۰$ ۴) $-۲<m\leq ۰$

۲۱۱۰- اگر به ازای هر x داشته باشیم $\frac{x^۲+mx+m}{x^۲-x+۱}\leq ۳$، حداقل مقدار ممکن m کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۱۴ ۳) -۱۵ ۴) -۱۶

درس هفتم: معادله‌های گنگ

به معادله‌هایی مانند $\sqrt{x}-1=0$ ، $\sqrt{x^2-1}=2x$ و $\frac{1}{\sqrt{x}}=2x-1$ که در آن‌ها عبارت‌هایی رادیکالی از مجهول آمده است، **معادله‌های گنگ** می‌گوییم.

روش حل کردن معادله‌های گنگ

۳۱۹

برای حل کردن معادله‌های گنگ، می‌توانیم با به توان رساندن دو طرف معادله (و در صورت لزوم تکرار این کار) به معادله‌ای گویا برسیم و آن را حل کنیم.

مثال:

الف) $\sqrt{x}=2-x \Rightarrow \sqrt{x}^2=(2-x)^2 \Rightarrow x=4-4x+x^2 \Rightarrow x^2-5x+4=0$

ب) $\sqrt{x-1}-x=3 \Rightarrow \sqrt{x-1}=3+x \Rightarrow \sqrt{x-1}^2=(3+x)^2 \Rightarrow x-1=9+6x+x^2 \Rightarrow x^2-5x+10=0$

پ) $\frac{x}{\sqrt{x-2}}=3 \Rightarrow (\frac{x}{\sqrt{x-2}})^2=9 \Rightarrow \frac{x^2}{x-2}=9$

۳۲۰

نکته

در معادلات گنگ جواب‌های به دست آمده را باید در معادلهٔ اصلی آزمایش کرد که مشخص شود آیا در معادلهٔ مورد نظر صدق می‌کنند یا خیر.

تست ۱ معادلهٔ $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل

دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم و معادلهٔ به‌دست آمده را حل می‌کنیم:

$$6-4x-x^2=(x+4)^2 \Rightarrow 6-4x-x^2=x^2+8x+16 \Rightarrow x^2+6x+5=0 \Rightarrow (x+1)(x+5)=0 \Rightarrow x=-1, x=-5$$

به ازای $x=-5$ سمت چپ معادلهٔ داده شده مثبت و سمت راست آن منفی است. پس فقط جواب $x=-1$ قبول است.

تست ۲ معادلهٔ $\sqrt{6-x}-\sqrt{10+3x}=2$ چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۳

راه‌حل

معادله را به صورت $\sqrt{6-x}-2=\sqrt{10+3x}$ می‌نویسیم. اکنون دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم

$$6-x+4-4\sqrt{6-x}=10+3x \Rightarrow 10-x-4\sqrt{6-x}=10+3x \Rightarrow 4x=-4\sqrt{6-x} \Rightarrow x=-\sqrt{6-x}$$

بازهم دو طرف را به توان دو می‌رسانیم

$$x^2=6-x \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=-3, x=2$$

با امتحان کردن جواب‌ها معلوم می‌شود فقط $x=-3$ قابل قبول است.

۳۲۱

نکته

ممکن است امتحان کردن جواب‌های معادلهٔ گنگ دشوار باشد. در این موارد می‌توانیم از شرایط موجود در معادله، محدودهٔ جواب‌های آن را مشخص کنیم.

تست ۳ معادلهٔ $x+\sqrt{x}=4$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل

معادله را به شکل $\sqrt{x}=4-x$ می‌نویسیم. توجه کنید که باید جواب‌های به‌دست آمده در شرط $0 \le x \le 4$ صدق کنند. زیرا عبارت زیر رادیکال نباید منفی شود و حاصل $\sqrt{x}$ یعنی $4-x$ نیز نمی‌تواند منفی باشد. اکنون دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x=16+x^2-8x \Rightarrow x^2-9x+16=0 \Rightarrow x=\frac{9-\sqrt{17}}{2}<4 \ , \ x=\frac{9+\sqrt{17}}{2}>4 \ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین فقط $x=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$ جواب معادله است.

تست ۴ معادلهٔ $\sqrt{۴-x^۲}+۵=x^۲$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل اگر x جواب معادلهٔ مورد نظر باشد، باید $\sqrt{۴-x^۲}$ معنی داشته باشد، پس $۴-x^۲\geq ۰$، یعنی $x^۲\leq ۴$. از طرف دیگر

$$\sqrt{۴-x^۲}+۵=x^۲\Rightarrow\sqrt{۴-x^۲}=x^۲-۵$$

در نتیجه، چون $\sqrt{۴-x^۲}\geq ۰$، پس $x^۲-۵\geq ۰$، یعنی $x^۲\geq ۵$، که با شرط $x^۲\leq ۴$ سازگار نیست. پس معادلهٔ مورد نظر جواب ندارد.

نکته

برخی معادله‌های گنگ را می‌توان به کمک تغییر متغیر حل کرد.

تست ۵ معادلهٔ $x+۱۲\sqrt{x}-۶۴=۰$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل ابتدا توجه کنید که باید $x\geq ۰$. اگر فرض کنیم $\sqrt{x}=t$، آن‌گاه $x=t^۲$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$t^۲+۱۲t-۶۴=۰\Rightarrow(t-۴)(t+۱۶)=۰$$

چون $t+۱۶\neq ۰$، پس $t-۴=۰$، یعنی $t=۴$. بنابراین $\sqrt{x}=۴$، پس $x=۱۶$.

تست ۶ مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۴x+۳=\sqrt{x^۲-۴x+۵}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

راه‌حل فرض می‌کنیم $x^۲-۴x+۳=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$t=\sqrt{t+۲}\,,\ t\geq ۰\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}t^۲=t+۲\Rightarrow t^۲-t-۲=۰\Rightarrow(t-۲)(t+۱)=۰\Rightarrow t=-۱\ (\text{غ.ق.ق.}),\quad t=۲$$

بنابراین

$$t=۲\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۲\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰$$

هر دو جواب این معادله جواب معادلهٔ اصلی نیز هستند، پس مجموع جواب‌های معادلهٔ اصلی برابر با ۴ است.

تست ۷ معادلهٔ $\sqrt{\frac{۴}{x-۲}+۱}=\frac{۱}{x-۲}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اگر فرض کنیم $\frac{۱}{x-۲}=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\sqrt{۴t+۱}=t\quad(t\geq ۰)$$

اگر دو طرف این معادله را به توان دو برسانیم به‌دست می‌آید

$$۴t+۱=t^۲\Rightarrow t^۲-۴t-۱=۰\Rightarrow t=۲+\sqrt{۵}\,,\ t=۲-\sqrt{۵}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین

$$\frac{۱}{x-۲}=۲+\sqrt{۵}\ \Rightarrow\ x=۲+\frac{۱}{\sqrt{۵}+۲}=۲+\frac{۱}{\sqrt{۵}+۲}\times\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}-۲}=۲+\frac{\sqrt{۵}-۲}{۵-۴}=\sqrt{۵}$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

تست ۸ از معادلهٔ $mx-۳\sqrt{x}+m-۲=۰$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود. مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۰,۲)\cup\{\frac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲}\}$ ۳) $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})$ ۴) $(\frac{۳}{۲},۲)\cup\{\frac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲}\}$

راه‌حل فرض می‌کنیم $\sqrt{x}=t\geq ۰$ و در نتیجه

$$mt^۲-۳t+(m-۲)=۰ \qquad (۱)$$

در سه حالت ممکن است برای x فقط یک جواب وجود داشته باشد.

حالت اول معادلهٔ (۱) یک ریشهٔ مضاعف مثبت داشته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta=۰\Rightarrow ۹-۴m(m-۲)=۰\Rightarrow ۴m^۲-۸m-۹=۰\Rightarrow m=\frac{۲\pm\sqrt{۱۳}}{۲}\\ -\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow\frac{۳}{۲m}>۰\Rightarrow m>۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap} m=\frac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲}$$

حالت دوم معادلهٔ (۱) دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد که در این حالت جواب منفی برای $\sqrt{x}$ قابل قبول نخواهد بود:

$$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\frac{m-۲}{m}<۰\Rightarrow ۰<m<۲$$

حالت سوم معادلهٔ (۱) درجه دوم نباشد، یعنی $m=۰$. در این صورت معادلهٔ (۱) به‌صورت $-۳t-۲=۰$ در می‌آید که جواب آن $t=-\frac{۲}{۳}$ است که قابل قبول نیست. پس در این مسئله این حالت اتفاق نمی‌افتد.

مدل‌سازی برخی مسائل کاربردی به حل و بحث معادله‌ای گنگ منجر می‌شود.

تست ۹ مجموع کدام عدد با جذرش برابر ۳ است؟

۱) $\frac{۷-\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۷+\sqrt{۱۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۴) $\frac{۵+\sqrt{۱۷}}{۲}$

راه‌حل این عدد را x فرض می‌کنیم. پس

$$x+\sqrt{x}=۳\Rightarrow ۳-x=\sqrt{x} \quad (۱)\Rightarrow ۹+x^۲-۶x=x\Rightarrow x^۲-۷x+۹=۰\Rightarrow x=\frac{۷-\sqrt{۱۳}}{۲},\quad x=\frac{۷+\sqrt{۱۳}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که از معادلهٔ (۱) نتیجه می شود x باید عضو بازهٔ $[۰,۳]$ باشد. بنابراین $x=\frac{۷-\sqrt{۱۳}}{۲}$.

دست‌گرمی

۳۳۹- جواب معادلهٔ $\sqrt{x-۱}=x-۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $۵-\sqrt{۵}$ ۴) $۵+\sqrt{۵}$

۳۴۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x+۳}+۱=۰$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۴۱- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۵x+۴-۵\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=۰$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) -۱۹ ۳) ۳۶ ۴) -۳۶

۳۴۲- چند عدد وجود دارد که اگر جذرش را از آن کم کنیم، برابر نصف آن شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

آزمون ۲۱۲ معادله‌های گنگ (۱)

سؤال	گام
۲۱۱۱	۳۱۹ ۳۲۰
۲۱۱۲	۳۱۹ ۳۲۱
۲۱۱۳	۳۱۹ ۳۲۰
۲۱۱۴	۳۱۹ ۳۲۰
۲۱۱۵	۳۱۹ ۳۲۱
۲۱۱۶	۳۱۹ ۳۲۰
۲۱۱۷	۳۲۰ ۳۲۲
۲۱۱۸	۳۲۱ ۳۲۲
۲۱۱۹	۳۱۹
۲۱۲۰	۳۱۹

۲۱۱۱- معادلهٔ $\sqrt[۴]{۲x+۱}=\sqrt{۲x-۱}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۱۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{۴-x^۲}=\frac{۱}{۲}x+۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۲}{۵}$ ۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

۲۱۱۳- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{۴-۳x-x^۲}=x+۴$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۱۱۴- معادلهٔ $\sqrt{x^۴+۲x-۵}=۱+x$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۱۵- جواب معادلهٔ $۲\sqrt{x}+\sqrt{۲x-۱}=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱\pm۴\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱-۴\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{۱۱\pm۲\sqrt{۶}}{۴}$ ۴) $\frac{۱۱-۴\sqrt{۶}}{۴}$

۲۱۱۶- اگر $x=۸$ جواب معادلهٔ $\sqrt{x-۴a}+\sqrt{x+a}=\sqrt{۳x+a}$ باشد، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۱۷- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x\sqrt[۳]{x}-۵\sqrt[۳]{x^۲}+۴=۰$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۲۱۱۸- جواب معادلهٔ $\frac{x}{\sqrt{x}+۱}+\frac{\sqrt{x}+۱}{x}=۲$ کدام است؟

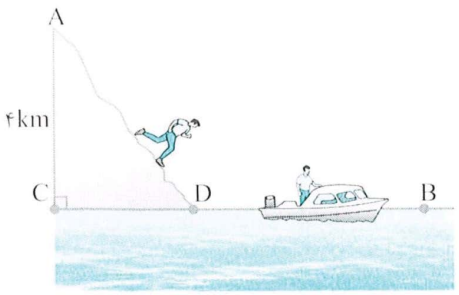
۱) $۳-\sqrt{۲}$ ۲) $۳+\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$

۲۱۱۹- عددی که جذرش با چهار برابر معکوس آن عدد برابر باشد. کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۴}$ ۳) $\sqrt[۳]{۱۶}$ ۴) $\sqrt{۳۲}$

۲۱۲۰- سرعت حرکت محسن در آب $۳\frac{km}{h}$ و روی خشکی $۵\frac{km}{h}$ است.

اگر محسن مسیر ADB در شکل روبه‌رو را در $\frac{۸}{۳}$ ساعت طی کند، طول CD چند کیلومتر است؟ ($BC=۸km$ و AD را مسیر مستقیم فرض کنید.)



۱) ۲
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۳

آزمون ۲۱۳ معادله‌های گنگ (۲)

۲۱۲۱- جواب معادلهٔ $\sqrt{x^۲+۷}=x+۲$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۲) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},۰)$ ۴) $(-۱,-\frac{۱}{۲})$

۲۱۲۲- قدرمطلق تفاضل دو جواب معادلهٔ $۲x+۱=\sqrt{۱۱x-۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱۲۳- معادلهٔ $\sqrt{۱+۳x-x^۲}=\sqrt{۱-۶x-x^۲+x^۳}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۲۴- جواب کوچک‌تر معادلهٔ $\sqrt[۳]{x^۳+۲}=x+۱$ کدام است؟

۱) $\frac{-۳-\sqrt{۲۱}}{۶}$ ۲) $\frac{-۳+\sqrt{۲۱}}{۶}$ ۳) $\frac{۳-\sqrt{۲۱}}{۶}$ ۴) $\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۶}$

۲۱۲۵- معادلهٔ $\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۲}=۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۲۶- جواب معادلهٔ $۲\sqrt{x}+\sqrt{۳x-۲}=۲$ کدام است؟

۱) $۲۶\pm۸\sqrt{۱۰}$ ۲) $۲۶-۸\sqrt{۱۰}$ ۳) $۲۷\pm۱۲\sqrt{۵}$ ۴) $۲۷-۱۲\sqrt{۵}$

۲۱۲۷- اگر $x=۲$ یک جواب معادلهٔ $\sqrt{x-۱}+\sqrt{a-x}=۳$ باشد، این معادله چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۲۸- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۷=۵\sqrt{x^۲+۱}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲

۲۱۲۹- جواب معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x}}+x+\sqrt{x}=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $۱+\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}-۱$

۲۱۳۰- معادلهٔ $\sqrt[۳]{x^۳+k}=x-۱$ دو جواب دارد. حدود k کدام است؟

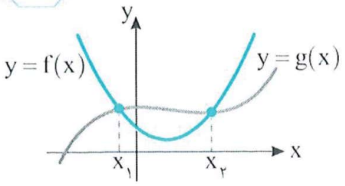
۱) $k<\frac{۱}{۴}$ ۲) $k<-\frac{۱}{۲}$ ۳) $k<-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}<k<۰$

سؤال
۲۱۲۱
۲۱۲۲
۲۱۲۳
۲۱۲۴
۲۱۲۵
۲۱۲۶
۲۱۲۷
۲۱۲۸
۲۱۲۹
۲۱۳۰

درس هشتم: حل هندسی معادلات

نکته روش هندسی حل معادلات

اگر f و g دو تابع باشند، طول نقطه‌های برخورد نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هستند و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقطه‌های برخورد این دو نمودار است.

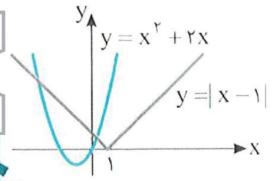


x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هستند.

تست ۱ معادلهٔ $x^2+2x=|x-1|$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

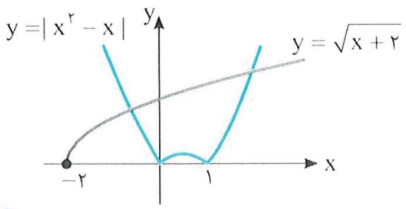
راه‌حل به نمودار تابع‌های $y=|x-1|$ و $y=x^2+2x$ توجه کنید. این نمودارها در دو نقطه متقاطع هستند. طول این نقطه‌ها جواب معادلهٔ مورد نظر است. پس معادله دو جواب دارد.



تست ۲ معادلهٔ $|x^2-x|=\sqrt{x+2}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل به نمودار تابع‌های $y=\sqrt{x+2}$ و $y=|x^2-x|$ توجه کنید. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند. پس معادله دو جواب دارد.



تست ۳ اگر سهمی $y=x^2+2x-m+3$ و خط $y=x+m-2$ در دو نقطهٔ متمایز یکدیگر را قطع کنند، حدود مقادیر m کدام است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(-\infty,\frac{19}{8})$ ۴) $(\frac{19}{8},+\infty)$

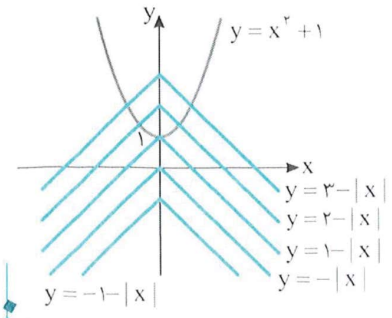
راه‌حل معادلهٔ $x^2+2x-m+3=x+m-2$، یعنی معادلهٔ $x^2+x-2m+5=0$ دو جواب دارد، پس

$$\Delta>0 \Rightarrow 1-4(-2m+5)>0 \Rightarrow 1+8m-20>0 \Rightarrow m>\frac{19}{8}$$

تست ۴ مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^2+|x|+1=k$ یک عضو دارد. مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۲ ۴) ۱

راه‌حل معادله را به‌صورت $x^2+1=k-|x|$ می‌نویسیم. نمودار تابع‌های $y=x^2+1$ و $y=k-|x|$ به ازای مقادیر مختلف k را در شکل مقابل رسم کرده‌ایم. واضح است که اگر $k=1$، آن‌گاه دو نمودار فقط در $x=0$ مشترک هستند و معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد. اگر $k>1$، آن‌گاه معادله دو جواب دارد و اگر $k<1$، آن‌گاه معادله جواب ندارد.

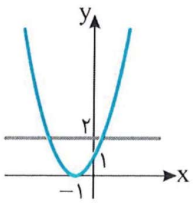


تست ۵ به ازای چه مقدارهایی از a مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $|x^۲+۲x+a|=۲$ چهار عضو دارد؟

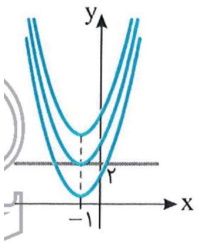
۱) $a>۳$ ۲) $a<-۱$ یا $a>۳$ ۳) $a\le -۳$ یا $a>۳$ ۴) $a<-۱$

راه‌حل باید همهٔ مقدارهایی از a را پیدا کنیم که نمودار $y=|x^۲+۲x+a|$ چهار بار خط $y=۲$ را قطع کند. چون $x^۲+۲x+a=(x+۱)^۲+a-۱$، سه حالت را بررسی می‌کنیم.

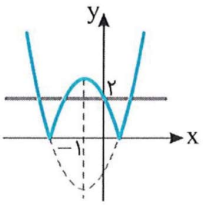
حالت اول اگر $a-۱=۰$، آن‌گاه نمودار $y=|x^۲+۲x+a|=(x+۱)^۲$ دو بار خط $y=۲$ را قطع می‌کند.



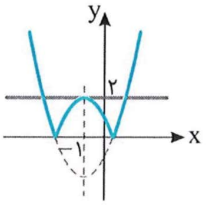
حالت دوم اگر $a-۱>۰$، آن‌گاه نمودار $y=|x^۲+۲x+a|=(x+۱)^۲+a-۱$ حداکثر دو بار خط $y=۲$ را قطع می‌کند.



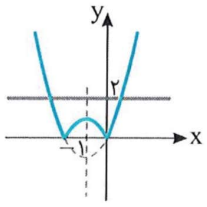
حالت سوم فرض کنید $a-۱<۰$. در این صورت، نمودار $y=|(x+۱)^۲+a-۱|$، اگر $|a-۱|<۲$، خط $y=۲$ را در دو نقطه قطع می‌کند، اگر $|a-۱|=۲$، خط $y=۲$ را در سه نقطه قطع می‌کند و اگر $|a-۱|>۲$، خط $y=۲$ را در چهار نقطه قطع می‌کند.



$|a-۱|>۲$



$|a-۱|=۲$



$|a-۱|<۲$

بنابراین باید $|a-۱|>۲$، یعنی

$a-۱<-۲\Rightarrow a<-۱$ یا $a-۱>۲\Rightarrow a>۳$

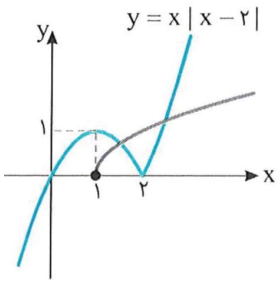
و چون $a-۱<۰$، پس باید $a<-۱$.

تست ۶ معادلهٔ $\frac{\sqrt{x-۱}}{x}=|x-۲|$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل معادله را به شکل $\sqrt{x-۱}=x|x-۲|$ می‌نویسیم و نمودار تابع‌های $y=\sqrt{x-۱}$ و $y=x|x-۲|$ را رسم می‌کنیم. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند، پس معادله دو جواب دارد.

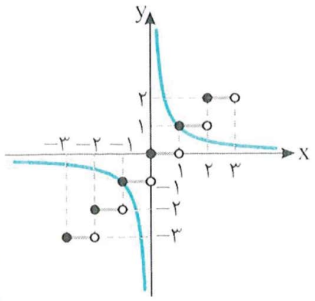
$y=x|x-۲|$



تست ۷ معادلهٔ $x[x]=۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل معادلـه را به صورت $[x]=\frac{۱}{x}$ می‌نویسـیم (توجه کنیـد که $x=۰$ جواب معادله نیسـت). نمودار تابع‌های $y=\frac{۱}{x}$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم. نمودارها دو نقطهٔ مشترک دارند. پس معادله دو جواب دارد. $x=\pm ۱$ جواب‌های معادله هستند.

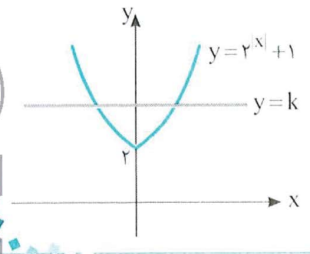


تست ۸

معادلهٔ $۲^{|x|}+۱=k$ دو جواب دارد. حدود k کدام است؟

۱) $k>۲$ ۲) $k\geq ۲$ ۳) $k>۱$ ۴) $k\geq ۱$

راه‌حل نمودار تابع‌های $y=۲^{|x|}+۱$ و $y=k$ را رسـم می‌کنیم. واضح اسـت که باید $k>۲$ تا خط $y=k$ نمودار تابع $y=۲^{|x|}+۱$ را در دو نقطه قطع کند و معادله دو جواب داشته باشد.

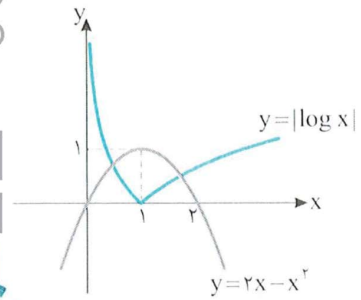


تست ۹

معادلهٔ $|\log x|=۲x-x^۲$ چند جواب دارد؟

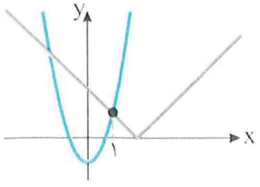
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل نمودار تابع‌های $y=|\log x|$ و $y=۲x-x^۲$ به شکل مقابل است. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.
پس معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.



دست‌گرمی

۳۴۳- شکل مقابل حل معادلهٔ $۲x^۲-۱=|x-a|$ را به روش هندسی نشان می‌دهد. مقدار a کدام است؟



۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) صفر

۳۴۴- اگر خط $y=-x$ و سهمی $y=x^۲+۲kx+k+۱$ نقطهٔ مشترک نداشته باشند، حدود k کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}<k<\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}<k<\sqrt{۲}$ ۳) $-\sqrt{۳}<k<\sqrt{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}<k<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۴۵- معادلهٔ $\big||x|-۲\big|=k$ چهار جواب دارد. حدود k کدام است؟

۱) $-۱<k<۱$ ۲) $-۲<k<۲$ ۳) $۰<k<۲$ ۴) $-۲<k<۰$

۳۴۶- معادلهٔ $|x|\times ۲^x=۱$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴۷- معادلهٔ $|\log x|+|x-۱|=۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۳۱- به ازای چه مقادیری از k سهمی‌های $y=x^۲-k$ و $y=-x^۲+kx$ نقطهٔ مشترک ندارند؟

۱) $-۴<k<۴$ ۲) $۰<k<۸$ ۳) $-۶<k<۲$ ۴) $-۸<k<۰$

۲۱۳۲- معادلهٔ $||x|-۴|=۴$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱۳۳- اگر مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $|x+۱۲|+|x-۵|=a$ نامتناهی باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۷ ۴) ۷

۲۱۳۴- معادلهٔ $x|x|=k$،

۱) همواره یک جواب دارد.
۲) اگر $k\neq ۰$، دو جواب دارد.
۳) اگر $k>۰$، چهار جواب دارد.
۴) اگر $k\neq ۰$، چهار جواب دارد.

۲۱۳۵- معادلهٔ $|\frac{۱}{|x|}-۱|=k$ چهار جواب دارد. حدود k کدام است؟

۱) $-۱<k<۰$ ۲) $-۱<k<۱$ ۳) $۰<k<۱$ ۴) $-۲<k<۲$

۲۱۳۶- معادلهٔ $\sqrt{x+۱}=۱+\frac{۱}{x}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۳۷- معادلهٔ $x^۳+\sqrt[۳]{x-۱}=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۳۸- معادلهٔ $x^۳+\sqrt{x-۱}=۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۳۹- معادلهٔ $(\frac{۱}{۳})^x=x+۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۴۰- معادلهٔ $x\log(x+۱)=۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال
۲۱۳۱
۲۱۳۲
۲۱۳۳
۲۱۳۴
۲۱۳۵
۲۱۳۶
۲۱۳۷
۲۱۳۸
۲۱۳۹
۲۱۴۰

آزمون ۲۱۵ حل هندسی معادلات (۲)

۲۱۴۱- نمودار سهمی‌های $y=x^۲+۲ax+۶b$ و $y=x^۲+۲bx+۶a$ فقط یک نقطهٔ مشترک دارند. طول این نقطهٔ مشترک چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۴۲- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $|x^۲-۶x|=m$ سه‌عضوی است. مقدار m کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۲۱۴۳- برای چه مقادیر k مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲|x|+۳=k$ چهار عضو دارد؟

۱) $۰<k<۱$ ۲) $۲<k<۳$ ۳) $۰<k<۳$ ۴) $-۲<k<۰$

۲۱۴۴- به ازای چند مقدار صحیح k مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $|x+۳|-|x-۲|=k$ یک عضو مثبت دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۱۴۵- معادلهٔ $[x]+\sqrt{x}=۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۴۶- معادلهٔ $x^۲-x[x]=۱$ چند جواب مثبت و چند جواب منفی دارد؟

۱) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.

۲) چهار جواب مثبت دارد و جواب منفی ندارد.

۳) مجموعهٔ جواب‌های مثبت معادله نامتناهی است ولی جواب منفی ندارد.

۴) مجموعهٔ جواب‌های منفی معادله نامتناهی است ولی جواب مثبت ندارد.

۲۱۴۷- معادلهٔ $\frac{x}{|x|}(x^۳+۱)=k$ یک جواب دارد. حدود k کدام است؟

۱) $-۱\le k\le ۱$ ۲) $-۱\le k<۱$ ۳) $-۱<k\le ۱$ ۴) $-۱<k<۱$

۲۱۴۸- معادلهٔ $|۲^x-۱|=\sqrt{x+۱}$ چند جواب دارد؟

۱) دو جواب مثبت ۲) فقط یک جواب مثبت

۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۴) جواب ندارد.

۲۱۴۹- معادلهٔ $\log(x+۱)=|x-۱|$ چند جواب دارد؟

۱) فقط یک جواب مثبت ۲) فقط یک جواب منفی

۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۴) دو جواب مثبت

۲۱۵۰- چند عدد از بازهٔ $[۰,۲\pi]$ در مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $۳\sin^۲x+۲\sin x-۱=۰$ قرار دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال	گام
۲۱۴۱	۳۲۳
۲۱۴۲	۱۴ ۳۸ ۳۲۳
۲۱۴۳	۷ ۱۴ ۳۲۳
۲۱۴۴	۳۲۳ ۳۳۲
۲۱۴۵	۳۰ ۳۱ ۳۳ ۳۲۳
۲۱۴۶	۳۰ ۳۲۳ ۳۳۷
۲۱۴۷	۷ ۳۰ ۳۱ ۳۳ ۳۲۳
۲۱۴۸	۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۸ ۳۲۳
۲۱۴۹	۳۰ ۳۲ ۳۲۳
۲۱۵۰	۳۲۳

آزمون ۲۱۶

۲۱۵۱- به‌ازای چند مقدار m معادلهٔ $mx^۲-۲x+۴m=۰$ فقط یک جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۵۲- مجموع دو عدد برابر ۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -۲ است. نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر کدام است؟

۱) $۲-۲\sqrt{۶}$ ۲) $-۲-۲\sqrt{۶}$ ۳) $-۵-۲\sqrt{۶}$ ۴) $-۵-\sqrt{۶}$

۲۱۵۳- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۸x-۱۳=۰$ باشند، حاصل $\frac{۱}{x_۱+۲}+\frac{۱}{x_۲+۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ۲) $\frac{۴}{۲۵}$ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۲}{۲۵}$

۲۱۵۴- در معادلهٔ $x^۲-۸x+m=۰$ اگر یکی از جواب‌ها از دو برابر جواب دیگر ۴ واحد بیشتر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۳}$ ۲) $\frac{۸۰}{۹}$ ۳) $\frac{۸۰}{۳}$ ۴) $\frac{۴۰}{۹}$

۲۱۵۵- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{۴}{x^۲-۴}+\frac{۵}{x^۲-۳}=۲$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۸ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۲

۲۱۵۶- صد کیلوگرم محلول آب و شکر با غلظت ۲۵٪ موجود است. اگر یک‌سوم از آب آن را تبخیر کنیم، چند کیلوگرم باید شکر اضافه کنیم تا غلظت آن ۵۰٪ گردد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) این کار ممکن نیست.

۲۱۵۷- معادلهٔ $۲\sqrt{x-۱}-\sqrt{x-۲}=۲$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۱۵۸- جواب معادلهٔ $\sqrt{۲x-۱}+x=\sqrt{۳x-۱}$ کدام است؟

۱) $۵-۲\sqrt{۵}$ ۲) $۵+۲\sqrt{۵}$ ۳) $\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۲}$

۲۱۵۹- جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=mx^۲+(m^۲-۱۲)x-m-۲n$ به‌صورت زیر است. مقدار n کدام است؟

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$P(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

۱) -۱۲ ۲) ۱۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۲۱۶۰- اگر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x^۲-mx-m}{x^۲-x+۱}\leq ۳$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، حداکثر مقدار m کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

سؤال
۲۱۵۱
۲۱۵۲
۲۱۵۳
۲۱۵۴
۲۱۵۵
۲۱۵۶
۲۱۵۷
۲۱۵۸
۲۱۵۹
۲۱۶۰

آزمون ۲۱۷ آزمون فصل نهم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۲۱۶۱- در معادلهٔ $3x^2-17x+m=0$ یک جواب از ۳ برابر جواب دیگر ۳ واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟ (ریاضی ۸۷)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۱۶۲- در معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ اگر یکی از جواب‌ها از نصف جواب دیگر ۵ واحد بیشتر باشد. مقدار m کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۲۱۶۳- به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو جواب معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۱۶۴- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعهٔ جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\}$ است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$

۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۲۱۶۵- به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$، دو جواب مثبت دارد؟ (ریاضی ۹۶)

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$

۲۱۶۶- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۱۶۷- به ازای کدام مجموعهٔ مقدارهای m، معادلهٔ $(m+2)x^2+3x+1-m=0$ دو جواب مختلف‌العلامت دارد؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۵)

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$

۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

۲۱۶۸- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۲)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۲۱۶۹- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^2+4x+3=\sqrt{x^2+4x+5}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) -2 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۱۷۰- مقادیر تابع $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ در بازهٔ (a, b) بزرگ‌تر از $\frac{7}{2}$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (تجربی ۸۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶

سؤال	گام
۲۱۶۱	۲۹۶ ۲۹۸
۲۱۶۲	۲۹۶ ۲۹۸
۲۱۶۳	۲۹۶ ۲۹۸
۲۱۶۴	۲۹۶ ۲۹۹
۲۱۶۵	۲۹۶ ۳۰۰
۲۱۶۶	۲۹۶ ۲۹۷
۲۱۶۷	۳۰۰ ۳۰۱ ۳۱۸
۲۱۶۸	۳۰۶ ۳۰۹
۲۱۶۹	۳۱۹ ۳۲۱ ۳۲۲
۲۱۷۰	۳۱۲ ۳۱۸

آزمون ۲۱۸ — آزمون فصل نهم (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۲۱۷۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$ کدام است؟ تجربی - ۹۰

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۱۷۲- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x(۵x+۳)=۲$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $۴x^۲-kx+۲۵=۰$ به صورت $\{\frac{۱}{\alpha^۲},\frac{۱}{\beta^۲}\}$ است؟ ریاضی - ۹۰

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۲۱۷۳- به ازای کدام مقدار m، هر یک از جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۸x^۲-mx-۸=۰$، توان سوم جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۲=۰$ است؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۲۱۷۴- اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $x(ax^۲-x-۵)=۲$ برابر ۲ باشد، مجموع دو جواب دیگر کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱) -۲ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱۷۵- به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، از معادلهٔ $x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰$ دو جواب برای x حاصل می‌شود؟ خارج از کشور تجربی - ۸۸

۱) $m\geq ۱$ ۲) $m<۲$ ۳) $۱\leq m<۲$ ۴) هیچ‌مقدار m

۲۱۷۶- به ازای کدام مقادیر a، همهٔ مقادیر عبارت $y=(۱-a)x^۲+۲\sqrt{۶}x-a$ مثبت‌اند؟ خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱) $a<۱$ ۲) $a<-۲$ ۳) $a>۳$ ۴) $-۲<a<۱$

۲۱۷۷- معادلهٔ $۳x-۲+\sqrt{۴x-۳}=۰$، از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟ خارج از کشور تجربی - ۸۷

۱) یک جواب
۲) دو جواب هم‌علامت
۳) دو جواب با علامت مخالف
۴) جواب ندارد.

۲۱۷۸- اگر $x=۴$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x+a=\sqrt{۵x-x^۲}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ تجربی - ۸۷

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگری ندارد.

۲۱۷۹- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳x^۲-۲x}{x^۲+۴}$ در بازهٔ (a,b) پایین‌تر از خط به معادلهٔ $y=۲$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ∞

۲۱۸۰- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۳-۴x^۲-x+۴, x>-۱$ در بازهٔ (a,b) زیر محور x است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ ریاضی - ۸۸

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

نکته

قدرمطلق عدد حقیقی a را با $|a|$ نشان می‌دهیم و این طور تعریف می‌کنیم: $|a|=\begin{cases}-a & a\le 0\\ a & a\ge 0\end{cases}$. ویژگی‌های قدرمطلق را در زیر آورده‌ایم.

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

۱) $|a|\ge 0$ ۲) $\sqrt{a^2}=|a|$ ۳) $|-a|=|a|$ ۴) $|a^2|=|a|^2=a^2$

۵) $|ab|=|a||b|$ ۶) $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$ ۷) $-|a|\le a\le |a|$

تست ۱

اگر $-2<x<-3$، حاصل عبارت $\frac{|6x+36|-4|9-x|}{x}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲ ۳) -10 ۴) -2

راه‌حل اگر $-2<x<-3$، آن‌گاه $-12<6x<-18$ در نتیجه $24>6x+36>18$. بنابراین $|6x+36|=6x+36$. همچنین، چون x منفی است، پس $9-x$ مثبت است. در نتیجه $|9-x|=9-x$. بنابراین $\frac{|6x+36|-4|9-x|}{x}=\frac{6x+36-4(9-x)}{x}=\frac{6x+4x}{x}=10$.

تست ۲

اگر $|3-a|=a-3$ و $|5-a|=5-a$، حاصل $|6-a|+|a-10|$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴ ۳) $16-2a$ ۴) $2a-16$

راه‌حل توجه کنید که $|5-a|=5-a\Rightarrow 5-a\ge 0\Rightarrow a\le 5$، $|3-a|=a-3\Rightarrow 3-a\le 0\Rightarrow a\ge 3$

بنابراین $3\le a\le 5$ و در نتیجه $a-10\le 0\Rightarrow |a-10|=10-a$، $6-a\ge 0\Rightarrow |6-a|=6-a$

بنابراین $|6-a|+|a-10|=(6-a)+(10-a)=16-2a$.

تست ۳

ساده شدهٔ عبارت $\frac{|a^2+2a+3|+|-a^2+2a-3|}{2}$ کدام است؟

۱) a^2+3 ۲) a^2+2a ۳) a^2-2a ۴) a^2-3

راه‌حل عبارت a^2+2a+3 همواره مثبت است. زیرا ضریب a^2 مثبت است و $\Delta=4-12=-8$. عبارت $-a^2+2a-3$ همواره منفی است. زیرا ضریب a^2 منفی است و $\Delta=4-12=-8$. بنابراین

$$\frac{a^2+2a+3-(-a^2+2a-3)}{2}=\frac{2a^2+6}{2}=a^2+3$$

تست ۴

اگر $b<0<a$ و $|a|>|b|$، حاصل $|a+b|+|a|+|b|$ برابر کدام است؟

۱) $-2b$ ۲) $-2a$ ۳) $2a$ ۴) $2b$

راه‌حل از $b<0<a$ نتیجه می‌گیریم $|b|=-b$ و $|a|=a$. بنابراین از نابرابری $|a|>|b|$ نتیجه می‌شود $a>-b\Rightarrow a+b>0\Rightarrow |a+b|=a+b$

پس حاصل عبارت مورد نظر برابر $a+b+a-b=2a$ می‌شود.

تست ۵ اگر $-۱\leq x\leq ۲$، کمترین مقدار عبارت $|x-۲|-\frac{|x|}{۲}+|x+۲|$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل اگر $-۱\leq x\leq ۲$، آن‌گاه $|x-۲|=۲-x$ و $|x+۲|=x+۲$. بنابراین اگر $-۱\leq x\leq ۰$، عبارت مورد نظر برابر است با $۲-x+\frac{۱}{۲}x+x+۲=\frac{۱}{۲}x+۴$ و چون $۰\leq x\leq ۲$، عبارت مورد نظر برابر است با $۴-\frac{۱}{۲}x+x+۲=۲-x-\frac{۱}{۲}x+۴\leq\frac{۷}{۲}$. پس $-۱\leq x\leq ۰$، پس $۳\leq -\frac{۱}{۲}x+۴\leq ۴$. بنابراین کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر با ۳ است.

تست ۶ اگر $x^۲+x\leq ۰$، حداکثر مقدار عبارت $A=\sqrt{x^۲-۴x+۴}-۳\sqrt{x^۲+۲x+۱}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) -۱

راه‌حل از نامعادلهٔ $x^۲+x\leq ۰$، محدودهٔ x را مشخص می‌کنیم: $x(x+۱)\leq ۰\Rightarrow -۱\leq x\leq ۰$

عبارت داده شده را برحسب قدرمطلق می‌نویسیم و آن را با توجه به اینکه $-۱\leq x\leq ۰$ ساده می‌کنیم:

$$A=\sqrt{(x-۲)^۲}-۳\sqrt{(x+۱)^۲}=\underbrace{|x-۲|}_{\text{منفی}}-۳\underbrace{|x+۱|}_{\text{نامنفی}}=-(x-۲)-۳(x+۱)=-۴x-۱$$

از طرف دیگر،

$$-۱\leq x\leq ۰\Rightarrow ۰\leq -۴x\leq ۴\Rightarrow -۱\leq -۴x-۱\leq ۳\Rightarrow -۱\leq A\leq ۳$$

پس حداکثر مقدار A برابر ۳ است.

نابرابری مثلث

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه

- $|a+b|\geq|a|+|b|$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $ab\geq ۰$.
- $|a-b|\geq|a|+|b|$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $ab\leq ۰$.

تست ۷ کمترین مقدار تابع $f(x)=|x-۴|+|x+۵|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

راه‌حل اگر از نابرابری $|a-b|\geq|a|+|b|$ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود $f(x)=|x-۴|+|x+۵|\geq|x-۴-(x+۵)|=|-۹|=۹$

تساوی هم (مثلاً) به ازای $x=۴$ به‌دست می‌آید، پس کمترین مقدار تابع f برابر ۹ است.

تست ۸ بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۲۰}{|x-۱|+|x-۵|}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل چون صورت کسر $\frac{۲۰}{|x-۱|+|x-۵|}$ مقداری ثابت است، بیشترین مقدار این کسر وقتی به‌دست می‌آید که مخرج آن کمترین مقدار ممکن باشد. اکنون اگر از نابرابری $|a-b|\geq|a|+|b|$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید $|x-۱|+|x-۵|\geq|x-۱-(x-۵)|=|۴|=۴$

تساوی هم (مثلاً) به ازای $x=۱$ برقرار است. بنابراین کمترین مقدار مخرج کسر مورد نظر برابر ۴ است، در نتیجه بیشترین مقدار خود کسر برابر است با $\frac{۲۰}{۴}=۵$.

دست‌گرمی

۳۴۸- اگر $a<-۳$، حاصل عبارت $\Big|\big|۳+|۲-|۱+a|\big|\Big|$ کدام است؟

۱) $-a$ ۲) a ۳) $a+۳$ ۴) $-۳-a$

۳۴۹- اگر $a<۰<b$ و $b<|a|$، حاصل عبارت $\Big|\big||a|-b\big|-\big|b-|۲a|\big|\Big|$ کدام است؟

۱) $-a$ ۲) $a-۲b$ ۳) $-۲b$ ۴) a

۳۵۰- اگر $۱<x<۲$، حاصل $\frac{|x-۲|}{x-۲}-\frac{x-۱}{|x-۱|}+\frac{|x|}{x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۳۵۱- اگر $x^۲<x$، حاصل $|x+۱|-|۱-x|+|x|$ کدام است؟

۱) $-۳x$ ۲) $-۲x$ ۳) $x+۲$ ۴) $۳x$

۳۵۲- کمترین مقدار عبارت $A=۲|x-۳|+|۷-۲x|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۷

آزمون ۲۱۹

۲۱۸۱- اگر $a<-۲$، حاصل $\left||۱-|۱+a|\right|$ کدام است؟

۱) $۲+a$ ۲) $-۲-a$ ۳) a ۴) $-a$

۲۱۸۲- اگر $-۱<x<۲$، حاصل $\frac{|x-۲|}{x-۲}-\frac{x+۱}{|x+۱|}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۱۸۳- اگر $-۳<x<-۲$، حاصل $\frac{|۶x+۳۲|-۴|۸-x|}{۳x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۶۴}{۳}$

۲۱۸۴- اگر $۱<x<۲$، حاصل $A=|۳x-۳|-\sqrt{۴x^۲-۱۶x+۱۶}$ کدام است؟

۱) $۵x-۷$ ۲) $x+۱$ ۳) $-x-۱$ ۴) $-۵x+۷$

۲۱۸۵- اگر $-۲<x<۰$، ساده شدهٔ عبارت $f(x)=|x+\frac{۴}{x}|+|x-\frac{۴}{x}|$ کدام است؟

۱) $-۲x+\frac{۸}{x}$ ۲) $۲x-\frac{۸}{x}$ ۳) $-۲x$ ۴) $\frac{-۸}{x}$

۲۱۸۶- اگر $۰\le a<۶$، حاصل $A=\left|۶-a-|۳+|a-۶|\right|$ کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) a ۳) ۳ ۴) ۲

۲۱۸۷- اگر $x<۰<y$، حاصل $|۲y|+|-x|-|۲y-x|-|۲x-y|$ کدام است؟

۱) $۲x-y$ ۲) $-۲x+y$ ۳) $۴y$ ۴) $۳y$

۲۱۸۸- اگر $۰<a<۱$ و $-۲<b<-۱$، حاصل $\frac{|a+b|}{a+b}+\frac{|b+۲|}{b+۲}-\frac{|a-۱|}{a-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) -۳

۲۱۸۹- اگر $a<۰$ و $|a|b\le a$، حاصل $|۲b-۶|-|۲|b-۲|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) $۴b-۴$ ۴) -۴

۲۱۹۰- حاصل عبارت $y=\frac{|x^۲-۱|}{x^۲-۱}+\frac{x^۲-۲}{|x^۲-۲|}$ به ازای مقادیر مختلف x چند عدد متفاوت می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال
۲۱۸۱
۲۱۸۲
۲۱۸۳
۲۱۸۴
۲۱۸۵
۲۱۸۶
۲۱۸۷
۲۱۸۸
۲۱۸۹
۲۱۹۰

درس دوم: معادلات و نامعادلات قدرمطلقی

نکته — حل معادلات قدرمطلقی

برای حل معادلات قدرمطلقی می‌توانیم از تعریف قدرمطلق و ویژگی‌های زیر استفاده کنیم:

- اگر $B\geq 0$ و $|A|=B$، آن‌گاه $A=\pm B$. اگر $B<0$، معادلهٔ $|A|=B$ جواب ندارد.
- اگر $|A|=|B|$، آن‌گاه $A=\pm B$.

تست ۱

مجموع جواب‌های معادلهٔ $|2x-3|=4$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{7}{2}$

راه‌حل از $|2x-3|=4$ نتیجه می‌شود $2x-3=\pm 4$، بنابراین

$2x-3=4\Rightarrow x=\frac{7}{2}$ ، $2x-3=-4\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۳ است.

تست ۲

اگر $|x|-|-2x|+|3x|=8$، مقدار x^2-4 کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

راه‌حل توجه کنید که $|-2x|=|2x|$. پس

$|x|-|2x|+|3x|=8\Rightarrow |x|-2|x|+3|x|=8\Rightarrow 2|x|=8\Rightarrow |x|=4$

بنابراین $x^2=|x|^2=4^2=16$، در نتیجه $x^2-4=12$.

تست ۳

مجموع جواب‌های معادلهٔ $\big||2-x|-3\big|=4$ کدام است؟

۱) -4 ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) -6

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $|2-x|-3=\pm 4$، پس دو حالت زیر پیش می‌آید:

$$\big||2-x|-3\big|=4\Rightarrow\begin{cases}|2-x|-3=-4\Rightarrow |2-x|=-1 \xrightarrow{|2-x|\geq 0} \text{جواب ندارد.}\\ |2-x|-3=4\Rightarrow |2-x|=7\Rightarrow 2-x=\pm 7\Rightarrow x=-5\,,\ x=9\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با $9+(-5)=4$.

تست ۴

تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $|2x^2-9x|=9x-2x^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) نامتناهی

راه‌حل می‌دانیم اگر $|A|=-A$، آن‌گاه $A\leq 0$. بنابراین

$2x^2-9x\leq 0\Rightarrow x(2x-9)\leq 0\Rightarrow 0\leq x\leq \frac{9}{2}$

بنابراین $x=0$، $x=1$، $x=2$، $x=3$ و $x=4$ جواب‌های صحیح معادله هستند که تعداد آن‌ها پنج تاست.

تست ۵

مجموع جواب‌های معادلهٔ $|2x-1|=|x-3|$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-10}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

راه‌حل می‌دانیم از $|A|=|B|$ نتیجه می‌شود $A=\pm B$. بنابراین

$$|2x-1|=|x-3|\Rightarrow\begin{cases}2x-1=x-3\\ 2x-1=-x+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ x=\frac{4}{3}\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{2}{3}$ است.

تست ۶ اگر $|4x-x^2|=|x+2|$، مجموع مقدارهای به‌دست آمده برای x کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

راه‌حل تساوی $|A|=|B|$ با $A=\pm B$ معادل است، پس

$$|4x-x^2|=|x+2|\Rightarrow 4x-x^2=\pm(x+2)\Rightarrow\begin{cases}x^2-3x+2=0\\ x^2-5x-2=0\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ اول برابر ۳ و مجموع جواب‌های معادلهٔ دوم برابر ۵ است. در نتیجه مجموع چهار جواب معادلهٔ اصلی برابر ۸ است (توجه کنید که معادله‌های به‌دست آمده، جواب مشترک ندارند).

تست ۷ مجموع جواب‌های معادلهٔ $|2x-5|=x-1$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

راه‌حل اول معلوم است که $x=\frac{5}{2}$ جواب معادلهٔ مورد نظر نیست. از طرف دیگر، $|2x-5|=\begin{cases}2x-5 & x\geq\frac{5}{2}\\ 5-2x & x<\frac{5}{2}\end{cases}$. اگر $x\geq\frac{5}{2}$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$2x-5=x-1\Rightarrow x=4$$

و $x=4$ در معادله صدق می‌کند. اگر $x<\frac{5}{2}$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$5-2x=x-1\Rightarrow x=2$$

و $x=2$ در معادله صدق می‌کند. پس مجموع جواب‌های معادلهٔ داده شده $2+4=6$ است.

راه‌حل دوم اگر دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید

$$|2x-5|^2=(x-1)^2\Rightarrow(2x-5)^2=(x-1)^2\Rightarrow 4x^2-20x+25=x^2-2x+1$$
$$3x^2-18x+24=0\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow(x-2)(x-4)=0\Rightarrow x=2\ ,\ x=4$$

هر دوی این عددها در معادله صدق می‌کنند. پس مجموع جواب‌های معادلهٔ داده شده $2+4=6$ است.

راه‌حل سوم توجه کنید که اگر $x<1$، آن‌گاه $x-1<0$ و معادلهٔ $|2x-5|=x-1$ جواب ندارد. بنابراین $x\geq 1$. در نتیجه

$$|2x-5|=x-1\Rightarrow\begin{cases}2x-5=x-1\\ 2x-5=-(x-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ x=2\end{cases}$$

توجه کنید که هر دو جواب در شرط $x\geq 1$ صدق می‌کنند، بنابراین هر دو قابل قبول‌اند. پس مجموع جواب‌های معادلهٔ داده شده $2+4=6$ است.

تست ۸ **مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x-1|+3|x-2|=4$ برابر است با**

۱) ۴ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) صفر

راه‌حل با توجه به ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x<1:\ |x-2|=2-x\ ,\ |x-1|=1-x\Rightarrow 3(2-x)+(1-x)=4\Rightarrow -4x=-3\Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

$$1\leq x<2:\ |x-2|=2-x\ ,\ |x-1|=x-1\Rightarrow 3(2-x)+(x-1)=4\Rightarrow -2x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x\geq 2:\ |x-2|=x-2\ ,\ |x-1|=x-1\Rightarrow 3(x-2)+(x-1)=4\Rightarrow 4x=11\Rightarrow x=\frac{11}{4}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله $\frac{3}{4}+\frac{11}{4}=\frac{7}{2}$ می‌شود.

نکته

برای حل برخی معادله‌های قدرمطلقی می‌توان از تغییر متغیر استفاده کرد.

تست ۹ **تعداد جواب‌های معادلهٔ $x^2-4|x|+3=0$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

راه‌حل در این مسئله، تکنیک تغییر متغیر حل معادله‌های قدرمطلقی را راحت‌تر می‌کند. چون $x^۲=|x|^۲$، معادله مورد نظر را می‌توان به‌صورت $|x|^۲-۴|x|+۳=۰$ نوشت. اگر فرض کنیم $|x|=t$، این معادله می‌شود $t^۲-۴t+۳=۰$، پس $t=۱$ و $t=۳$. به این ترتیب.

$$t=۱\Rightarrow|x|=۱\Rightarrow x=\pm۱,\quad t=۳\Rightarrow|x|=۳\Rightarrow x=\pm۳$$

بنابراین معادله چهار جواب دارد: ±۱ و ±۳.

تست ۱۰ معادلهٔ $x^۲+۲x+۳=۳|x+۱|$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل معادله را به‌صورت مقابل می‌نویسیم: $x^۲+۲x+۱+۲=۳|x+۱|\Rightarrow(x+۱)^۲+۲=۳|x+۱|\Rightarrow|x+۱|^۲-۳|x+۱|+۲=۰$

فرض می‌کنیم $|x+۱|=t$. در این صورت

$$|x+۱|=۲\Rightarrow x=-۳,x=۱,\quad t^۲-۳t+۲=۰\Rightarrow(t-۱)(t-۲)=۰\Rightarrow t=۱,\ t=۲\Rightarrow|x+۱|=۱\Rightarrow x=-۲,x=۰.$$

بنابراین معادله چهار جواب دارد.

نکته

حالت تساوی در نابرابری $|a|+|b|\geq|a+b|$ وقتی پیش می‌آید که $ab\geq۰$. از این نکته می‌توانیم در حل برخی معادلات قدرمطلقی استفاده کنیم.

تست ۱۱ معادلهٔ $|x-۵|=|x+۲|+|۲x-۳|$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

راه‌حل با توجه به اینکه $|-a|=|a|$، معادله را به‌صورت مقابل می‌نویسیم تا از نابرابری مثلث استفاده کنیم: $|\underbrace{۲x-۳}_{a}|+|\underbrace{-x-۲}_{b}|=|\underbrace{x-۵}_{a+b}|$

در نابرابری مثلث حالت تساوی، یعنی $|a+b|=|a|+|b|$، وقتی اتفاق می‌افتد که $ab\geq۰$. پس

$$(۲x-۳)(-x-۲)\geq۰\Rightarrow(۲x-۳)(x+۲)\leq۰\Rightarrow-۲\leq x\leq\frac{۳}{۲}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله شامل چهار عدد صحیح -۲، -۱، ۰ و ۱ است.

نکته حل نامعادلات قدرمطلقی

برای حل نامعادلات قدرمطلقی می‌توانیم از تعریف قدرمطلق و ویژگی‌های زیر استفاده کنیم:

- **اگر $a>۰$ و $|x|<a$، آن‌گاه $-a<x<a$. اگر $a\leq۰$، آن‌گاه نامعادلهٔ $|x|<a$ جواب ندارد.**
- **اگر $a\geq۰$ و $|x|\leq a$، آن‌گاه $-a\leq x\leq a$. اگر $a<۰$، آن‌گاه نامعادلهٔ $|x|\leq a$ جواب ندارد.**
- **اگر $a\geq۰$ و $|x|>a$، آن‌گاه $x>a$ یا $x<-a$. اگر $a<۰$، آن‌گاه مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|>a$ برابر $\mathbb{R}$ است.**
- **اگر $a\geq۰$ و $|x|\geq a$، آن‌گاه $x\geq a$ یا $x\leq-a$. اگر $a\leq۰$، آن‌گاه مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|\geq a$ برابر $\mathbb{R}$ است.**

تست ۱۲ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|۲x-۱|<۳$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

راه‌حل نامعادله را به‌صورت مقابل حل می‌کنیم: $|۲x-۱|<۳\Rightarrow-۳<۲x-۱<۳\Rightarrow-۲<۲x<۴\Rightarrow-۱<x<۲$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، بازهٔ $(-۱,۲)$ است. پس $a=-۱$، $b=۲$ و در نتیجه $a+b=۱$.

تست ۱۳ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|۲x-۱|\geq۴$ به‌صورت $\mathbb{R}-(a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل باید $2x-1\geq 4\Rightarrow x\geq \frac{5}{2}$ یا $2x-1\leq -4\Rightarrow x\leq -\frac{3}{2}$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{5}{2},+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(-\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ است. پس $a=-\frac{3}{2}$ و $b=\frac{5}{2}$ و در نتیجه $a+b=1$.

تست ۱۴ **چند عدد صحیح در مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $||x-1|-2|<3$ قرار دارد؟**

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

راه‌حل با توجه به ویژگی‌های قدرمطلق می‌توانیم نامعادله را به‌صورت روبه‌رو بنویسیم: $-3<|x-1|-2<3\Rightarrow -1<|x-1|<5$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-1|>-1$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-1|<5$ به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$|x-1|<5\Rightarrow -5<x-1<5\Rightarrow -4<x<6$$

بنابراین اعداد صحیح -3، -2، -1، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در مجموعهٔ جواب‌های نامعادله قرار دارند که تعداد آن‌ها نُه‌تا است.

تست ۱۵ **چند عدد صحیح در مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $2\leq|7-2x|<5$ قرار دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که (۱) $|7-2x|<5\Rightarrow -5<7-2x<5\Rightarrow 1<x<6$

از طرف دیگر، (۲) $|7-2x|\geq 2\Rightarrow 7-2x\geq 2$ یا $7-2x\leq -2\Rightarrow x\leq \frac{5}{2}$ یا $x\geq \frac{9}{2}$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های فوق به‌صورت $x\in(1,\frac{5}{2}]\cup[\frac{9}{2},6)$ است، که شامل دو عدد صحیح ۲ و ۵ است.

تست ۱۶ **چند عدد صحیح در مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-1|<2-\frac{x}{2}$ قرار دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل اول توجه کنید که باید $2-\frac{x}{2}>0$، یعنی $x<4$. بنابراین نامعادله به‌صورت $-2+\frac{x}{2}<x-1<2-\frac{x}{2}$ بازنویسی می‌شود، پس باید نامعادله‌های $x-1<2-\frac{x}{2}$ و $-2+\frac{x}{2}<x-1$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها و بازهٔ $(-\infty,4)$ را به‌دست آوریم:

$$x-1<2-\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{3x}{2}<3\Rightarrow x<2,\quad -2+\frac{x}{2}<x-1\Rightarrow -1<\frac{x}{2}\Rightarrow x>-2$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(-2,2)$ است که شامل اعداد صحیح صفر و ± 1 است.

راه‌حل دوم عبارت داخل قدرمطلق، یعنی $x-1$ را تعیین علامت می‌کنیم تا بتوانیم نامعادله را ساده کنیم.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	۰	$+$	

حالت اول $x<1$. در این صورت $x-1<0$ و نامعادلهٔ $-x+1<2-\frac{x}{2}$ را حل می‌کنیم: $-x+1<2-\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{x}{2}>-1\Rightarrow x>-2$

در نتیجه در این حالت $(-2,1)=(-2,+\infty)\cap(-\infty,1)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است.

حالت دوم $x\geq 1$. در این صورت $x-1\geq 0$ و نامعادلهٔ $x-1<2-\frac{x}{2}$ را حل می‌کنیم: $x-1<2-\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{3x}{2}<3\Rightarrow x<2$

در نتیجه در این حالت $[1,2)=[1,+\infty)\cap(-\infty,2)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است.

بنابراین اجتماع مجموعهٔ جواب‌های به‌دست آمده، یعنی بازهٔ $(-2,2)$ پاسخ مسئله است که سه عدد صحیح را شامل می‌شود.

راه‌حل سوم واضح است که اگر $x>4$، نامعادله جواب ندارد. اگر $x<4$، آن‌گاه دو طرف نامعادله، مثبت هستند و می‌توانیم آن‌ها را به توان دو برسانیم تا قدرمطلق حذف شود. $|x-1|^2<(2-\frac{x}{2})^2\Rightarrow x^2-2x+1<4-2x+\frac{x^2}{4}\Rightarrow \frac{3x^2}{4}<3\Rightarrow x^2<4\Rightarrow |x|<2\Rightarrow -2<x<2$

اگر $x=4$، آن‌گاه $3<0$ که نادرست است. پس بازهٔ $(-2,2)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر است که سه عدد صحیح را شامل می‌شود.

تست ۱۷ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-1|\geq|2x-1|$ بازهٔ $[a\,.\,b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

راه‌حل

راه‌حل اول برای حل این نامعادله دو طرف را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ روبه‌رو برسیم: $(x-1)^2\geq(2x-1)^2\Rightarrow x^2-2x+1\geq 4x^2-4x+1$

در نتیجه مسئله به حل کردن نامعادلهٔ مقابل تبدیل می‌شود: $3x^2-2x\leq 0\Rightarrow 0\leq x\leq\frac{2}{3}$

مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله بازهٔ $[0\,.\,\frac{2}{3}]$ است. بنابراین $a=0$ و $b=\frac{2}{3}$. در نتیجه $b-a=\frac{2}{3}$.

راه‌حل دوم اگر دو طرف نابرابری $|A|\geq|B|$ را به توان دو برسانیم. نتیجه می‌شود $A^2\geq B^2\Rightarrow A^2-B^2\geq 0\Rightarrow(A-B)(A+B)\geq 0$

در نتیجه جواب نامعادلهٔ مورد نظر معادل است با $(x-1+2x-1)(x-1-2x+1)\geq 0\Rightarrow -x(3x-2)\geq 0$

مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله بازهٔ $[0\,.\,\frac{2}{3}]$ است. بنابراین $a=0$ و $b=\frac{2}{3}$. در نتیجه $b-a=\frac{2}{3}$.

تست ۱۸ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|\frac{2-x}{2x-3}|>1$ به صورت کدام بازه است؟

۱) $(1\,.\,\frac{3}{2})$ ۲) $(1\,.\,\frac{5}{3})$ ۳) $(1\,.\,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2}\,.\,\frac{5}{3})$ ۴) $(\frac{3}{2}\,.\,\frac{5}{3})$

راه‌حل

راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که نامعادلهٔ داده شده به‌ازای $x=\frac{3}{2}$ تعریف نشده است. از طرف دیگر.

$$|\frac{2-x}{2x-3}|>1\Rightarrow\frac{|2-x|}{|2x-3|}>1\Rightarrow|2-x|>|2x-3|\Rightarrow(2-x)^2>(2x-3)^2\Rightarrow(2x-3)^2-(2-x)^2<0$$

$$(2x-3+2-x)(2x-3-2+x)<0\Rightarrow(x-1)(3x-5)<0\Rightarrow 1<x<\frac{5}{3}\ ,\ x\neq\frac{3}{2}\Rightarrow x\in(1\,.\,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2}\,.\,\frac{5}{3})$$

راه‌حل دوم دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم

حالت اول $\frac{2-x}{2x-3}<-1\Rightarrow\frac{2-x+2x-3}{2x-3}<0\Rightarrow\frac{x-1}{2x-3}<0\Rightarrow 1<x<\frac{3}{2}$

حالت دوم $\frac{2-x}{2x-3}>1\Rightarrow\frac{2-x-2x+3}{2x-3}>0\Rightarrow\frac{-3x+5}{2x-3}>0\Rightarrow\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$

اجتماع دو ناحیهٔ به‌دست آمده مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است. یعنی $x\in(1\,.\,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2}\,.\,\frac{5}{3})$

تست ۱۹ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-1|-2|x+2|\leq 3$ کدام است؟

۱) $(-\infty\,.\,0]$ ۲) $[0\,.\,+\infty)$ ۳) $[-1\,.\,2]$ ۴) $\mathbb{R}$

راه‌حل

برای اینکه عبارت سمت چپ نامعادله را ساده کنیم. ابتدا $x-1$ و $x+2$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	

بنابراین سه حالت داریم:

حالت اول $x\in(-\infty\,.\,-2)$. در این حالت $x-1<0$ و $x+2<0$. بنابراین $-(x-1)-2(-(x+2))\leq 3\Rightarrow -x+1+2(x+2)\leq 3\Rightarrow x\leq -2$

در نتیجه $x\in(-\infty\,.\,-2)\cap(-\infty\,.\,-2]=(-\infty\,.\,-2)$.

حالت دوم $x\in[-2\,.\,1)$. در این حالت $x-1<0$ و $x+2\geq 0$. بنابراین $-(x-1)-2(x+2)\leq 3\Rightarrow -x+1-2x-4\leq 3\Rightarrow -3x\leq 6\Rightarrow x\geq -2$

در نتیجه $x\in[-2\,.\,1)\cap[-2\,.\,+\infty)=[-2\,.\,1)$.

حالت سوم $x\in[1\,.\,+\infty)$. در این حالت $x-1\geq 0$ و $x+2>0$. بنابراین $x-1-2(x+2)\leq 3\Rightarrow x-1-2x-4\leq 3\Rightarrow -x\leq 8\Rightarrow x\geq -8$

در نتیجه $x\in[1\,.\,+\infty)\cap[-8\,.\,+\infty)=[1\,.\,+\infty)$. بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله مورد نظر برابر است با $(-\infty\,.\,-2)\cup[-2\,.\,1)\cup[1\,.\,+\infty)=\mathbb{R}$.

نکته

برای حل برخی نامعادله‌های قدرمطلقی می‌توانیم از تغییر متغیر استفاده کنیم.

تست ۲۰ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲+|x|<۲$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

راه‌حل فرض کنید $|x|=t$. در نتیجه به نامعادلهٔ $t^۲+t-۲<۰$ می‌رسیم، که جواب آن $-۲<t<۱$ است. پس $-۲<|x|<۱$. واضح است که نابرابری $|x|>-۲$ همواره برقرار است. پس باید جواب نامعادلهٔ $|x|<۱$ را بیابیم که برابر $(-۱,۱)$ است. پس $a=-۱$ و $b=۱$ و در نتیجه $b-a=۲$.

نکته

اگر $|a+b|<|a|+|b|$، آن‌گاه $ab<۰$ و برعکس. از این نکته می‌توانیم در حل برخی نامعادلات قدرمطلقی استفاده کنیم.

تست ۲۱ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x+۲|+|x-۴|>۲|x-۱|$ به‌صورت $|x-a|<b$ است. حاصل $b-۲a$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

راه‌حل نامعادله را به کمک نابرابری مثلث حل می‌کنیم:

$$|۲x-۲|<|x+۲|+|x-۴|\Rightarrow\underbrace{|(x+۲)+(x-۴)|}_{|a+b|}<\underbrace{|x+۲|}_{|a|}+\underbrace{|x-۴|}_{|b|}\Rightarrow(x+۲)(x-۴)<۰\Rightarrow-۲<x<۴$$

نابرابری $-۲<x<۴$ را می‌توان به‌صورت $-۳<x-۱<۳$ نوشت که می‌شود $|x-۱|<۳$. درنتیجه $a=۱$ و $b=۳$، پس $b-۲a=۱$.

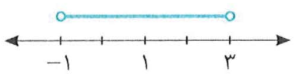
نوشتن نامعادلهٔ قدرمطلقی با داشتن مجموعهٔ جواب‌های آن

اگر $k>۰$، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|<k$ به‌صورت $(-k,k)$ است و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|>k$ به‌صورت $(-\infty,-k)\cup(k,+\infty)$ است. بنابراین اگر بخواهیم نامعادله‌ای قدرمطلقی بنویسیم که مجموعهٔ جواب‌های آن به‌صورت $a<x<b$ باشد، ابتدا از طرف‌های این نابرابری‌ها $\frac{a+b}{۲}$ را کم می‌کنیم تا به نابرابری‌های $\frac{a-b}{۲}<x-\frac{a+b}{۲}<\frac{b-a}{۲}$ برسیم، که می‌توان آن‌ها را به‌صورت $|x-\frac{a+b}{۲}|<\frac{b-a}{۲}$ نوشت. به همین ترتیب اگر بخواهیم نامعادله‌ای قدرمطلقی بنویسیم که مجموعهٔ جواب‌های آن به‌صورت $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ باشد، این نامعادله به‌صورت $|x-\frac{a+b}{۲}|>\frac{b-a}{۲}$ خواهد بود.

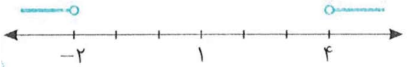
مثال: نامعادلات قدرمطلقی‌ای بنویسید که مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها به‌صورت زیر باشد.

الف) $x\in(-۱,۳)$ ب) $x\in(-\infty,-۲)\cup(۴,+\infty)$

الف) نقاط واقع در بازهٔ $(-۱,۳)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ تمام این نقاط از نقطهٔ وسط این بازه، یعنی $\frac{-۱+۳}{۲}=۱$ کمتر از ۲ واحد است. پس می‌توان نامعادلهٔ $|x-۱|<۲$ را در نظر گرفت که مجموعهٔ جواب‌های آن $(-۱,۳)$ است.

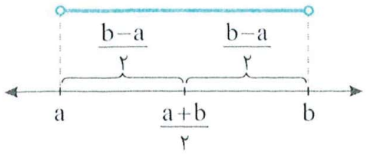


ب) نقاط واقع در بازه‌های $(۴,+\infty)$ و $(-\infty,-۲)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ تمام این نقاط از نقطهٔ $\frac{۴+(-۲)}{۲}=۱$ بیشتر از ۳ واحد است. پس می‌توان نامعادلهٔ $|x-۱|>۳$ را در نظر گرفت که مجموعهٔ جواب‌های آن $(-\infty,-۲)\cup(۴,+\infty)$ است.

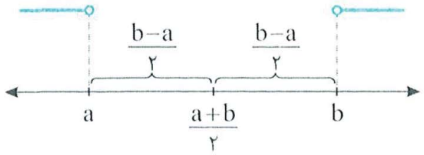


نکته ۳۲۹

الف) مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-\frac{a+b}{2}|<\frac{b-a}{2}$ بازهٔ (a,b) است.



ب) مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-\frac{a+b}{2}|>\frac{b-a}{2}$ به‌صورت $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ است.



تست ۲۲

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۲|x-۳|<x$ با مجموعهٔ جواب‌های کدام نامعادله برابر است؟

۱) $|x-۲|>۴$ ۲) $|x-۲|<۴$ ۳) $|x-۴|>۲$ ۴) $|x-۴|<۲$

راه‌حل

توجه کنید که اگر $x\geq ۳$ ، نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود $۲(x-۳)<x\Rightarrow x<۶\Rightarrow ۳\leq x<۶$

و اگر $x\leq ۳$ ، معادلهٔ مورد نظر می‌شود $-۲(x-۳)<x\Rightarrow x>۲\Rightarrow ۲<x\leq ۳$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(۲,۶)$ است که با مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x-۴|<۲$ برابر است.

دست‌گرمی

۳۵۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x-۲|-۳=۰$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) -۴ ۴) ۴

۳۵۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x|+|-x|+|۳x|=۱۵$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۵۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|۳x-x^۲|=|x-۱|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۵۶- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|۲x-a|\leq ۳$ بازهٔ $[-a,b]$ است. مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵۷- در مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $||x|-۲|<۶$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۳۵۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۲|x|-|x-۲|>۰$ کدام است؟

۱) $(\frac{۲}{۳},+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۲)\cup(\frac{۲}{۳},+\infty)$

۳) $[-۲,\frac{۲}{۳}]$ ۴) $(-\infty,-۲]\cup[\frac{۲}{۳},+\infty)$

۳۵۹- برای چند عدد صحیح مانند x تساوی $|x-۴|+|x-۲|=|۲x-۶|$ برقرار نیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نامتناهی

آزمون ۲۲۰ معادلات و نامعادلات قدرمطلقی (۱)

۲۱۹۱- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $|x^۲-۵x|=۶$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۳۶ ۴) -۳۶

۲۱۹۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|۲۴-۴x|+|۳x-۱۸|=۲۸$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۲۷

۲۱۹۳- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $|x^۲-۲x|=|x^۲+۲x-۴|$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

۲۱۹۴- معادلهٔ $(x-۴)|x|+۳=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۹۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-|x-۱|-۱=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۹۶- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|۳x-۲|\geq ۷$ به‌صورت $\mathbb{R}-(a,b)$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $-\frac{۵}{۹}$ ۳) ۵ ۴) -۵

۲۱۹۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|a-۵|\leq|a+۵|$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $[-۵,۰]$ ۴) $[-۱۰,۰]$

۲۱۹۸- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $|\frac{x-۶}{x-۲}|>۳$ صدق می‌کنند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱۹۹- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $|x^۲-x|>۲x$ صدق نمی‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۲۰۰- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲-۵|x|+۴\leq ۰$ با مجموعهٔ جواب‌های کدام نامعادله برابر است؟

۱) $|x|\leq ۴$ ۲) $|x|\geq ۱$ ۳) $۱\leq|x|\leq ۴$ ۴) $|x|\geq ۴$

سؤال
۲۱۹۱
۲۱۹۲
۲۱۹۳
۲۱۹۴
۲۱۹۵
۲۱۹۶
۲۱۹۷
۲۱۹۸
۲۱۹۹
۲۲۰۰

آزمون ۲۲۱ معادلات و نامعادلات قدرمطلقی (۲)

۲۲۰۱- معادلهٔ $||x-۴|-۱|=۳$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۰۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x^۲-۴x+۳|-۵|x-۱|=۰$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۲۰۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x^۲-۴|=۳x$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) صفر

۲۲۰۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲|x+۳|-۱۸=۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $۴-\sqrt{۱۳}$ ۳) $۵+\sqrt{۱۳}$ ۴) $۵-\sqrt{۱۳}$

۲۲۰۵- اگر معادلهٔ $|x^۲-۶x|=a$ چهار جواب داشته باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $a>۰$ ۲) $a<۹$ ۳) $۰<a<۶$ ۴) $۰<a<۹$

۲۲۰۶- اگر $A=\{x\,||x-۳|\geq ۲\}$ و $B=\{x\,||۲x+۱|\leq ۵\}$، حاصل $A\cap B$ کدام است؟

۱) $[-۳,۵]$ ۲) $[-۳,۵)$ ۳) $[۱,۳]$ ۴) $[-۳,۱]$

۲۲۰۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|۲x-۱|\geq|x+۱|$ بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۰۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $-۱\leq\frac{x-۳}{۲-x}\leq ۱$ به‌صورت $[\frac{a}{b},+\infty)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟ ($\frac{a}{b}$ ساده‌شدنی نیست).

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۲۰۹- اگر $x<|x|<x^۲$، حاصل $|x+۱|+|۱-x|+|x|$ کدام است؟

۱) $-۳x$ ۲) $-۲x$ ۳) $x+۲$ ۴) $۳x$

۲۲۱۰- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x+۱|<x|x|<(x+۱)|x|$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[۰,۱]$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

سؤال	گام
۲۲۰۱	۳۲۶
۲۲۰۲	۳۲۴ ۳۲۶
۲۲۰۳	۲۹۲ ۳۰۳ ۳۲۶
۲۲۰۴	۲۹۲ ۳۲۶
۲۲۰۵	۲۹۴ ۳۲۷
۲۲۰۶	۳۲۷
۲۲۰۷	۳۱۸ ۳۲۷
۲۲۰۸	۳۲۴ ۳۲۷
۲۲۰۹	۳۲۴ ۳۲۷
۲۲۱۰	۳۲۴ ۳۲۷

آزمون ۲۲۲ — معادلات و نامعادلات قدرمطلقی (۳)

۲۲۱۱- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $|x^2-x-6|=6+x-x^2$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۲۱۲- معادلهٔ $||x^2-5|-2|=1$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۲۱۳- معادلهٔ $|x^3-3x|=|x|$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۲۱۴- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x+2|+2|x-1|=5$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $-\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۲۱۵- اگر معادلهٔ $|\frac{x^2}{x+1}|=a$ دو جواب غیرصفر داشته باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $a>0$ ۲) $a\geq 4$ ۳) $2<a<4$ ۴) $0<a<4$

۲۲۱۶- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $||x|-4|>1$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۲۱۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^2-5x+6|<|x^2-7x+10|$ کدام است؟

۱) $(4,+\infty)$ ۲) $(5,+\infty)$ ۳) $(4,5)$ ۴) $(4,6)$

۲۲۱۸- در مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-2x<1+|x-1|$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۲۱۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $||x|-3a|<a^2+2$ تهی است. حدود a کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}\leq a\leq -2$ ۲) $-2\leq a\leq -1$ ۳) $1\leq a\leq 2$ ۴) $\frac{1}{2}\leq a\leq 1$

۲۲۲۰- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x+1|\leq\frac{3}{x-1}$ به‌صورت $\mathbb{R}-[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

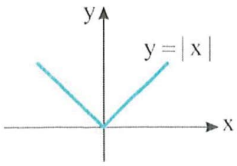
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

سؤال
۲۲۱۱
۲۲۱۲
۲۲۱۳
۲۲۱۴
۲۲۱۵
۲۲۱۶
۲۲۱۷
۲۲۱۸
۲۲۱۹
۲۲۲۰

درس سوم: توابع شامل قدرمطلق

تعریف

۳۳۰



تابع قدرمطلق تابعی است که هر عضو دامنه‌اش را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. اگر f تابع قدرمطلق باشد، نمایش جبری آن $f(x)=|x|$ است. اگر دامنهٔ تابع قدرمطلق مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار آن به‌صورت مقابل است.

تست ۱

اگر $f(x)=|x|-۲$ و $f(a-۱)=۱+۲a$، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $f(a-۱)=|a-۱|-۲$. پس $|a-۱|-۲=۱+۲a$. بنابراین باید معادلهٔ $|a-۱|=۲a+۳$ را حل کنیم:

$$|a-۱|=۲a+۳\Rightarrow\begin{cases}a-۱=۲a+۳\Rightarrow a=-۴ & (غ.ق.ق)\\ a-۱=-۲a-۳\Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

بنابراین $f(a)=f(-\frac{۲}{۳})=|-\frac{۲}{۳}|-۲=-\frac{۴}{۳}$ (توجه کنید که اگر $a=-۴$، آن‌گاه $f(-۴-۱)=f(-۵)=۱+۲(-۴)=-۷$. پس $f(-۵)=|-۵|-۲=۳$. اما از ضابطهٔ f به‌دست می‌آید).

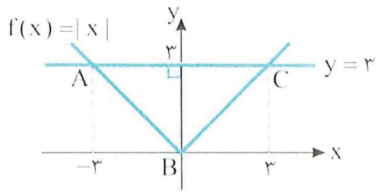
تست ۲

مساحت مثلثی که از برخورد خط $y=۳$ با نمودار تابع $f(x)=|x|$ به‌دست می‌آید، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

راه‌حل

در شکل زیر با توجه به اینکه $AC=۶$ و ارتفاع وارد بر آن برابر ۳ است، مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{۳\times۶}{۲}=۹$.



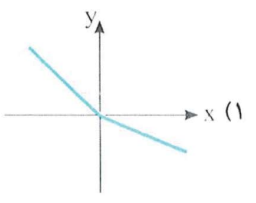
نکته

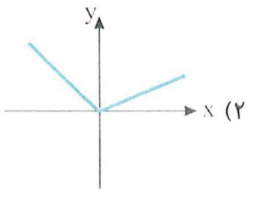
۳۳۱

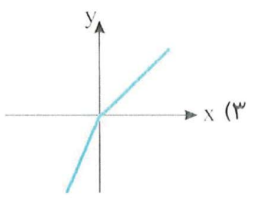
به کمک تعریف قدرمطلق می‌توانیم توابعی را که در ضابطهٔ آن‌ها قدرمطلق وجود دارد به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسیم. بدین منظور، عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و با توجه به علامت عبارت، قدرمطلق را از ضابطهٔ تابع حذف می‌کنیم.

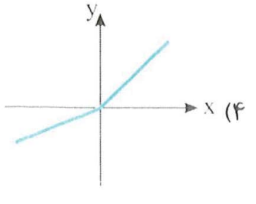
تست ۳

نمودار تابع $f(x)=۲x-|x|$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

راه‌حل

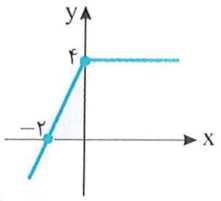
اگر $x\geq۰$، آن‌گاه $|x|=x$، در نتیجه $f(x)=۲x-x=x$. اگر $x<۰$، آن‌گاه $|x|=-x$، در نتیجه $f(x)=۲x-(-x)=۳x$. بنابراین $f(x)=\begin{cases}x & x\geq۰\\ ۳x & x<۰\end{cases}$ که نمودار آن در گزینهٔ (۳) رسم شده است.

تست ۴ مساحت ناحیهٔ محصور به محورهای مختصات و نمودار تابع $f(x)=x-|x|+4$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$x\geq 0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow f(x)=4$$
$$x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow f(x)=2x+4$$



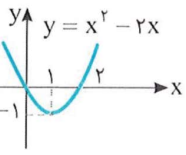
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. مساحت قسمت رنگی مورد نظر است که برابر $\frac{4\times 2}{2}=4$ است.

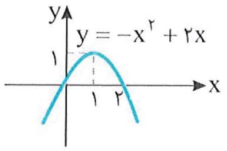
تست ۵ نمودار تابع $f(x)=(x-2)|x|$ خط $y=k$ را در سه نقطه قطع می‌کند. حدود k کدام است؟

۱) $-1<k<0$ ۲) $0<k<1$ ۳) $-2<k<0$ ۴) $-1<k<1$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

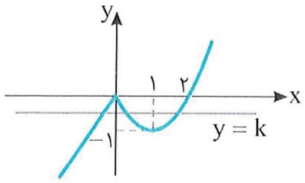
$$f(x)=\begin{cases}(x-2)x & x\geq 0\\ -x(x-2) & x\leq 0\end{cases}=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 0\\ -x^2+2x & x\leq 0\end{cases}.$$



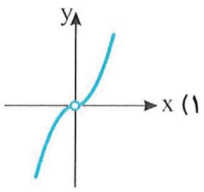


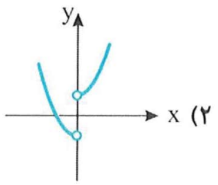
بنابراین باید سهمی به معادلهٔ $y=x^2-2x$ و سهمی به معادلهٔ $y=-x^2+2x$ را رسم کنیم، سپس نمودار تابع f را رسم کنیم.

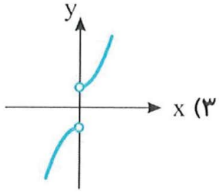
نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و اگر خط $y=k$ نمودار تابع f را در سه نقطه قطع کند، باید $-1<k<0$.

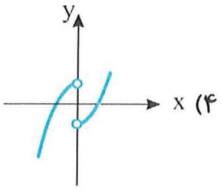


تست ۶ نمودار تابع $f(x)=|x|(x+\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

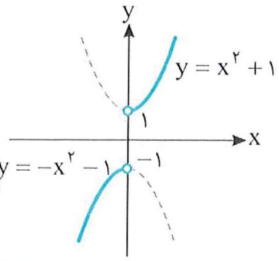
راه‌حل توجه کنید که دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}-\{0\}$ است. برای $x>0$ ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x>0 \Rightarrow f(x)=x(x+\frac{1}{x})=x^2+1$$

برای $x<0$ نیز ضابطهٔ تابع به شکل مقابل است:

$$x<0 \Rightarrow f(x)=-x(x+\frac{1}{x})=-x^2-1$$

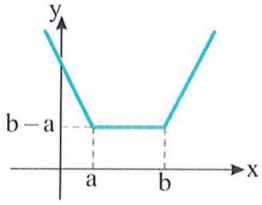
بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو است.



نکته چند تابع قدرمطلقی معروف

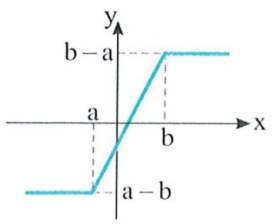
- اگر $a<b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|+|x-b|$ به‌صورت مقابل است.

توجه کنید که کمترین مقدار تابع f برابر با $b-a$ است.



- اگر $a<b$، آن‌گاه نمودار تابع $f(x)=|x-a|-|x-b|$ به‌صورت مقابل است.

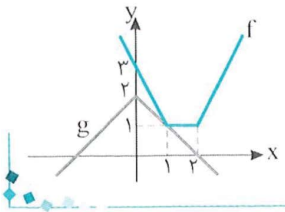
توجه کنید که کمترین مقدار تابع f برابر $a-b$ و بیشترین مقدار این تابع برابر $b-a$ است.



تست ۷ نمودار توابع $f(x)=|x-1|+|x-2|$ و $g(x)=2-|x|$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل نمودار تابع f را به کمک نقاط $(1,1)$، $(2,1)$، $(3,3)$ و $(0,3)$ رسم می‌کنیم. نمودار تابع g هم از قرینه کردن نمودار تابع $y=|x|$ نسبت به محور طول‌ها و سپس دو واحد بالا بردن آن به‌دست می‌آید. پس دو نمودار فقط در نقطهٔ $(1,1)$ مشترک هستند.



تست ۸ اگر a و b به‌ترتیب بیشترین و کمترین مقدار عبارت $6+|x+3|-|x-2|$ باشند، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۱۰

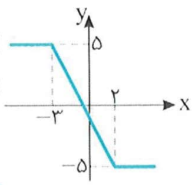
راه‌حل راه‌حل اول توجه کنید که

$$|x-2|-|x+3|=\begin{cases}-(x-2)+(x+3) & x\le -3\\ -(x-2)-(x+3) & -3<x\le 2\\ x-2-(x+3) & x>2\end{cases}=\begin{cases}5 & x\le -3\\ -2x-1 & -3<x\le 2\\ -5 & x>2\end{cases}$$

از طرف دیگر، $-3<x\le 2\Rightarrow -4\le -2x<6\Rightarrow -5\le -2x-1<5$

بنابراین کمترین و بیشترین مقدار عبارت $|x+3|-|x-2|$ به‌ترتیب -5 و 5 است. در نتیجه کمترین و بیشترین مقدار عبارت مورد نظر به‌ترتیب 1 و 11 است. به این ترتیب، $a-b=11-1=10$.

راه‌حل دوم نمودار تابع پیوستهٔ $f(x)=|x-2|-|x+3|+6$ از تعدادی نیم‌خط و پاره‌خط تشکیل شده است. بنابراین، بیشترین مقدار و کمترین مقدار آن (در صورت وجود) در نقطه‌های شکستگی نمودار به‌دست می‌آیند. نمودار تابع در نقطه‌هایی به طول $x=2$ و $x=-3$ شکستگی دارد. چون $f(2)=1$ و $f(-3)=11$، پس $a=11$ و $b=1$، در نتیجه $a-b=10$.



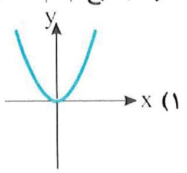
راه‌حل سوم نمودار تابع $f(x)=|x-2|-|x+3|$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل کمترین و بیشترین مقدار تابع f به‌ترتیب برابر -5 و 5 است. بنابراین $a=5+6=11$ و $b=-5+6=1$، در نتیجه $a-b=10$.

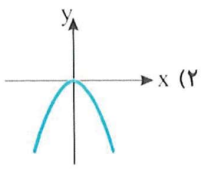
دست‌گرمی

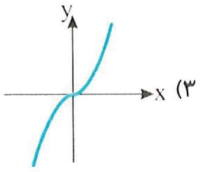
۳۶۰- در تابع $f(x)=5|3x-2|-3|5x-2|$ حاصل $f(\sqrt{2}-2)+f(\sqrt{3}-1)$ کدام است؟

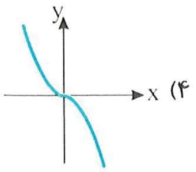
۱) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ ۲) ۴ ۳) $30\sqrt{3}-30\sqrt{5}$ ۴) صفر

۳۶۱- نمودار تابع $f(x)=x|x|$ کدام است؟

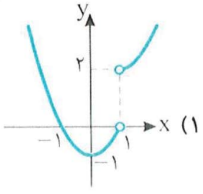
۱) 

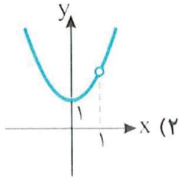
۲) 

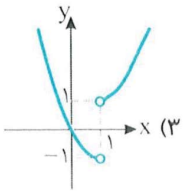
۳) 

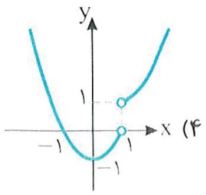
۴) 

۳۶۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}+x^2$ کدام است؟

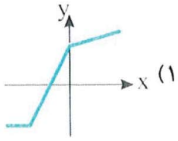
۱) 

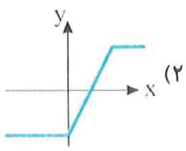
۲) 

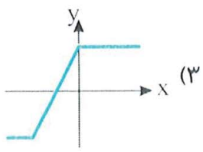
۳) 

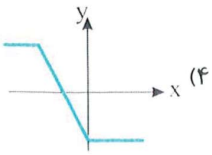
۴) 

۳۶۳- نمودار تابع $f(x)=|x+1|-|x|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

آزمون ۲۲۳ — توابع شامل قدرمطلق (۱)

۲۲۲۱- در تابع $f(x)=۵|۳x-۱|+۳|۵x-۴|$ حاصل $f(\sqrt{۲}-۱)+f(\sqrt{۳}-۱)$ کدام است؟

۱) $۱۵(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$ ۲) $۱۵(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$ ۳) ۷ ۴) ۱۴

۲۲۲۲- برد تابع $f(x)=\frac{|x+۱|}{x+۱}-\frac{۱-x}{|x-۱|}$ چند عضو دارد؟

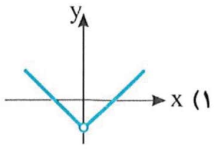
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

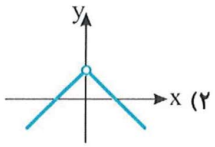
۲۲۲۳- کدام تابع با تابع $f(x)=\big|۲x-|x-|x|\big|\big|$ برابر است؟

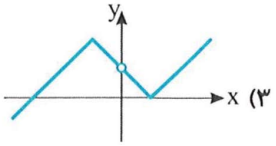
۱) $y=\begin{cases}۴x & x<۰\\ -x & x\geq ۰\end{cases}$ ۲) $y=\begin{cases}۰ & x<۰\\ -x & x\geq ۰\end{cases}$

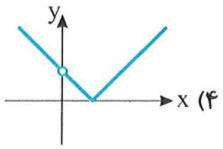
۳) $y=\begin{cases}-۴x & x<۰\\ ۲x & x\geq ۰\end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases}x & x<۰\\ -۴x & x\geq ۰\end{cases}$

۲۲۲۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲|x|-x^۲}{|x|}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۲۲۵- نمودار تابع $f(x)=|x|(۱-\frac{۱}{x})$ خط $y=k$ را در دو نقطه قطع می‌کند. حدود k کدام است؟

۱) $k<-۱$ ۲) $k<۱$ ۳) $k>۱$ ۴) $k>-۱$

۲۲۲۶- نمودار تابع $f(x)=|x-۲|-|x+۱|$ و خط $y=k$ فقط در یک نقطه با طول مثبت متقاطع‌اند. حدود k کدام است؟

۱) $-۳<k<۱$ ۲) $-۳<k<۳$ ۳) $-۳<k<۰$ ۴) $۰<k<۳$

۲۲۲۷- حداکثر مقدار عبارت $\frac{۱۵}{|x-۱|+|x-۴|}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۳

۲۲۲۸- اگر مساحت ناحیهٔ محصور به نمودار تابع $f(x)=|x-۲a^۲|-a^۲$ و محور طول‌ها برابر ۴ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\pm\sqrt[۴]{۲}$ ۲) $\pm\sqrt{۲}$ ۳) ±۲ ۴) $\pm۲\sqrt{۲}$

۲۲۲۹- مساحت ناحیهٔ بین نمودار تابع‌های $y=|x|-۱$ و $y=۱-|x|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۲۲۳۰- برد تابع $f(x)=x^۲-۲|x-۱|$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $[-۳,+\infty)$ ۴) $[-۲,+\infty)$

سؤال
۲۲۲۱
۲۲۲۲
۲۲۲۳
۲۲۲۴
۲۲۲۵
۲۲۲۶
۲۲۲۷
۲۲۲۸
۲۲۲۹
۲۲۳۰

آزمون ۲۲۴ توابع شامل قدرمطلق (۲)

سؤال	گام
۲۲۳۱	۳۲۴ ۳۳۰
۲۲۳۲	۱۱ ۳۱۲ ۳۳۱
۲۲۳۳	۲۳ ۳۱۲ ۳۳۱
۲۲۳۴	۱۱ ۳۳۱
۲۲۳۵	۱۱ ۳۹ ۳۳۱
۲۲۳۶	۳۲ ۳۳ ۳۲۴ ۳۳۰ ۳۳۱
۲۲۳۷	۳۲۴ ۳۳۱
۲۲۳۸	۳۲۴ ۳۳۱
۲۲۳۹	۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۳۰ ۳۵۲
۲۲۴۰	۳۱ ۳۳ ۳۳۰

۲۲۳۱- اگر $f(x)=|x-۲|+۱$، ساده شدهٔ عبارت $f(۲-|a|)-۲f(۲+|a|)+۱$ کدام است؟

۱) $-|a|$ ۲) $-|a|+۱$ ۳) $-|a|-۱$ ۴) صفر

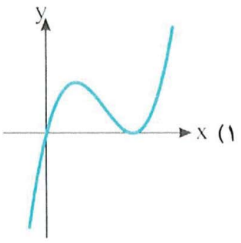
۲۲۳۲- برد تابع $f(x)=\frac{x^۲|x^۲-۱|}{x^۲-۱}$ به‌صورت $(-a,b)\cup(a,+\infty)$ است. مقدار $a-b$ کدام است؟

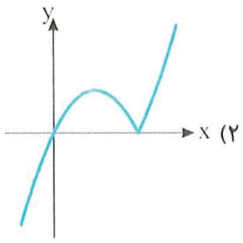
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

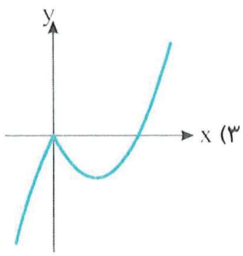
۲۲۳۳- اگر $۰\le x\le ۲$، حداکثر مقدار تابع $f(x)=|x^۲-۴|-|x^۲-۲x|$ کدام است؟

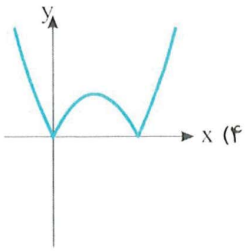
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) صفر

۲۲۳۴- نمودار تابع $f(x)=x|x-۲|$ کدام است؟

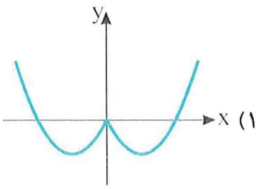
۱) 

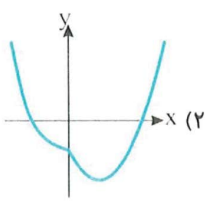
۲) 

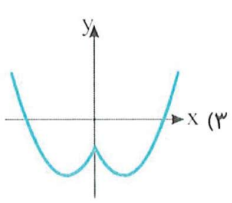
۳) 

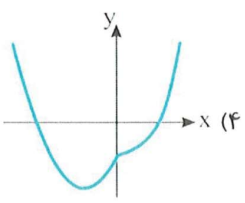
۴) 

۲۲۳۵- نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲|x|-۲$ کدام است؟

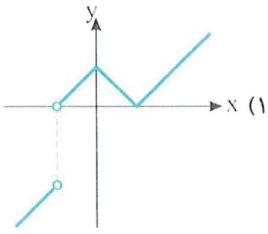
۱) 

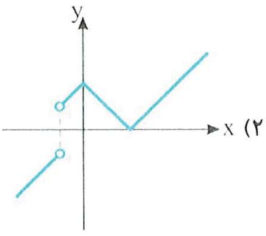
۲) 

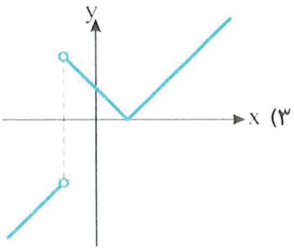
۳) 

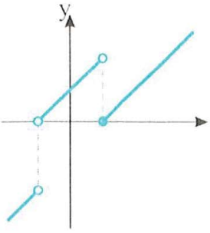
۴) 

۲۲۳۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x^۲-۴|}{x+۲}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۲۳۷- نمودار تابع $f(x)=|x|-|x-۲|-۲|x+۱|$ روی بازهٔ $[a,b]$ یک پاره‌خط افقی است. حداکثر طول این بازه کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۳۸- مساحت مثلث محدود به نمودار تابع $f(x)=x-|۲x-۳|$ و محور طول‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۲۳۹- از برخورد نمودار تابع‌های $y=|x-۳|$ و $y=۶-|x-۳|$ یک مربع تشکیل می‌شود. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۲۲۴۰- مساحت ناحیهٔ بین نمودار تابع‌های $y=|x|-۲$ و $y=۱-|x|$ کدام است؟

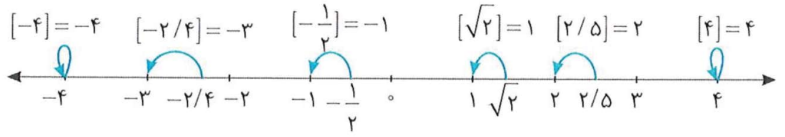
۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

درس چهارم: جزء صحیح و ویژگی‌های آن

تعریف

جزء صحیح هر عدد حقیقی، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از این عدد کوچک‌تر یا با آن برابر است. جزء صحیح عدد حقیقی x را با $[x]$ نشان می‌دهیم.

مثال:



نکته ویژگی‌های جزء صحیح

۱) اگر x عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x]=x$ و برعکس.

۲) اگر n عددی صحیح باشد و $n\le x<n+1$، آن‌گاه $[x]=n$ و برعکس.

۳) $x-1<[x]\le x$ و $[x]\le x<[x]+1$.

۴) $0\le x-[x]<1$.

۵) اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$ و برعکس.

۶) $[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$. (این تساوی به‌صورت $[-x]+[x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ نیز بیان می‌شود.)

تست ۱ اگر $-1\le x<3$، حاصل $\left[\frac{x+1}{2}\right]$ چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که

$$-1\le x<3 \xrightarrow{+1} 0\le x+1<4 \xrightarrow{\div 2} 0\le\frac{x+1}{2}<2\Rightarrow\left[\frac{x+1}{2}\right]=0\text{ یا }1$$

تست ۲ حاصل $[x^3]+[2x]$ به ازای $x=-\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -6 ۳) -5 ۴) -8

راه‌حل ابتدا $x=-\sqrt{2}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$[(-\sqrt{2})^3]+[2(-\sqrt{2})]=[-\sqrt{8}]+[-2\sqrt{2}]=[-2\sqrt{2}]+[-2\sqrt{2}]=2[-2\sqrt{2}]$$

با توجه به مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید

$$1<\sqrt{2}<1/5\Rightarrow 2<2\sqrt{2}<3\Rightarrow -3<-2\sqrt{2}<-2\Rightarrow[-2\sqrt{2}]=-3\Rightarrow 2[-2\sqrt{2}]=-6$$

تست ۳ اگر $[x]=3$ و $[y]=5$، حاصل $[x+y]$ چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که $[x]=3$ نتیجه می‌دهد $3\le x<4$ و $[y]=5$ نتیجه می‌دهد $5\le y<6$. اگر این دو نابرابری را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید $8\le x+y<10$، بنابراین $[x+y]$ یکی از عددهای صحیح ۸ یا ۹ است.

تست ۴ اگر $[\frac{1-4x}{3}]=-2$، مقدار $[-x]$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

راه‌حل چون $[\frac{1-4x}{3}]=-2$، پس

$$-2\leq\frac{1-4x}{3}<-1\Rightarrow-6\leq1-4x<-3\Rightarrow-7\leq-4x<-4\Rightarrow-\frac{7}{4}\leq-x<-1\Rightarrow[-x]=-2$$

تست ۵ اگر $[x]=0$ و $x\neq0$، مقدار عبارت $[-x]+[-x^2]+[-x^3]+\cdots+[-x^{100}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۰۰ ۳) -100 ۴) -50

راه‌حل چون $[x]=0$ و $x\neq0$، پس $-1<x<1$. در نتیجه هر توانی از x هم بین ۰ و ۱ است. بنابراین

$$0<x<1\Rightarrow-1<-x<0\Rightarrow[-x]=-1\,,\quad 0<x^2<1\Rightarrow-1<-x^2<0\Rightarrow[-x^2]=-1$$

$$0<x^3<1\Rightarrow-1<-x^3<0\Rightarrow[-x^3]=-1\,,\quad\cdots\,,\quad 0<x^{100}<1\Rightarrow-1<-x^{100}<0\Rightarrow[-x^{100}]=-1$$

به این ترتیب، مجموع مورد نظر برابر است با -100.

تست ۶ اگر x عددی غیرصحیح باشد، حاصل $[x^2-1]+[2-x^2]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) صفر یا -1 ۴) صفر یا ۱

راه‌حل می‌دانیم عدد صحیح را می‌توان از داخل جزء صحیح بیرون آورد، پس $[x^2-1]+[2-x^2]=[x^2]-1+2+[-x^2]=[x^2]+[-x^2]+1$

می‌دانیم $[a]+[-a]$ به ازای مقدارهای صحیح a برابر صفر و برای مقدارهای غیر صحیح a برابر -1 است. اگر x عددی غیرصحیح باشد، x^2 می‌تواند صحیح باشد (مثل $x=\sqrt{2}$) یا غیرصحیح باشد (مثل $x=\frac{1}{2}$). بنابراین $[x^2]+[-x^2]+1$ می‌تواند برابر صفر یا ۱ باشد.

تست ۷ اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $[\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}]$ کدام است؟

۱) $2n$ ۲) $2n-1$ ۳) n ۴) $n+1$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $n(n+1)(n+2)>n\times n\times n=n^3$

از طرف دیگر،

$$n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n=n^3+3n^2+3n+1-n-1=(n+1)^3-n-1<(n+1)^3$$

به این ترتیب

$$n^3<n(n+1)(n+2)<(n+1)^3\Rightarrow n<\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}<n+1\Rightarrow[\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}]=n$$

نکته ۳۳۴

اگر k عدد صحیحی باشد، مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]=k$ بازهٔ $[k\,.\,k+1)$ است و اگر k عدد غیرصحیحی باشد، این معادله جواب ندارد.

تست ۸ معادله $[x]+2[x-1]=m$ جواب دارد. مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل توجه کنید اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. پس معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$[x]-1+2[x]=m\Rightarrow3[x]=m+1\Rightarrow[x]=\frac{m+1}{3}$$

اگر $\frac{m+1}{3}$ عدد صحیحی باشد، آن‌گاه معادله بالا جواب دارد. با توجه به گزینه‌های داده شده، به ازای $m=2$ مقدار $\frac{m+1}{3}$ صحیح است.

تست ۹ مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]-[x+2]+[x+4]=18$ کدام است؟

۱) $[17,18)$ ۲) $[16,18)$ ۳) $[16,17)$ ۴) $[15,17)$

راه‌حل توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$[x]-[x+2]+[x+4]=18\Rightarrow[x]-([x]+2)+[x]+4=18\Rightarrow[x]=16\Rightarrow 16\le x<17$$

تست ۱۰ مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+1]+[x-[x]]=2$ به‌صورت $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$[x+1]+[x-[x]]=2\Rightarrow[x]+1+[x]-[x]=2\Rightarrow[x]=1$$

در نتیجه $1\le x<2$، پس $a=1$ و $b=2$. بنابراین $b-a=1$.

تست ۱۱ مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[4-x]+[x-3]=0$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $[0,+\infty)$

راه‌حل با توجه به ویژگی‌های (۵) و (۶)،

$$[4-x]+[x-3]=0\Rightarrow 4+[-x]+[x]-3=0\Rightarrow[x]+[-x]=-1\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

تست ۱۲ مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]^2-5[x]+6=0$ کدام است؟

۱) $[2,3)$ ۲) $[3,4)$ ۳) $[0,4)$ ۴) $[2,4)$

راه‌حل فرض می‌کنیم $[x]=t$. در این صورت

$$t^2-5t+6=0\Rightarrow(t-3)(t-2)=0\Rightarrow t=2\ \text{یا}\ t=3\Rightarrow[x]=2,[x]=3$$

اگر $[x]=2$، آن‌گاه $x\in[2,3)$ و اگر $[x]=3$، آن‌گاه $x\in[3,4)$. در نتیجه مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر بازهٔ $[2,4)$ است.

دست‌گرمی

۳۶۴- حاصل $[\frac{1}{2}]+[\frac{2}{2}]+\cdots+[\frac{20}{2}]$ چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۳۰ ۴) ۱۲۰

۳۶۵- اگر $x^2+x<0$، حاصل $[x]+[x^2]+\cdots+[x^{10}]$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -10 ۳) ۵ ۴) -5

۳۶۶- اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $[\sqrt[3]{n^3+3n^2}]$ برابر کدام است؟

۱) n ۲) $n+1$ ۳) $n-1$ ۴) $2n-1$

۳۶۷- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x+[x]]=[x-[x]]-2$ کدام است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $[-1,0)$ ۴) $[-2,0)$

آزمون ۲۲۵ جزء صحیح و ویژگی‌های آن (۱)

۲۲۴۱- اگر $x^3=-20$، مقدار $[2x]$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -5 ۳) -4 ۴) -3

۲۲۴۲- مقدار عبارت $A=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{25}]$ کدام است؟

۱) ۷۳ ۲) ۷۵ ۳) ۷۶ ۴) ۷۸

۲۲۴۳- اگر $[x]=2$، مجموعهٔ مقدارهای $[3x-5]$ کدام است؟

۱) $\{1,2,3\}$ ۲) $\{1,2,3,4\}$ ۳) $\{2,3,4\}$ ۴) $\{2,3\}$

۲۲۴۴- اگر $[\frac{5-x}{2}]=-3$، حدود x کدام است؟

۱) $[9,11)$ ۲) $(-11,11)$ ۳) $[-11,-9]$ ۴) $(9,11]$

۲۲۴۵- اگر $[3x-2]=1$، آن‌گاه $[2x-3]$ کدام است؟

۱) فقط -1 ۲) -2 ۳) -1 یا صفر ۴) فقط صفر

۲۲۴۶- اگر n عددی طبیعی باشد، مقدار $[\sqrt{4n^2-2n+1}]$ کدام است؟

۱) n ۲) $2n-1$ ۳) $2n$ ۴) $3n-2$

۲۲۴۷- اگر مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{5-x}{2}]=-4$ بازهٔ $(a,b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۴۸- اگر $2[x+2]-[x-1]=7$، حدود x کدام است؟

۱) $1\le x<2$ ۲) $2\le x<3$ ۳) $3\le x<4$ ۴) $4\le x<5$

۲۲۴۹- اگر $[x+[x-3]]=3$ و حدود x بازهٔ $[a,b)$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۲۲۵۰- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $3\le[x]\le4$ به‌صورت $[a,b)$ است، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

سؤال	گام
۲۲۴۱	۳۳۳
۲۲۴۲	۳۳۳
۲۲۴۳	۳۳۳
۲۲۴۴	۳۳۳
۲۲۴۵	۳۳۳
۲۲۴۶	۲۷۵ ۳۳۳
۲۲۴۷	۳۳۴
۲۲۴۸	۳۳۳ ۳۳۴
۲۲۴۹	۳۳۳ ۳۳۴
۲۲۵۰	۳۳۳ ۳۳۴

آزمون ۲۲۶ جزء صحیح و ویژگی‌های آن (۲)

۲۲۵۱- مقدار عبارت $A=[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{63}]$ کدام است؟

۱) ۱۵۵ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۵۷ ۴) ۱۵۸

۲۲۵۲- مقدار عبارت $A=[-\sqrt{10}]+[-\sqrt{9}]+[-\sqrt{8}]+\cdots+[\sqrt{10}]$ کدام است؟

۱) -5 ۲) -6 ۳) -7 ۴) -8

۲۲۵۳- اگر $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$، مقدار عبارت $[3x]-[\frac{2}{3x}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) صفر

۲۲۵۴- اگر $[x]=[y]=2$، حاصل $[\frac{2x+3y}{5}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) فقط ۲ ۳) فقط ۳ ۴) ۲ یا ۳

۲۲۵۵- اگر $[x]=2$، عبارت $[x^2-4x]$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۵۶- اگر $[x^2+x]=-1$، مقدار $[x^{10}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۲۵۷- اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $[\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}]$ کدام است؟

۱) $n-1$ ۲) n ۳) $n+1$ ۴) $n+2$

۲۲۵۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $3|x|+2[x]=1$ که در بازهٔ $(-2,1)$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $-\frac{7}{3}$ ۴) صفر

۲۲۵۹- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[x]^2+5[x-1]+11=0$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

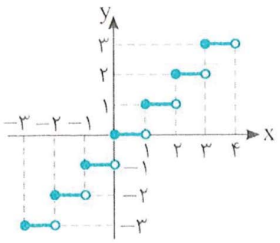
۲۲۶۰- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $[\frac{2[x]+1}{5}]=3$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سؤال
۲۲۵۱
۲۲۵۲
۲۲۵۳
۲۲۵۴
۲۲۵۵
۲۲۵۶
۲۲۵۷
۲۲۵۸
۲۲۵۹
۲۲۶۰

درس پنجم: تابع جزء صحیح

تعریف به تابعی که به هر عدد حقیقی جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد. **تابع جزء صحیح** می‌گوییم.



$$f(x)=[x]$$
$$D_f=\mathbb{R}$$
$$R_f=\mathbb{Z}$$

تست ۱ اگر x عددی غیرصحیح باشد و $f(x)=[x]$، حاصل $f(f(x)-x)$ کدام است؟

۱) صفر یا -1 ۲) فقط -1 ۳) فقط ۱ ۴) صفر یا ۱

راه‌حل می‌دانیم حاصل $[x]$ همواره عددی صحیح است و عددهای صحیح را می‌توان از جزء صحیح به بیرون منتقل کرد. پس

$$f(f(x)-x)=[[x]-x]=[x]+[-x]$$

تابع $y=[x]+[-x]$ به ازای همهٔ عددهای غیرصحیح برابر -1 است. بنابراین $f(f(x)-x)=-1$.

تست ۲ برد تابع $f(x)=1-x+[x]$ کدام است؟

۱) $(0,1]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[0,1)$ ۴) $(0,1)$

راه‌حل توجه کنید که برای هر x حقیقی نابرابری $0\le x-[x]<1$ برقرار است. بنابراین

$$-1<-x+[x]\le 0\Rightarrow 0<1-x+[x]\le 1\Rightarrow 0<f(x)\le 1\Rightarrow R_f=(0,1]$$

تست ۳ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{2[x]-6}$ کدام است؟

۱) $[4,+\infty)$ ۲) $(-\infty,3)$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-[3,4)$

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\{x\,|\,2[x]-6\neq 0\}$. از طرف دیگر، $2[x]-6=0\Rightarrow[x]=3\Rightarrow 3\le x<4\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[3,4)$

تست ۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{3-2[-x]}$ کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $[-1,+\infty)$ ۳) $(-2,+\infty)$ ۴) $[\frac{5}{2},+\infty)$

راه‌حل باید $3-2[-x]\ge 0$، یعنی $[-x]\le\frac{3}{2}$، در نتیجه $[-x]\le 2$. چون $[-x]$ عددی صحیح است و $[-x]\le\frac{3}{2}$، پس $[-x]\le 1$. اما می‌دانیم اگر n عددی صحیح باشد و $[x]\le n$، آن‌گاه $x<n+1$. بنابراین

$$[-x]\le 1\Rightarrow -x<2\Rightarrow x>-2\Rightarrow D_f=(-2,+\infty)$$

تست ۵ چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2[x]-[x]^2}$ قرار دارند؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

راه‌حل توجه کنید که $D_f=\{x\,|\,2[x]-[x]^2\ge 0\}$. اگر فرض کنیم $[x]=t$، آن‌گاه

$$2[x]-[x]^2\ge 0\Rightarrow 2t-t^2\ge 0\Rightarrow 0\le t\le 2$$

بنابراین $0\le[x]\le 2$، پس $0\le x<3$، یعنی $D_f=[0,3)$ و سه عدد صحیح ۰، ۱ و ۲ در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

تست ۶ تابع $f(x)=[\frac{1}{x^2+1}]$ با کدام‌یک از توابع زیر برابر است؟

۱) $g(x)=0$ ۲) $h(x)=[\frac{1}{x^2+2}]$ ۳) $k(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}-1 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ ۴) $t(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

راه‌حل دامنهٔ همهٔ توابع داده شده برابر $\mathbb{R}$ است. بنابراین کافی است تساوی ضابطه‌ها را بررسی کنیم. توجه کنید که $f(0)=[\frac{1}{0+1}]=1$ و اگر $x\neq 0$، آن‌گاه

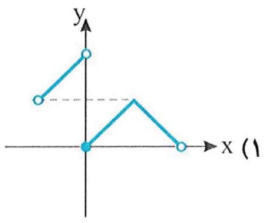
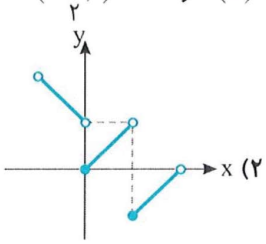
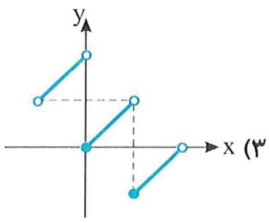
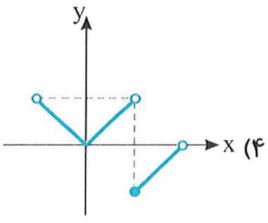
$$x^2>0\Rightarrow x^2+1>1>0\Rightarrow 0<\frac{1}{x^2+1}<1\Rightarrow[\frac{1}{x^2+1}]=0\Rightarrow f(x)=0$$

بنابراین تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ است. پس تابع f با تابع t برابر است. دقت کنید که $h(x)=0$ و $k(x)=\begin{cases}0 & x>0\\ 1 & x=0\\ -2 & x<0\end{cases}$.

نکته **رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح** ۳۳۶

برای رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح، ابتدا به کمک بازه‌بندی، به‌جای جزء صحیح در ضابطهٔ تابع عدد صحیح برابر آن را قرار می‌دهیم، سپس نمودار را رسم می‌کنیم.

تست ۷ نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-[2x]$ و دامنهٔ $(-\frac{1}{2},1)$ کدام است؟

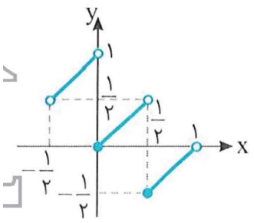
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

راه‌حل ابتدا توجه کنید که اگر $-\frac{1}{2}<x<1$، آن‌گاه $-1<2x<2$. بنابراین

$$-1<2x<0\Rightarrow[2x]=-1\Rightarrow f(x)=x+1,\quad -\frac{1}{2}<x<0$$

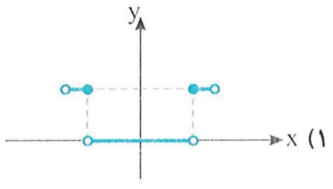
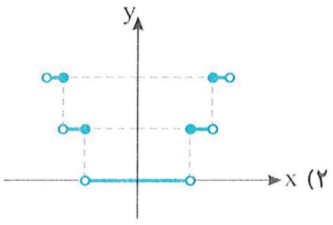
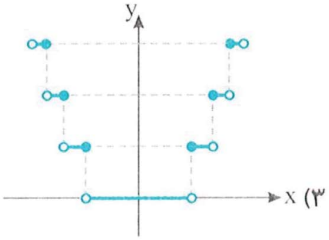
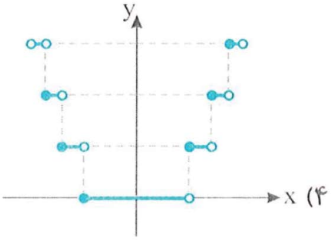
$$0\leq 2x<1\Rightarrow[2x]=0\Rightarrow f(x)=x,\quad 0\leq x<\frac{1}{2}$$

$$1\leq 2x<2\Rightarrow[2x]=1\Rightarrow f(x)=x-1,\quad \frac{1}{2}\leq x<1$$



بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است.

تست ۸ نمودار تابع $f(x)=[x^2]$ با دامنهٔ $(-2,2)$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

راه‌حل

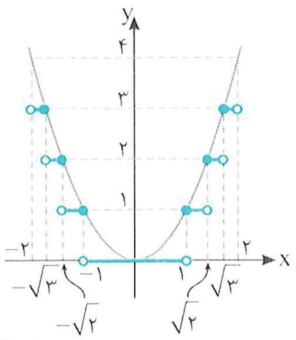
ابتدا توجه کنید که از $-۲<x<۲$ نتیجه می‌شود $۰\leq x^۲<۴$. بنابراین ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۰\leq x^۲<۱\Rightarrow f(x)=۰\ ,\ -۱<x<۱\ ,\quad ۱\leq x^۲<۲\Rightarrow f(x)=۱\ ,\ -\sqrt{۲}<x\leq -۱ \text{ یا } ۱\leq x<\sqrt{۲}$$

$$۲\leq x^۲<۳\Rightarrow f(x)=۲\ ,\ -\sqrt{۳}<x\leq -\sqrt{۲} \text{ یا } \sqrt{۲}\leq x<\sqrt{۳}$$

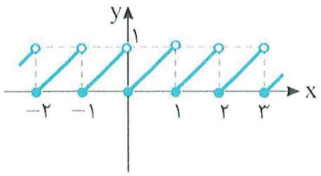
$$۳\leq x^۲<۴\Rightarrow f(x)=۳\ ,\ -۲<x\leq -\sqrt{۳} \text{ یا } \sqrt{۳}\leq x<۲$$

بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو است.

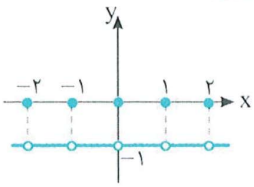


نکته ۳۳۷

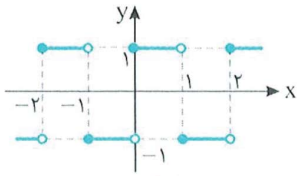
نمودار چند تابع معروف شامل جزء صحیح به‌صورت زیر است.



$y=x-[x]$



$y=[x]+[-x]$



$y=(-۱)^{[x]}$

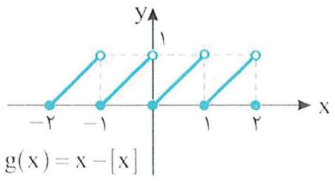
تست ۹

نمودار تابع $f(x)=۲x-[۲x]$ با خط $y=\frac{۱}{۲}$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ در چند نقطه متقاطع است؟

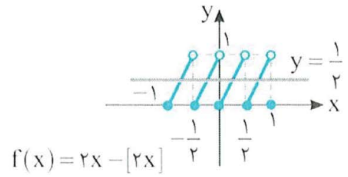
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل

توجه کنید نمودار تابع f از روی نمودار تابع $g(x)=x-[x]$ به‌دست می‌آید. کافی است طول نقاط روی نمودار تابع g را نصف کنیم. در این صورت، از روی نمودار تابع f معلوم می‌شود که این نمودار در بازهٔ $[-۱,۱]$ خط $y=\frac{۱}{۲}$ را در چهار نقطه قطع می‌کند.



$g(x)=x-[x]$



$f(x)=۲x-[۲x]$

دست‌گرمی

۳۶۸- اگر $f(x)=|[۵x]+[۷x]|$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۶۹- اگر $f(x)=۴x-[x]-[۳x]$، حاصل $f(x+۱)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $f(x)-۱$ ۴) $-f(x)+۱$

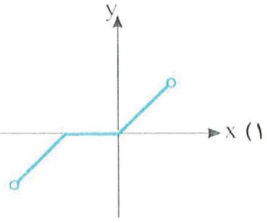
۳۷۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{[x]-۲}$ کدام است؟

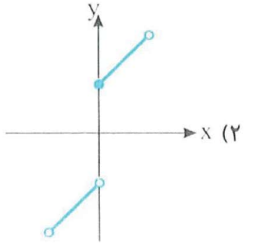
۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $[۳,+\infty)$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}-(۰,۲)$

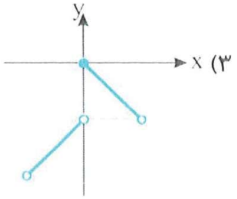
۳۷۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{[\frac{x}{۳}]-۲}$ به‌صورت $\mathbb{R}-[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

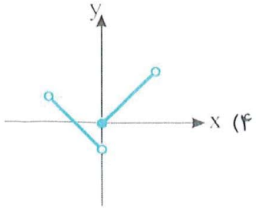
۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۳۷۲- نمودار تابع $f(x)=|x|+[\frac{x}{۲}]$ روی بازهٔ $(-۲,۲)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


آزمون ۲۲۷ تابع جزء صحیح (۱)

۲۲۶۱- اگر $f(x)=[\frac{x}{۲}]-[\frac{x+۱}{۲}]$، حاصل $f(x+۳)+f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $-[x]-۱$ ۴) $-[x]$

۲۲۶۲- تابع $f(x)=[x-۲]+|x-۳|$ روی بازهٔ $[۱,۲)$ با کدام تابع مساوی است؟

۱) $y=-x-۲$ ۲) $y=-x+۲$ ۳) $y=x-۲$ ۴) $y=x-۱$

۲۲۶۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{[\frac{x}{۲}]-۱}$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۲۶۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{[x]+۲}+\sqrt{۳-[x]}$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲۶۵- برد تابع $f(x)=[x]-|x|$ با دامنهٔ $[-۱,۲)$ کدام است؟

۱) $[-۲,۰]-\{-۱\}$ ۲) $(-۱,۱]$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[-۲,-۱)$

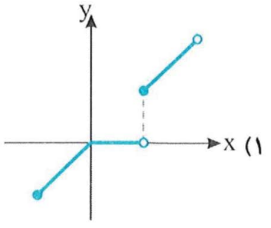
۲۲۶۶- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{[|x+۱|-۲]}}$ کدام است؟

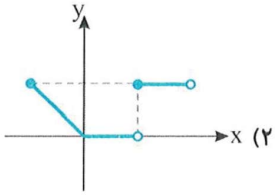
۱) $[۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۴]$ ۳) $[-۴,۲]$ ۴) $(-\infty,-۴]\cup[۲,+\infty)$

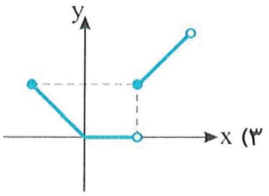
۲۲۶۷- نمودار تابع $y=x^۲$ در چند نقطه نمودار تابع $y=[x]$ را قطع می‌کند؟

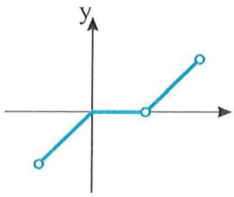
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۲۶۸- نمودار تابع $f(x)=x[x]$ روی بازهٔ $[-۱,۲)$ کدام است؟

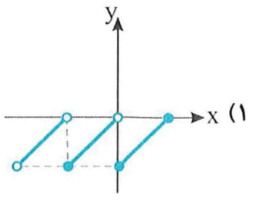
۱)


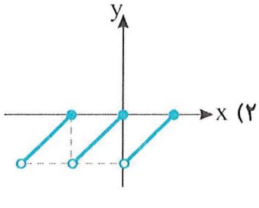
۲)


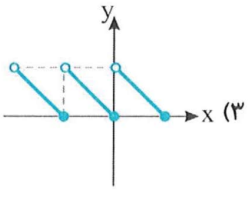
۳)


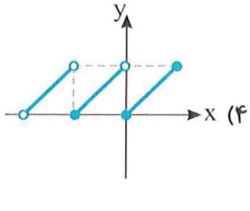
۴)


۲۲۶۹- نمودار تابع $f(x)=x+[-x]$ روی بازهٔ $[-۲,۱)$ کدام است؟

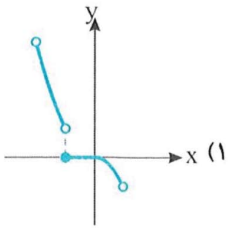
۱)


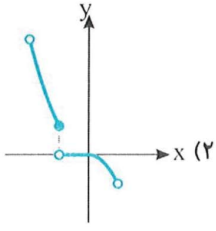
۲)


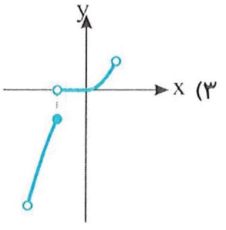
۳)


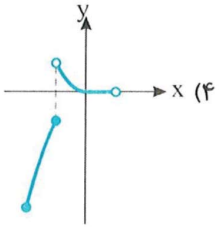
۴)


۲۲۷۰- نمودار تابع $f(x)=x^۲[-x]$ روی بازهٔ $(-۲,۱)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


سؤال

۲۲۶۱ ۲۲۶۲ ۲۲۶۳ ۲۲۶۴ ۲۲۶۵ ۲۲۶۶ ۲۲۶۷ ۲۲۶۸ ۲۲۶۹ ۲۲۷۰

آزمون ۲۲۸ تابع جزء صحیح (۲)

سؤال	گام
۲۲۷۱	۳۳۳ ۳۳۵
۲۲۷۲	۲۲ ۳۳۳ ۳۳۵
۲۲۷۳	۲۲ ۳۲۶ ۳۳۳ ۳۳۵
۲۲۷۴	۲۲ ۳۱۸ ۳۳۳ ۳۳۵
۲۲۷۵	۲۲ ۳۱۸ ۳۳۳ ۳۳۵
۲۲۷۶	۲۳ ۳۳۳ ۳۳۵
۲۲۷۷	۳۰ ۳۱ ۳۳
۲۲۷۸	۳۳۳ ۳۳۶
۲۲۷۹	۳۳۳ ۳۳۶
۲۲۸۰	۳۳۳ ۳۳۶

۲۲۷۱- اگر $f(x)=x-[۳x]$، حاصل $f(f(x))-x$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $[۳x]$ ۴) $۳[x]$

۲۲۷۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{[۴-x]+[x-۳]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{N}$ ۲) $\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{R}-\mathbb{N}$

۲۲۷۳- مجموع عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{[|x+۱|-۲]-۵}$ نیستند، چقدر است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۲۷۴- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۴-[x]}{[x]-۱}}$ بازهٔ $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۲۷۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۴[x]-[x]^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

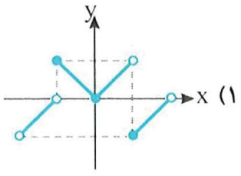
۲۲۷۶- برد تابع $f(x)=۲[x]-۲x$ کدام است؟

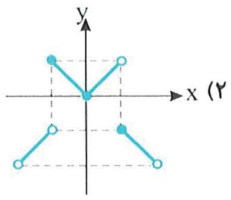
۱) $(-۲,۰]$ ۲) $[۰,۲)$ ۳) $[-۲,۰]$ ۴) $(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$

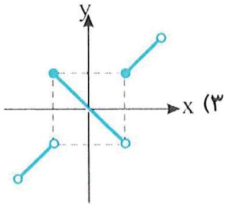
۲۲۷۷- نمودار تابع $y=۱-\sqrt[۳]{x}$ در چند نقطه نمودار تابع $y=[x]$ را قطع می‌کند؟

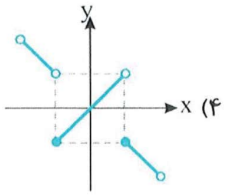
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۲۷۸- نمودار تابع $f(x)=x(-۱)^{[x]}$ روی بازهٔ $(-۲,۲)$ کدام است؟

۱)


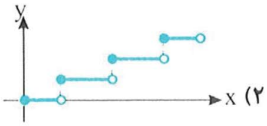
۲)


۳)


۴)


۲۲۷۹- نمودار تابع $f(x)=[\sqrt{x}]$ روی بازهٔ $[۰,۱۱)$ کدام است؟

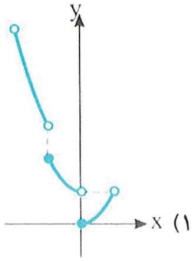
۱)

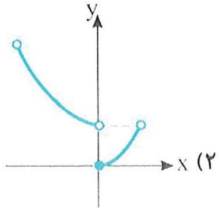

۲)


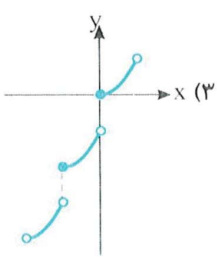
۳)

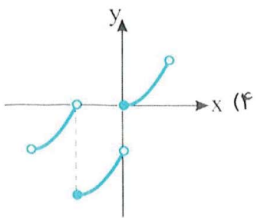

۴)


۲۲۸۰- نمودار تابع $f(x)=x^۲-[x]$ روی بازهٔ $(-۲,۱)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


آزمون ۲۲۹

آزمون فصل دهم (۱)

۲۲۸۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|2x^2+5x-3|=|2x+6|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -4 ۴) -5

۲۲۸۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x-1|=|x^2-3|$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۲۲۸۳- اگر $|2x-5|<3$، ساده شدهٔ عبارت $|4x-\sqrt{x^2-8x+16}|$ کدام است؟

۱) $3x-2$ ۲) $-3x+2$ ۳) $5x-4$ ۴) $-5x+4$

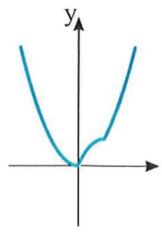
۲۲۸۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^2-3x|<2x$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

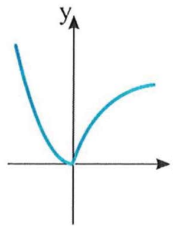
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

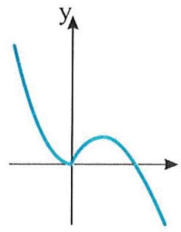
۲۲۸۵- اگر $-3\le x\le 6$، مجموع حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x)=\big||x-1|-8\big|$ کدام است؟

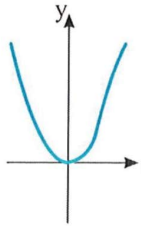
۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۲۲۸۶- نمودار تابع $f(x)=|x^2-x|+x$ کدام است؟

۱) 

۲) 

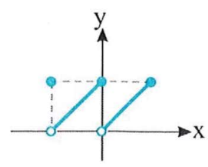
۳) 

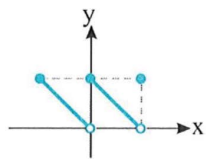
۴) 

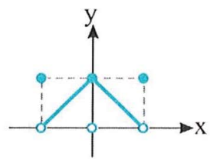
۲۲۸۷- اگر $f(x)=[\frac{x}{11}]-[\frac{-x}{17}]$، مقدار $f(120)$ کدام است؟

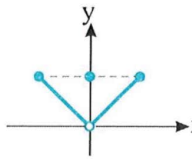
۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۲۲۸۸- نمودار تابع f با دامنهٔ $[-1,1]$ و ضابطهٔ $f(x)=[x]+|x-1|$ کدام است؟

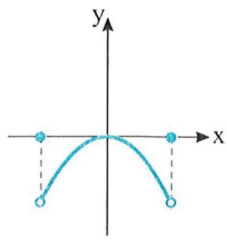
۱) 

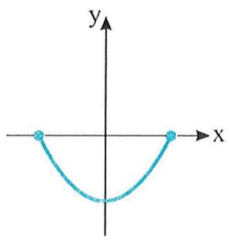
۲) 

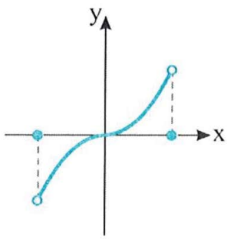
۳) 

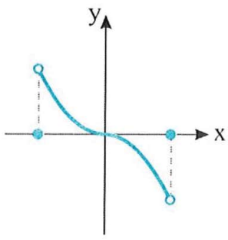
۴) 

۲۲۸۹- نمودار تابع $f(x)=x^2[[x]-x]$ روی بازهٔ $[-1,1]$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۲۹۰- اگر $f(x)=4x-[x]-[3x]$، حاصل $f(x-1)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $f(x)-1$ ۴) $-f(x)+1$

آزمون ۲۳۰ آزمون فصل دهم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۲۲۹۱- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(x-۴)|x|<۲x-۵$، به کدام صورت است؟ ریاضی ۹۲

۱) $(۱,۵)$
۲) $(۱-\sqrt{۶},۱+\sqrt{۶})$
۳) $(۱,۵)\cup(۱+\sqrt{۶},+\infty)$
۴) $(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$

۲۲۹۲- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^۲-۲x|<x$ کدام بازه است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۲

۱) $(۰,۱)$
۲) $(۰,۳)$
۳) $(۱,۲)$
۴) $(۱,۳)$

۲۲۹۳- اگر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^۲-۲|<|x+۱|-۱$ بازهٔ (a,b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۵

۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۲

۲۲۹۴- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=۲-|x|$ کدام است؟ تجربی ۹۵

۱) ۲
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) ۳

۲۲۹۵- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^۲+۱|-|x-۲|>۲x+۱$ به‌صورت کدام بازه است؟ خارج از کشور تجربی ۹۵

۱) $(-۲,۱)$
۲) $(-۱,۱)$
۳) $(-۱,۲)$
۴) $(۱,۲)$

۲۲۹۶- اگر $f(x)=x-[x]$، آن‌گاه برد تابع $g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۲

۱) $[-۱,۰]$
۲) $[۰,۱]$
۳) $\{-۱,۰\}$
۴) $\{۰,۱\}$

۲۲۹۷- اگر جزء صحیح $(x^۲+x)$ برابر -۱ باشد، آن‌گاه $[x^{۲۰}]$ کدام است؟ تجربی ۸۸

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۲۲۹۸- برای هر عدد طبیعی $n>۲$ حاصل $[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]-۲[\sqrt{n^۲-۲n}]$ کدام است؟ تجربی ۹۱

۱) ۲
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

۲۲۹۹- اگر $f(x)=[x]$، مجموعهٔ مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۸۵

۱) $\{۰\}$
۲) $\{۱\}$
۳) $\{۰,۱\}$
۴) $\{-۱,۰,۱\}$

۲۳۰۰- اگر $x^۲+x<۰$، حاصل $[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۸۸

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

سؤال	گام
۲۲۹۱	۳۱۸ ۳۲۴ ۳۲۷
۲۲۹۲	۳۱۸ ۳۲۴ ۳۲۷
۲۲۹۳	۳۲۴ ۳۲۷
۲۲۹۴	۳۳۱
۲۲۹۵	۳۱۸ ۳۲۴ ۳۲۷
۲۲۹۶	۳۳۳ ۳۳۵
۲۲۹۷	۳۳۳
۲۲۹۸	۲۷۵ ۳۳۳
۲۲۹۹	۳۳۳ ۳۳۵
۲۳۰۰	۳۱۸ ۳۳۳

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: تابع نمایی

تابع‌هایی مانند $f(x)=2^x$ و $g(x)=(\frac{1}{2})^x$ را که در آن‌ها پایه عددی حقیقی و مثبت است و نما متغیر است، تابع نمایی می‌نامیم. توجه کنید که تابع $f(x)=1^x$ تابع ثابت ۱ است، که آن را تابع نمایی در نظر نمی‌گیریم.

تعریف **هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$، را که در آن a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ است، تابع نمایی می‌نامند.**

مثال: تابع‌های $f(x)=4^{-x}$ و $g(x)=3^{\frac{x}{2}}$ نمایی هستند، زیرا می‌توان نوشت $f(x)=(\frac{1}{4})^x$ و $g(x)=(\sqrt{3})^x$.

تذکر هر تابع به شکل $f(x)=ka^x+b$ که در آن a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ و k عددی حقیقی و غیرصفر است، رفتاری مانند رفتار تابع‌های نمایی دارد.

مثال: تابع‌های $f(x)=3(\frac{1}{2})^x$ و $g(x)=5^{x-1}$ رفتاری نمایی دارند. توجه کنید که $g(x)=5^{x-1}=\frac{1}{5}\times 5^x$.

مثال: توجه کنید که تابع $f(x)=3\times 5^{2x+1}-4$ نیز رفتار نمایی دارد، زیرا می‌توانیم بنویسیم $f(x)=3\times 5^{2x}\times 5-4=15\times 25^x-4$

تست ۱ **در تابع $f(x)=ab^x+1$، اگر $f(0)=3$ و $f(2)=19$، مقدار $f(-1)$ کدام است؟ $(b>0)$**

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$

راه‌حل با توجه به فرض‌های مسئله می‌توان نوشت

$$f(0)=ab^0+1=3\Rightarrow a+1=3\Rightarrow a=2,\quad f(2)=ab^2+1=2b^2+1=19\Rightarrow b^2=9\xrightarrow{b>0}b=3$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=2\times 3^x+1$ است و در نتیجه $f(-1)=2\times 3^{-1}+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$.

نکته **ویژگی‌های توان**

فرض کنید a و b عددهایی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشند. در این صورت به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

۱) $a^0=1$ ۲) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ ۳) $a^x\times a^y=a^{x+y}$ ۴) $(a^x)^y=a^{xy}$

۵) $(ab)^x=a^xb^x$ ۶) $(\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$ ۷) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

تست ۲ **نمودار تابع $f(x)=a\times 3^{x+b}-12$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{32}{3}$ قطع می‌کند. این نمودار محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه‌حل با توجه به فرض مسئله،

$$f(0)=-\frac{32}{3}\Rightarrow a\times 3^b-12=-\frac{32}{3}\Rightarrow a\times 3^b=\frac{4}{3}\Rightarrow a=\frac{4}{3\times 3^b}$$

در محل تقاطع نمودار با محور طول‌ها، عرض نقطه برابر صفر است، پس

$$a\times 3^{x+b}-12=0\xrightarrow{a=\frac{4}{3\times 3^b}}\frac{4}{3\times 3^b}\times 3^x\times 3^b=12\Rightarrow\frac{3^x}{3}=3\Rightarrow 3^x=9\Rightarrow x=2$$

بنابراین نمودار تابع محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند.

تست ۳ اگر $f(x)=۲^{۲x-۱}$، مقدار $\frac{f(x+۱)}{f(x)}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

راه‌حل توجه کنید که $f(x+۱)=۲^{۲(x+۱)-۱}=۲^{۲x+۲-۱}=۲^{۲x+۱}$. بنابراین

$$\frac{f(x+۱)}{f(x)}=\frac{۲^{۲x+۱}}{۲^{۲x-۱}}=۲^{۲x+۱-(۲x-۱)}=۲^{۲}=۴$$

تست ۴ فرض کنید $f(x)=\frac{۳^{x+۱}+۳^{x+۲}}{۴^{x+۲}-۴^{x+۱}}$. حاصل $f(-x)$ کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $\frac{۱}{f(x)}$ ۳) $-f(x)$ ۴) $-\frac{۱}{f(x)}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۳^{x+۱}+۳^{x+۲}}{۴^{x+۲}-۴^{x+۱}}=\frac{۳\times۳^{x}+۳^{۲}\times۳^{x}}{۴^{۲}\times۴^{x}-۴\times۴^{x}}=\frac{(۳+۳^{۲})۳^{x}}{(۴^{۲}-۴)۴^{x}}=\frac{۱۲\times۳^{x}}{۱۲\times۴^{x}}=\frac{۳^{x}}{۴^{x}}=(\frac{۳}{۴})^{x}$$

بنابراین

$$f(-x)=(\frac{۳}{۴})^{-x}=((\frac{۳}{۴})^{x})^{-۱}=(f(x))^{-۱}=\frac{۱}{f(x)}$$

تست ۵ اگر $f(x)=۳^{۱+۲x}$، حاصل $f(۳x)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{f^{۲}(x)}{۲۷}$ ۲) $\frac{f^{۲}(x)}{۹}$ ۳) $\frac{f^{۳}(x)}{۹}$ ۴) $\frac{f^{۳}(x)}{۲۷}$

راه‌حل

$$f(x)=۳^{۱+۲x}=۳\times۳^{۲x}\Rightarrow۳^{۲x}=\frac{f(x)}{۳}\quad(I),\quad f(۳x)=۳\times۳^{۶x}=۳\times(۳^{۲x})^{۳}\xrightarrow{(I)}f(۳x)=۳\times(\frac{f(x)}{۳})^{۳}=\frac{f^{۳}(x)}{۹}$$

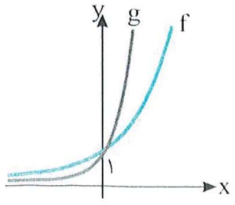
نمودار تابع‌های نمایی

نمودار تابع نمایی $f(x)=a^{x}$، برحسب اینکه $۰<a<۱$ یا $a>۱$ به یکی از شکل‌های زیر است.

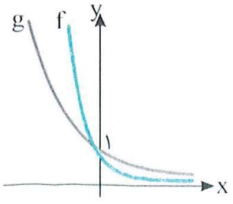


تذکر

- تابع‌های نمایی $f(x)=a^{x}$ و $g(x)=b^{x}$ را در نظر بگیرید. اگر $۱<a<b$، وضعیت نمودار این تابع‌ها نسبت به یکدیگر مانند شکل مقابل است.

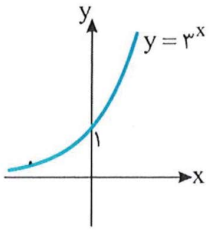


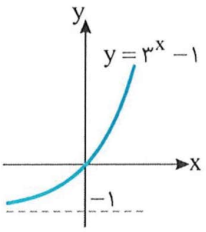
- تابع‌های نمایی $f(x)=a^{x}$ و $g(x)=b^{x}$ را در نظر بگیرید. اگر $۰<a<b<۱$، وضعیت نمودار این تابع‌ها نسبت به یکدیگر مانند شکل مقابل است.

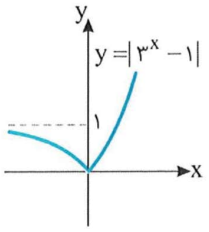


مثال: نمودار توابع مقابل را رسم کنید. الف) $y=|۳^x-۱|$ ب) $y=۲^{|x|}$

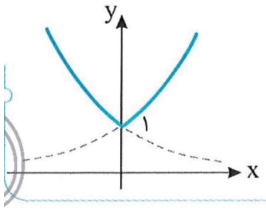
الف) ابتدا نمودار تابع $y=۳^x$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۳^x-۱$ به‌دست آید. اکنون قرینهٔ قسمتی از نمودار را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|۳^x-۱|$ به‌دست بیاید.



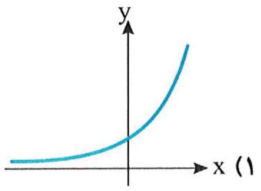


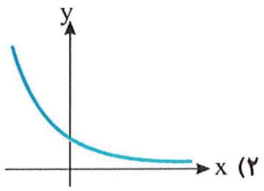


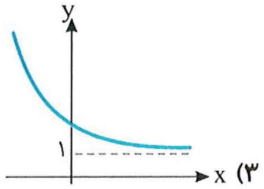
ب) توجه کنید که $y=\begin{cases}۲^x & x\geq ۰\\ ۲^{-x} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲^x & x\geq ۰\\ (\frac{۱}{۲})^x & x<۰\end{cases}$. بنابراین نمودار تابع به شکل مقابل است.

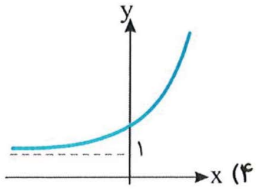


تست ۶ نمودار تابع $f(x)=\frac{۲^x+۱}{۲^x}$ کدام است؟

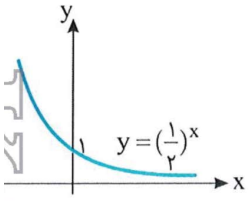
۱) 

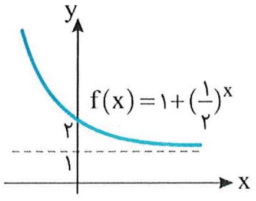
۲) 

۳) 

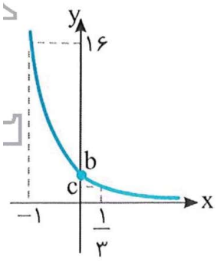
۴) 

راه‌حل ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{۲^x+۱}{۲^x}=\frac{۲^x}{۲^x}+\frac{۱}{۲^x}=۱+(\frac{۱}{۲})^x$ ساده می‌شود. بنابراین کافی است نمودار تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنیم و آن را یک واحد به بالا منتقل کنیم.





تست ۷ نمودار تابع $f(x)=a^{۳x-۱}$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

راه‌حل نمودار تابع f از نقطهٔ $(-۱,۱۶)$ می‌گذرد. در نتیجه $f(-۱)=۱۶\Rightarrow a^{-۴}=۱۶\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$

بنابراین $f(x)=(\frac{۱}{۲})^{۳x-۱}$. اکنون مقادیر b و c را حساب می‌کنیم: $b=f(۰)=(\frac{۱}{۲})^{(-۱)}=۲$ و $c=f(\frac{۱}{۳})=(\frac{۱}{۲})^{۰}=۱$. به این ترتیب $a+b+c=\frac{۷}{۲}$.

تست ۸ نمودار دو تابع $f(x)=۳^{x+۱}$ و $g(x)=(\sqrt{۳})^{۲x}+\frac{۲}{۳}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

راه‌حل فرض می‌کنیم A نقطهٔ (a,b) باشد. در این صورت، چون نقطهٔ (a,b) هم روی نمودار تابع f است هم روی نمودار تابع g، پس

$$\begin{cases}f(a)=b\\ g(a)=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳^{a+۱}=b\\ (\sqrt{۳})^{۲a}+\frac{۲}{۳}=b\end{cases}\Rightarrow ۳\times ۳^a=(\sqrt{۳})^{۲a}+\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳\times ۳^a=۳^a+\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۲\times ۳^a=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳^a=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین $b=۳^{a+۱}=۱$. در نتیجه A نقطهٔ $(-۱,۱)$ است، که فاصلهٔ آن از مبدأ برابر $\sqrt{۲}$ است.

۳۴۰

نکته ویژگی‌های تابع نمایی

فرض کنید $f(x)=a^x$. در این صورت

۱) $D_f=\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}_f=(0,+\infty)$.

۲) تابع f یک‌به‌یک است.

۳) اگر $a>1$، تابع f اکیداً صعودی و اگر $0<a<1$، تابع f اکیداً نزولی است.

تست ۹ برد تابع $f(x)=\frac{1+3^x}{3^x}$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $(\frac{1}{3},+\infty)$ ۴) $(\frac{1}{3},1)$

راه‌حل توجه کنید که $f(x)=\frac{1}{3^x}+\frac{3^x}{3^x}=(\frac{1}{3})^x+1$. چون برد تابع $y=(\frac{1}{3})^x$ برابر $(0,+\infty)$ است، پس برد تابع f برابر $(1,+\infty)$ است.

تست ۱۰ تابع نمایی $f(x)=(k^2-1)^x$ روی $\mathbb{R}$ نزولی است. حدود k کدام است؟

۱) $|k|>\sqrt{2}$ ۲) $|k|>1$ ۳) $1<|k|<\sqrt{2}$ ۴) $|k|<\sqrt{2}$

راه‌حل در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $0<a<1$. آن‌گاه تابع نزولی است. بنابراین

$$0<k^2-1<1\Rightarrow 1<k^2<2\Rightarrow 1<|k|<\sqrt{2}$$

دست‌گرمی

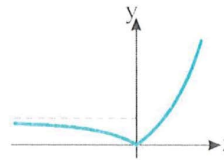
۳۷۳- نمودار تابع $f(x)=4^{x+a}+b$ محور طول‌ها و عرض‌ها را به‌ترتیب در نقطه‌های ۱ و $-\frac{3}{4}$ قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

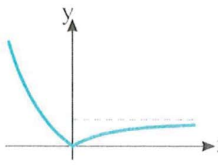
۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۳ ۴) -3

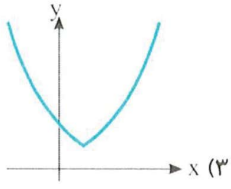
۳۷۴- اگر $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$، ساده شدهٔ عبارت $f(x)+f(-x)$ کدام است؟

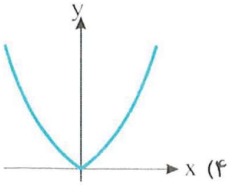
۱) 2^{-x} ۲) 2^x ۳) ۱ ۴) صفر

۳۷۵- نمودار تابع $f(x)=2^{|x|}-1$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۷۶- تابع نمایی $f(x)=(3k+1)^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k>0$ ۲) $-\frac{1}{3}<k<0$ ۳) $-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{3}$ ۴) $0<k<\frac{1}{3}$

آزمون ۲۳۱ تابع نمایی (۱)

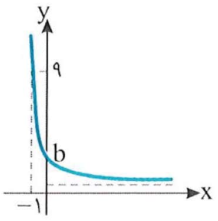
۲۳۰۱- نمودار تابع $f(x)=۲^{x-۱}-۲$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. فاصلهٔ A و B کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۲۳۰۲- نمودار تابع $f(x)=۹^{x+a}-۲b$ محور طول‌ها و محور عرض‌ها را به‌ترتیب در نقطه‌های $-\frac{۳}{۲}$ و ۲۶ قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

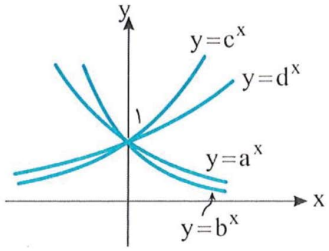
۲۳۰۳- نمودار تابع $f(x)=a^x+۱$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار ab کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) ۴ ۴) ۹

۲۳۰۴- نمودار چهار تابع $y=a^x$ ، $y=b^x$ ، $y=c^x$ و $y=d^x$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام درست است؟ $(a,b,c,d>۰)$



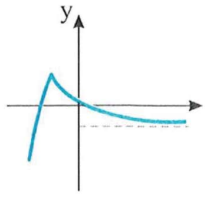
۱) $c>a>d>b$

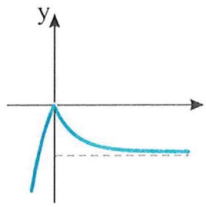
۲) $c>b>a>d$

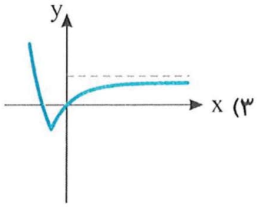
۳) $c>d>b>a$

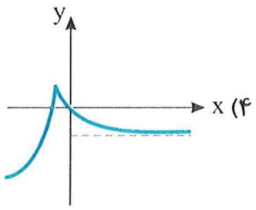
۴) $c>d>a>b$

۲۳۰۵- کدام گزینه نمودار تابع $f(x)=۱-|۲-(\frac{۱}{۳})^x|$ را درست نشان می‌دهد؟

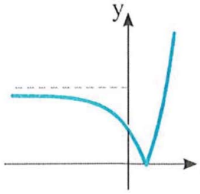
۱) 

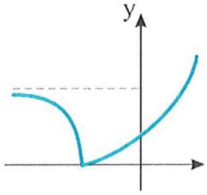
۲) 

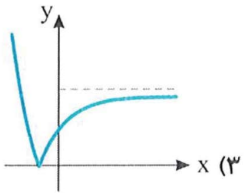
۳) 

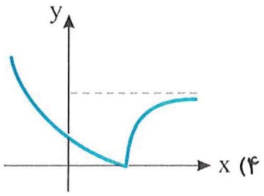
۴) 

۲۳۰۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{|۲^{x+۱}-۱|}{۲^{x-۱}}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۳۰۷- اگر $f(x)=۳^{x-۲}$ و $g(x)=x+۲$، حاصل $(fog)(x)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

۱) $۳f(x)$ ۲) $۹f(x)$ ۳) $\frac{f(x)}{۳}$ ۴) $\frac{f(x)}{۹}$

۲۳۰۸- برد تابع $f(x)=۲^x+\frac{|x|}{x}$ کدام است؟

۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $(-۱,۰)\cup(۲,+\infty)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $(۰,۱)\cup(۲,+\infty)$

۲۳۰۹- کدام تابع یک‌به‌یک نیست؟

۱) $f(x)=۲^{x+۱}-۱$ ۲) $f(x)=\frac{۱}{۲^x}-۱$ ۳) $f(x)=۲^{۳-x}+۱$ ۴) $f(x)=۲^{x^۲}+۱$

۲۳۱۰- اگر تابع $f(x)=۲^{x+۱}\times k^{-x}$ اکیداً صعودی باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>۱$ ۲) $۰<k<۲$ ۳) $۰<k<\frac{۱}{۲}$ ۴) $k>۲$

آزمون ۲۳۲ تابع نمایی (۲)

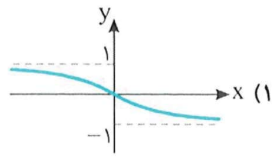
۲۳۱۱- نمودار تابع $f(x)=a(\frac{۱}{۲})^{x+b}-۶$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۲۱}{۴}$ قطع می‌کند. این نمودار محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

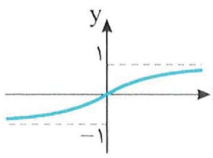
۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

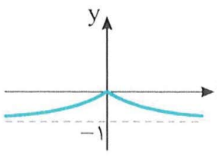
۲۳۱۲- نمودارهای دو تابع $f(x)=۲^{ax+b}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۴})^{x-b}$ در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع‌اند. اگر $f(۱)g(۱)=۴$، مقدار $f^{-۱}(\frac{۱}{۱۲۸})$ کدام است؟

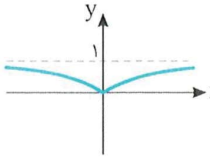
۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) ۳

۲۳۱۳- نمودار تابع $f(x)=۱-۲^{-|x|}$ کدام است؟

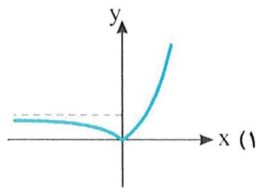
۱) 

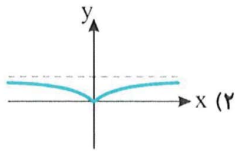
۲) 

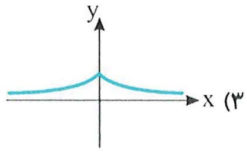
۳) 

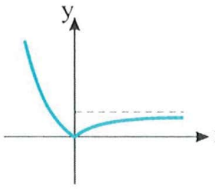
۴) 

۲۳۱۴- نمودار تابع $y=\frac{|۱-۲^{x}|}{۲^{x}}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۳۱۵- اگر $f(x)=-۱+۵x$ و $f^{-۱}(۲^{m-۲}+۱)=۲۶$، مقدار m کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۲۳۱۶- اگر $(fog)(x+۲)=۲^{x}+۱$ و $g(x)=۲^{x-۱}$، حاصل $f^{-۱}(۹)$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

۲۳۱۷- اگر $f(x)=۸^{x}$ و $g(x)=۲^{۲x+۵}$، حاصل $f(\frac{x}{۳})g(x-۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}f(x)$ ۲) $۲f(x)$ ۳) $۴f(x)$ ۴) $\sqrt{f(x)}$

۲۳۱۸- اگر $f(x)=\frac{۲^{x}+۱}{۲^{x}+۲}$، کدام‌یک برد تابع f را نشان می‌دهد؟

۱) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۴},۱)$

۲۳۱۹- کدام‌یک از تابع‌های زیر یک‌به‌یک نیست؟

۱) $f(x)=۳^{۱+۲x}$ ۲) $f(x)=۴^{۵-x}$ ۳) $f(x)=۹^{x}+۲\times۳^{x+۱}$ ۴) $f(x)=۲^{۳-|x|}$

۲۳۲۰- اگر $k>۰$ و تابع $f(x)=k^{x+۱}\times(۲k-۱)^{-x}$ اکیداً نزولی باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>۱$ ۲) $۰<k<۱$ ۳) $k>\frac{۱}{۲}$ ۴) $۰<k<\frac{۱}{۲}$

سؤال	گام
۲۳۱۱	۳۳۸
۲۳۱۲	۶۲ ۳۳۸
۲۳۱۳	۳۱ ۳۳ ۳۳۱ ۳۳۹
۲۳۱۴	۳۱ ۳۸ ۳۲۴ ۳۳۹
۲۳۱۵	۶۲ ۳۳۸
۲۳۱۶	۲۷ ۶۲ ۳۳۸
۲۳۱۷	۳۳۸
۲۳۱۸	۲۳ ۳۴۰
۲۳۱۹	۴۳ ۳۴۰
۲۳۲۰	۴۷ ۳۳۸ ۳۴۰

درس دوم: معادلات و نامعادلات نمایی

معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن مجهول در نما قرار گرفته باشد **معادلهٔ نمایی** می‌نامند. چون تابع نمایی یک‌به‌یک است، اگر a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد و $a^x = a^y$، آن‌گاه $x = y$. از این ویژگی برای حل کردن معادله‌های نمایی استفاده می‌کنیم.

نکته

اگر $a > 0$ و $a \neq 1$، از $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ نتیجه می‌شود $f(x) = g(x)$.

تست ۱ دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{2^x}{2^x - 4}$ شامل چند عدد نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کنند در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس

$2^x - 4 = 0 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

تست ۲ جواب معادلهٔ $2^{5x-1} - 4^{-x+3} = 0$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(1, \frac{3}{2})$ ۲) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ۳) $(\frac{1}{2}, 2)$ ۴) $(\frac{3}{2}, 2)$

راه‌حل توجه کنید که

$2^{5x-1} - 4^{-x+3} = 0 \Rightarrow 2^{5x-1} = 4^{-x+3} \Rightarrow 2^{5x-1} = (2^2)^{-x+3} \Rightarrow 2^{5x-1} = 2^{-2x+6} \Rightarrow 5x - 1 = -2x + 6 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$

بنابراین جواب معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ $(\frac{1}{2}, 2)$ قرار دارد.

تست ۳ جواب معادلهٔ $5 \times 3^x - 3 \times 5^x = 0$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ۲) $(0, 1)$ ۳) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{3}{2}, 2)$

راه‌حل معادلهٔ را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$5 \times 3^x = 3 \times 5^x \Rightarrow \frac{3^x}{3} = \frac{5^x}{5} \Rightarrow 3^{x-1} = 5^{x-1} \Rightarrow (\frac{3}{5})^{x-1} = 1 = (\frac{3}{5})^0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

تست ۴ اگر $x = a$ جواب معادلهٔ $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$ باشد، مقدار $a + \frac{1}{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) $\frac{13}{6}$ ۳) $\frac{25}{12}$ ۴) $\frac{5}{2}$

راه‌حل معادلهٔ مورد نظر را به شکل زیر ساده می‌کنیم

$2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x \Rightarrow 2^{x+3} + 2^x = 3^{x+1} + 3^x \Rightarrow 2^x(2^3 + 1) = 3^x(3 + 1)$

$2^x \times 9 = 3^x \times 4 \Rightarrow \frac{2^x}{4} = \frac{3^x}{9} \Rightarrow 2^{x-2} = 3^{x-2} \Rightarrow (\frac{2}{3})^{x-2} = 1 = (\frac{2}{3})^0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

پس $a = 2$. بنابراین $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$.

تست ۵ مجموع جواب های معادلهٔ $۲^x+۲^{۲-x}=۵$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل معادلهٔ داده شده را به‌صورت مقابل می‌نویسیم $۲^x+۲^{۲-x}=۵\Rightarrow ۲^x+\frac{۲^۲}{۲^x}=۵$

اگر دو طرف این معادله را در ۲^x ضرب کنیم، به‌دست می‌آید $۲^{۲x}+۴=۵\times ۲^x\Rightarrow ۲^{۲x}-۵\times ۲^x+۴=۰$

اگر فرض کنیم $t=۲^x$، این معادله می‌شود $t^۲-۵t+۴=۰$، بنابراین $t=۱$ و $t=۴$، به این ترتیب.

$t=۱\Rightarrow ۲^x=۱\Rightarrow x=۰$ ، $t=۴\Rightarrow ۲^x=۴\Rightarrow x=۲$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۲ است.

تست ۶ معادلهٔ $۵^{۲x+۱}=۲۴\times ۵^x+۵$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

راه‌حل با تغییر متغیر $t=۵^x$، معادله را برحسب t می‌نویسیم:

$$۵(۵^x)^۲-۲۴(۵^x)-۵=۰\Rightarrow ۵t^۲-۲۴t-۵=۰\Rightarrow t=\frac{۲۴\pm\sqrt{۶۷۶}}{۱۰}=\frac{۲۴\pm ۲۶}{۱۰}\Rightarrow t=۵ \text{ یا } t=\frac{-۱}{۵}$$

به ازای $t=\frac{-۱}{۵}$، معادلهٔ $۵^x=\frac{-۱}{۵}$ جواب ندارد زیرا ۵^x همواره مثبت است. اما به ازای $t=۵$، $۵^x=۵^۱\Rightarrow x=۱$

پس معادله فقط یک جواب دارد.

تست ۷ معادلهٔ $۲^{۲x}+۲^x\times ۵^x-۲\times ۵^{۲x}=۰$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

راه‌حل **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $۲^x=a$ و $۵^x=b$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$a^۲+ab-۲b^۲=۰\Rightarrow a^۲-b^۲+ab-b^۲=۰\Rightarrow (a-b)(a+b)+(a-b)b=۰\Rightarrow (a-b)(a+۲b)=۰$$

چون $a+۲b=۲^x+۲\times ۵^x\neq ۰$، پس $a-b=۰$، یعنی $۲^x=۵^x$، پس $(\frac{۲}{۵})^x=۱$، در نتیجه $x=۰$، بنابراین معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

راه‌حل دوم اگر دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $۵^{۲x}$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید $\frac{۲^{۲x}}{۵^{۲x}}+\frac{۲^x\times ۵^x}{۵^{۲x}}-۲=۰\Rightarrow (\frac{۲}{۵})^{۲x}+(\frac{۲}{۵})^x-۲=۰$

اگر فرض کنیم $t=(\frac{۲}{۵})^x$، این معادله می‌شود $t^۲+t-۲=۰$، بنابراین $t=۱$ و $t=-۲$، و چون $t>۰$، پس $t=۱$، به این ترتیب $(\frac{۲}{۵})^x=۱\Rightarrow x=۰$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

نامعادلات نمایی

نامعادله‌ای را که در آن مجهول در نما قرار گرفته باشد، نامعادلهٔ نمایی می‌نامیم. چون تابع نمایی اکیداً یکنواست، پس می‌توانیم نامعادلهٔ $a^{f(x)}\leq a^{g(x)}$ را به یکی از نامعادلات $f(x)\leq g(x)$ یا $f(x)\geq g(x)$ تبدیل کنیم ($a>۰$ و $a\neq ۱$).

نکته

فرض کنید $a^{f(x)}\leq a^{g(x)}$. در این صورت

- اگر $۰<a<۱$، آن‌گاه $f(x)\geq g(x)$.
- اگر $a>۱$، آن‌گاه $f(x)\leq g(x)$.

مثال: نامعادلهٔ $۳^{۴x}>۸۱$ را به شکل $۳^{۴x}>۳^۴$ می‌نویسیم. چون $۳>۱$، باید $۴x>۴$، یعنی $x>۱$. بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(۱,+\infty)$ است.

مثال: نامعادلهٔ $(\frac{۸}{۲۷})^{x-۲}\leq (\frac{۲}{۳})^{۲-۲x}$ را به شکل $(\frac{۲}{۳})^{۳x-۶}=((\frac{۲}{۳})^۳)^{x-۲}\leq (\frac{۲}{۳})^{۲-۲x}$ می‌نویسیم. چون $\frac{۲}{۳}<۱$، باید $۳x-۶\geq ۲-۲x$، یعنی $x\leq \frac{۸}{۵}$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(-\infty,\frac{۸}{۵}]$ است.

تست ۸ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\frac{1}{2})^{x+1} \geq 2^{x-2}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, 0)$ ۲) $(0, \frac{1}{2})$ ۳) $[\frac{1}{2}, +\infty)$ ۴) $(-\infty, \frac{1}{2}]$

راه‌حل توجه کنید که $2^{-x-1} = (2^{-1})^{x+1} = (\frac{1}{2})^{x+1}$. بنابراین، نامعادله به‌صورت $2^{-x-1} \geq 2^{x-2}$ در می‌آید. پس

$$-x-1 \geq x-2 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

تست ۹ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $3 \times 9^x < 8 \times 3^x + 3$ بازهٔ $(-\infty, a)$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

راه‌حل اگر فرض کنیم $3^x = t > 0$، نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$3t^2 < 8t+3 \Rightarrow 3t^2 - 8t - 3 < 0 \Rightarrow (t-3)(t+\frac{1}{3}) < 0$$

چون $t + \frac{1}{3} > 0$، پس باید $t < 3$، یعنی $3^x < 3$، پس $x < 1$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(-\infty, 1)$ است، پس $a = 1$.

تست ۱۰ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{2^x - 4}$ بازهٔ $[a, +\infty)$ است. مقدار $f(a+1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

راه‌حل دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم

$$2^x - 4 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^2 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

بنابراین $a = 2$ و در نتیجه $f(a+1) = f(3) = \sqrt{2^3 - 4} = 2$.

تست ۱۱ دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{2^x - 3^x}$ کدام است؟

۱) $[0, +\infty)$ ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $(-\infty, 0]$ ۴) $(-\infty, 0)$

راه‌حل باید نامعادلهٔ $2^x - 3^x \geq 0$ را حل کنیم. پس

$$2^x - 3^x \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 3^x \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} \geq 1 \Rightarrow (\frac{2}{3})^x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0]$$

دست‌گرمی

۳۷۷- جواب معادلهٔ $(\frac{81}{16})^{x-1} = (\frac{2}{3})^{x+2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۳۷۸- معادلهٔ $5^x + 3 \times 5^{x-2} = 140$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۷۹- معادلهٔ $(2^x+6)(2^x+5)(2^x-5)(2^x-6) = 0$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۸۰- معادلهٔ $3 \times 9^{x+1} - 6 \times 3^x - 1 = 0$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۸۱- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\frac{1}{2})^{x-3} < (\frac{1}{2})^{3-x}$ کدام است؟

۱) $x < 3$ ۲) $x > 3$ ۳) $x < 1$ ۴) $x > 2$

۳۸۲- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $25^x + 24 \times 5^{x-1} < 1$ کدام است؟

۱) $(-\infty, -1)$ ۲) $(-\infty, -2)$ ۳) $(-\infty, -3)$ ۴) $(-\infty, -4)$

آزمون ۲۳۳ — معادلات و نامعادلات نمایی (۱)

۲۳۲۱- معادلهٔ $۳^{x+۱}+۳^{x}=۱۰۸$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۳۲۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۵^{x-۳}=(۰/۲)^{x^۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۳۲۳- اگر $f(x)=۲+۳^{x-۲}$، حاصل $f^{-۱}(۵)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۲۴- معادلهٔ $۲^{x}-۲^{۱-x}+۱۵=۰$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۳۲۵- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $۳^{۲x+۱}-۳^{x+۲}+۵=۰$ باشند، مقدار $۳^{\alpha}+۳^{\beta}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۳۲۶- در دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y=۵ \\ ۲^{x}-۲^{y}=۴ \end{cases}$ مقدار $x-y$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲۳۲۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{|۲^{x}-۴|-۳}$ شامل چند عدد نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۲۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\frac{۲}{۳})^{۳+x}<(\frac{۳}{۲})^{۱-۳x}$ کدام بازه است؟

۱) $(-۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۲)$ ۳) $(-\infty,-۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

۲۳۲۹- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۲^{x}-۸}}{\sqrt{۸۱-۳^{x}}}$ به‌صورت $[a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۳۳۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{-۳^{۲x+۱}+۴\times۳^{x}-۱}}$ کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(-۳,۰)$

سؤال	گام
۲۳۲۱	۳۳۸ ۳۴۱
۲۳۲۲	۲۹۶ ۳۳۸ ۳۴۱
۲۳۲۳	۶۲ ۳۴۱
۲۳۲۴	۳۰۶ ۳۳۸ ۳۴۱
۲۳۲۵	۲۹۶ ۳۳۸ ۳۴۱
۲۳۲۶	۳۰۶ ۳۳۸ ۳۴۱
۲۳۲۷	۲۲ ۳۲۶ ۳۴۱
۲۳۲۸	۳۳۸ ۳۴۲
۲۳۲۹	۲۲ ۳۳۸ ۳۴۲
۲۳۳۰	۲۲ ۳۱۸ ۳۳۸ ۳۴۲

۲۳۳۱- معادلهٔ $۵^{x+۱}+۵^{x}=۲\times۵^{x}+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}+۲^{x}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۳۳۲- معادلهٔ $۲^{|x|}=(۰/۵)^{x-x^{۲}}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۳۳- اگر $f(۳^{x}-۱)=x^{۳}+۱$، حاصل $f(۸)+f^{-۱}(۲)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۲۳۳۴- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt{۵}+۲)^{x}+(\sqrt{۵}-۲)^{x}=۱۸$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۴ ۳) -۹ ۴) -۱۶

۲۳۳۵- معادلهٔ $۴^{x}+۶^{x}=۲\times۹^{x}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۳۶- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲^{-x}-۳^{-y}=-۷ \\ ۲^{x}\times۳^{y}=\frac{۱}{۱۸} \end{cases}$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۳۳۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۱-۲x}>(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{x+۳}$ کدام است؟

۱) $(-۴,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۴)$ ۳) $(۴,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۴)$

۲۳۳۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۴^{x+\frac{۳}{۲}}-۶\times۲^{x}+۱\geq۰$ به‌صورت $\mathbb{R}-(a,b)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۳

۲۳۳۹- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲^{x+۱}-۴^{x}}$ بازهٔ $(-\infty,a]$ است. مقدار a کدام است؟

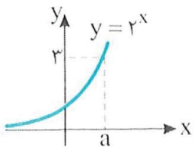
۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۳۴۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{(\frac{۱}{۲})^{x}-۴}{۲۷-۳^{x}}}$ به‌صورت $\mathbb{R}-(a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

سؤال
۲۳۳۱
۲۳۳۲
۲۳۳۳
۲۳۳۴
۲۳۳۵
۲۳۳۶
۲۳۳۷
۲۳۳۸
۲۳۳۹
۲۳۴۰

درس سوم: لگاریتم



از روی نمودار تابع $y=2^x$ معلوم می‌شود که معادلهٔ $2^x=3$ جوابی مانند $x=a$ دارد. جواب این معادله را به‌صورت $\log_2 3$ می‌نویسیم و می‌خوانیم «لگاریم ۳ در پایهٔ ۲». به همین ترتیب، اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند و $a\neq 1$، معادلهٔ $a^x=b$ یک جواب دارد که آن را با $\log_a b$ نشان می‌دهیم. معمولاً در لگاریتم با پایهٔ ۱۰، پایه را نمی‌نویسیم $(\log_{10} b=\log b)$.

تعریف

۳۴۳

فرض کنید a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند و $a\neq 1$. در این صورت $\log_a b$ عددی حقیقی مانند c است که $a^c=b$، و بر عکس، یعنی

$$c=\log_a b \Leftrightarrow a^c=b$$

مثال:

۱) $32=2^5 \Rightarrow \log_2 32=5$

۲) $\frac{1}{9}=3^{-2} \Rightarrow \log_3 \frac{1}{9}=-2$

۳) $1=(\frac{1}{2})^0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 1=0$

۴) $\log_2 2=1 \Rightarrow 2^1=2$

۵) $\log_3 x=4 \Rightarrow x=3^4=81$

۶) $\log_x 64=6 \Rightarrow 64=x^6 \Rightarrow x=2$

تست ۱ اگر $\log_{16}(2^{a+1})=\frac{1}{2}$، حاصل a^2+a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) صفر

راه‌حل: توجه کنید که

$$\log_{16}(2^{a+1})=\frac{1}{2} \Rightarrow 2^{a+1}=16^{\frac{1}{2}}=4 \Rightarrow a+1=2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a^2+a=2$$

تست ۲ اگر $\log_2 x=3$ و $\log_3 y=2$، حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۷ ۴) ۲۷

راه‌حل: با توجه به تعریف لگاریتم،

$$\log_2 x=3 \Rightarrow x=2^3=8, \quad \log_3 y=2 \Rightarrow y=3^2=9$$

بنابراین $x+y=17$.

نکته — ویژگی‌های لگاریتم

۳۴۴

۱) $\log_a 1=0$

۲) $\log_a a=1$

۳) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

۴) $\log_a(x_1x_2\dots x_n)=\log_a x_1+\log_a x_2+\dots+\log_a x_n$

۵) $\log_a(\frac{x}{y})=\log_a x-\log_a y$

۶) $\log_a x^n=n\log_a x$

۷) $\log_{a^n} x=\frac{1}{n}\log_a x$

۸) $\log_a x=\frac{1}{\log_x a}$

۹) $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$

۱۰) $a^{\log_a x}=x$

۱۱) $b^{\log_a x}=x^{\log_a b}$

مثال:

۱) $\log_{12} 3+\log_{12} 4=\log_{12}(3\times 4)=\log_{12} 12=1$

۲) $\log_2 3+\log_2 7+\log_2 \frac{1}{21}=\log_2(3\times 7\times \frac{1}{21})=\log_2 1=0$

۳) $\log_2 20-\log_2 5=\log_2 \frac{20}{5}=\log_2 4=2$

۴) $\log_2 \sqrt[4]{8}=\log_2 2^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\log_2 2=\frac{3}{4}$

۵) $\log_{\sqrt{۲}} \sqrt[۳]{۳۲} = \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}} ۲^{\frac{۵}{۳}} = ۲\times\frac{۵}{۳}\log_۲ ۲ = \frac{۱۰}{۳}$

۶) $\log_۳ ۲\times\log_۵ ۳\times\log_۲ ۵ = \frac{\log ۲}{\log ۳}\times\frac{\log ۳}{\log ۵}\times\frac{\log ۵}{\log ۲} = ۱$

۷) $۲^{\log_۴ ۵} = ۵^{\log_۴ ۲} = ۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵}$

تست ۳ اگر $۳^a = A$، مقدار $\log_۳(۹A^۳)$ برحسب a کدام است؟

۱) $۲+۳a$ ۲) $۳+۲a$ ۳) $۲+a^۲$ ۴) $۳+a^۲$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که $A^۳ = (۳^a)^۳ = ۳^{۳a}$، بنابراین

$$\log_۳(۹A^۳) = \log_۳(۳^۲\times ۳^{۳a}) = \log_۳ ۳^{(۲+۳a)} = (۲+۳a)\log_۳ ۳ = ۲+۳a$$

تست ۴ مقدار $\log_{۱۶\sqrt[۳]{۴}}(۸\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

راه‌حل به کمک ویژگی‌های لگاریتم به‌دست می‌آید:

$$\log_{۱۶\sqrt[۳]{۴}}(۸\sqrt{۲}) = \log_{۲^۴\times ۲^{\frac{۲}{۳}}}(۲^۳\times ۲^{\frac{۱}{۲}}) = \log_{۲^{\frac{۱۴}{۳}}} ۲^{\frac{۷}{۲}} = \frac{۷}{۲}\times\frac{۳}{۱۴}\log_۲ ۲ = \frac{۳}{۴}$$

تست ۵ حاصل $\log(۵+۲\sqrt{۶})+\log(۵-۲\sqrt{۶})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\log(۵+۲\sqrt{۶})+\log(۵-۲\sqrt{۶}) = \log((۵+۲\sqrt{۶})(۵-۲\sqrt{۶})) = \log(۲۵-۲۴) = \log ۱ = ۰$$

تست ۶ حاصل $\log_۳ ۱۱\times\log_{۱۱} ۱۳\times\log_{۱۳} ۱۵\times\log_{۱۵} ۲۷$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل بنابر ویژگی‌های لگاریتم،

$$\log_۳ ۱۱\times\log_{۱۱} ۱۳\times\log_{۱۳} ۱۵\times\log_{۱۵} ۲۷ = \frac{\log ۱۱}{\log ۳}\times\frac{\log ۱۳}{\log ۱۱}\times\frac{\log ۱۵}{\log ۱۳}\times\frac{\log ۲۷}{\log ۱۵} = \frac{\log ۲۷}{\log ۳} = \frac{۳\log ۳}{\log ۳} = ۳$$

تست ۷ حاصل $\frac{۲}{\log_۳ ۱۲}+\frac{۴}{\log_۲ ۱۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل بنابر ویژگی‌های لگاریتم، $\log_۲ ۱۲ = \frac{۱}{\log_{۱۲} ۲}$ و $\log_۳ ۱۲ = \frac{۱}{\log_{۱۲} ۳}$. بنابراین

$$\frac{۴}{\log_۲ ۱۲}+\frac{۲}{\log_۳ ۱۲} = ۴\log_{۱۲} ۲+۲\log_{۱۲} ۳ = \log_{۱۲} ۲^۴+\log_{۱۲} ۳^۲ = \log_{۱۲}(۲^۴\times ۳^۲) = \log_{۱۲} ۱۲^۲ = ۲\log_{۱۲} ۱۲ = ۲$$

تست ۸ اگر $\log_۲ ۵ = x$ و $\log_۲ ۳ = y$، مقدار $\log_{۱۵} ۱۰$ برحسب x و y کدام است؟

۱) $\frac{x-۱}{x+y}$ ۲) $\frac{x+۱}{x+y}$ ۳) $\frac{x+۱}{x-y}$ ۴) $\frac{y-۱}{x+y}$

راه‌حل طبق رابطهٔ $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ می‌توان نوشت

$$\log_{۱۵} ۱۰ = \frac{\log_۲ ۱۰}{\log_۲ ۱۵} = \frac{\log_۲(۲\times ۵)}{\log_۲(۳\times ۵)} = \frac{\log_۲ ۲+\log_۲ ۵}{\log_۲ ۳+\log_۲ ۵} = \frac{۱+x}{y+x}$$

تست ۹

اگر $\log_{۲} ۳=a$، مقدار $\log_{۱۲} ۱۸$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۱+a}{۱+۲a}$ ۲) $\frac{۲+a}{۱+۲a}$ ۳) $\frac{۱+۲a}{۱+a}$ ۴) $\frac{۱+۲a}{۲+a}$

راه‌حل می‌توان نوشت

$$\log_{۱۲} ۱۸=\frac{\log_{۲} ۱۸}{\log_{۲} ۱۲}=\frac{\log_{۲}(۲\times ۳^{۲})}{\log_{۲}(۲^{۲}\times ۳)}=\frac{\log_{۲} ۲+\log_{۲} ۳^{۲}}{\log_{۲} ۲^{۲}+\log_{۲} ۳}=\frac{۱+۲\log_{۲} ۳}{۲\log_{۲} ۲+\log_{۲} ۳}=\frac{۱+۲a}{۲+a}$$

نکته ۳۴۵

جواب برخی معادله‌های نمایی را می‌توان با استفاده از لگاریتم یک عدد نوشت.

مثال: معادلهٔ $۲^{x+۱}+۲^{x}=۴$ را می‌توان به‌صورت روبه‌رو حل کرد:

$$۲^{x}\times ۲+۲^{x}=۴\Rightarrow ۳\times ۲^{x}=۴\Rightarrow ۲^{x}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow x=\log_{۲}\frac{۴}{۳}$$

تست ۱۰

کدام‌یک جواب معادلهٔ $(۲+\sqrt{۳})^{x}+(۲-\sqrt{۳})^{x}=\frac{۵}{۲}$ است؟

۱) $-\log_{(۲+\sqrt{۳})} ۲$ ۲) $\log_{(۲-\sqrt{۳})} ۲$ ۳) $\log_{(۲-\sqrt{۳})}(۲+\sqrt{۳})$ ۴) $۲\log_{(۲+\sqrt{۳})}(۲-\sqrt{۳})$

راه‌حل فرض می‌کنیم $t=(۲+\sqrt{۳})^{x}$. در این‌صورت $(۲-\sqrt{۳})^{x}=(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}})^{x}=\frac{۱}{(۲+\sqrt{۳})^{x}}=\frac{۱}{t}$. بنابراین معادله به‌صورت $t+\frac{۱}{t}=\frac{۵}{۲}$ درمی‌آید. در نتیجه

$$۲t^{۲}-۵t+۲=۰\Rightarrow(۲t-۱)(t-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases} t=۲=(۲+\sqrt{۳})^{x}\Rightarrow x=\log_{(۲+\sqrt{۳})} ۲ \\ t=\frac{۱}{۲}=(۲+\sqrt{۳})^{x}\Rightarrow x=\log_{(۲+\sqrt{۳})}\frac{۱}{۲}=-\log_{(۲+\sqrt{۳})} ۲ \end{cases}$$

دست‌گرمی

۳۸۳- مقدار $\log_{۷}\sqrt[۵]{۷\sqrt[۴]{۷}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۸۴- حاصل $\log_{۴}(\sqrt{۳}-۱)+\log_{۴}(\sqrt{۳}+۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۸۵- حاصل $\frac{۱}{\log_{۴} ۶}+\frac{۱}{\log_{۹} ۶}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۸۶- مقدار $۳^{\log_{۹} ۶}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

۳۸۷- اگر $\log ۴=a$، مقدار $\log ۱۲۵$ کدام است؟

۱) $\frac{۳a}{۲}$ ۲) $۳-\frac{۳a}{۲}$ ۳) $۳-\frac{a}{۲}$ ۴) $۱-\frac{۳a}{۲}$

۳۸۸- اگر $\log ۳۰=a$ و $\log ۵۰=b$، مقدار $\log_{۵} ۳$ برحسب a و b کدام است؟

۱) $\frac{b+۱}{a+۱}$ ۲) $\frac{a+۱}{b+۱}$ ۳) $\frac{b-۱}{a-۱}$ ۴) $\frac{a-۱}{b-۱}$

۳۸۹- اگر $۳^{x+۲}=۴$، مقدار x کدام است؟

۱) $\log_{۳}\frac{۴}{۹}$ ۲) $\log_{۳}\frac{۹}{۴}$ ۳) $\log_{۳}\frac{۳}{۴}$ ۴) $\log_{۳} ۴$

۲۳۴۱- اگر $\log ۳=a$، مقدار $\log ۹۰$ کدام است؟

۱) $۲a+۱$ ۲) $۲a-۱$ ۳) $۳a+۲$ ۴) $۳a-۲$

۲۳۴۲- مقدار $\log ۶-\log ۲\times\log_{۲} ۳$ کدام است؟

۱) $\log ۲$ ۲) $\log ۳$ ۳) $\log_{۳} ۲$ ۴) $\log \frac{۳}{۲}$

۲۳۴۳- مقدار $\log_{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۲۳۴۴- مقدار $\log_{۳} \sqrt[۴]{۳\sqrt{۲۷\sqrt[۳]{۸۱}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۲۳۴۵- حاصل $(\frac{۱}{۲})^{\log_{۴} ۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

۲۳۴۶- اگر $x=\log ۲$ و $y=\log ۳$، مقدار $\log ۲۱۶$ برحسب x و y کدام است؟

۱) $۲x+۴y$ ۲) $۳x+۳y$ ۳) $۴x+۲y$ ۴) $۵x+y$

۲۳۴۷- اگر $\log ۵=a$، مقدار $\log ۲۰$ برحسب a کدام است؟

۱) $۱-a$ ۲) $۲-a$ ۳) $۳-a$ ۴) $۴-a$

۲۳۴۸- اگر $۲^{x}=۳^{y}$، مقدار $\log_{۸} ۹$ برحسب x و y کدام است؟

۱) $\frac{۳x}{۲y}$ ۲) $\frac{۲x}{۳y}$ ۳) $\frac{۲y}{۳x}$ ۴) $\frac{۳y}{۲x}$

۲۳۴۹- اگر $a=۲^{\log_{۵} ۳}$ و $b=۳^{\log_{۲} ۵}$، حاصل $\log_{۳} a\times\log_{۳} b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۲۳۵۰- جواب معادلهٔ $۲^{۱+x}=۵^{x}$ کدام است؟

۱) $\log_{۲} ۵-۱$ ۲) $۱-\log_{۵} ۲$ ۳) $\frac{۱}{-۱+\log_{۵} ۲}$ ۴) $\frac{۱}{-۱+\log_{۲} ۵}$

سؤال	گا
۲۳۴۱	۴۴
۲۳۴۲	۴۴
۲۳۴۳	۴۴
۲۳۴۴	۴
۲۳۴۵	۴
۲۳۴۶	۴
۲۳۴۷	۴
۲۳۴۸	۴
۲۳۴۹	۴
۲۳۵۰	۵

آزمون ۲۳۶ لگاریتم (۲)

۲۳۵۱- اگر $\log ۳=a$، مقدار عبارت $A=\log ۲۰+\log ۳۰+\log ۵۰$ کدام است؟

۱) $a+۲$ ۲) $a+۳$ ۳) $a+۴$ ۴) $a+۵$

۲۳۵۲- حاصل $\frac{۱}{\log_{۳} ۱۸}+\frac{۱}{\log_{۶} ۱۸}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۳۵۳- مقدار $\log_{(\sqrt{۲}-۱)}(۳+۲\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۳۵۴- مقدار $\frac{\log_{۲} \sqrt[۴]{۴\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}}}{\log_{۲} \sqrt{۲\sqrt[۳]{۴\sqrt[۴]{۴}}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱۷}{۲۲}$ ۳) $\frac{۲۷}{۱۷}$ ۴) $\frac{۹}{۱۷}$

۲۳۵۵- مقدار $۲^{۳+\log_{۸} ۳}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt[۳]{۳}$ ۲) $۸\sqrt[۳]{۳}$ ۳) $۴\sqrt[۳]{۳}$ ۴) $\sqrt[۳]{۳}$

۲۳۵۶- اگر $\log ۲=a$، مقدار $\log \sqrt[۳]{۶/۴}$ برحسب a کدام است؟

۱) $۳a+\frac{۱}{۲}$ ۲) $۳a-\frac{۱}{۲}$ ۳) $۲a+\frac{۱}{۳}$ ۴) $۲a-\frac{۱}{۳}$

۲۳۵۷- اگر $\log_{۵} ۲=a$ و $\log_{۲} ۵=b$، مقدار $\log_{۱۵} ۴$ برحسب a و b کدام است؟

۱) $\frac{ab}{b+۱}$ ۲) $\frac{۲ab}{b+۱}$ ۳) $\frac{b+۱}{ab}$ ۴) $\frac{۲ab}{a+۱}$

۲۳۵۸- اگر $\log ۱۱+\log ۵=a$، $\log ۵+\log ۷=b$ و $\log ۷+\log ۱۱=c$، مقدار $\log ۳۸۵$ کدام است؟

۱) $a+b+c$ ۲) $\frac{a+b+c}{۲}$ ۳) abc ۴) $۲abc$

۲۳۵۹- حاصل $\frac{۱}{۱-\log_{۳} ۲}+\frac{۱}{۱-\log_{۲} ۳}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\log_{۲} ۳$ ۴) $\log_{۳} ۲$

۲۳۶۰- جواب معادلهٔ $۹^{x}-۳^{x}=۲$ کدام است؟

۱) $\log_{۳} ۲$ ۲) $\log_{۲} ۳$ ۳) $\log ۳$ ۴) $\log ۲$

سؤال	گام
۲۳۵۱	۳۴۴
۲۳۵۲	۳۴۴
۲۳۵۳	۲۷۵ ۳۴۴
۲۳۵۴	۲۷۲ ۲۷۳ ۳۴۴
۲۳۵۵	۳۴۴
۲۳۵۶	۳۴۴
۲۳۵۷	۳۴۴
۲۳۵۸	۳۴۴
۲۳۵۹	۳۴۴
۲۳۶۰	۳۳۸ ۳۴۴ ۳۴۵

۲۳۶۱- حاصل عبارت $A=\log_5\frac{۵}{۶}+\log_5\frac{۶}{۷}+\log_5\frac{۷}{۸}+\cdots+\log_5\frac{۱۲۴}{۱۲۵}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۲۳۶۲- حاصل $\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\log_۲ ۳}}$ برابر کدام است؟

۱) $\log_۶ ۳$ ۲) $\frac{۱}{\log_۳ ۲}$ ۳) $\log_۳ ۶$ ۴) $\log_۳ ۲$

۲۳۶۳- اگر $\log ۲=k$، حاصل $\log(۲۸+۱۲\sqrt{۵})-۲\log(۳+\sqrt{۵})$ کدام است؟

۱) k ۲) $۲k$ ۳) $\frac{۱}{k}$ ۴) $\frac{۲}{k}$

۲۳۶۴- حاصل $\log_۵ ۸\times\log_۳ ۵\times\log_۲ ۳$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۳۶۵- اگر $a=۵^{\log ۲۰}$ و $b=۲^{\log ۵۰}$، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) ۱۰ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۲۳۶۶- اگر $\log_۲ ۳=a$ و $\log_۳ ۵=b$، مقدار $\log ۱۵$ برحسب a و b کدام است؟

۱) $\frac{b+۱}{ab+۱}$ ۲) $\frac{a(b+۱)}{ab+۱}$ ۳) $\frac{a(b+۱)}{a+۱}$ ۴) $\frac{a(a+۱)}{b+۱}$

۲۳۶۷- اگر $\log_۸ ۱۰=a$، مقدار $\log_{۴۰} ۵۰$ برحسب a کدام است؟

۱) $\frac{۶a+۱}{۳a-۲}$ ۲) $\frac{۶a-۱}{۳a+۲}$ ۳) $\frac{۶a+۱}{۳a+۲}$ ۴) $\frac{۶a-۱}{۳a-۲}$

۲۳۶۸- اگر $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}=۳$، حاصل $\log_a b+\log_b a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۳۶۹- بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $۴^x-۲^{x+۳}+۱۵=۰$ کدام است؟

۱) $\log_۲ ۳$ ۲) $\log_۵ ۲$ ۳) $\log_۳ ۲$ ۴) $\log_۲ ۵$

۲۳۷۰- در دستگاه معادله‌های $\begin{cases}۲^x=۳^y\\x+y=۱\end{cases}$، مقدار x کدام است؟

۱) $\log_۶ ۳$ ۲) $\log_۶ ۲$ ۳) $\log_۲ ۳$ ۴) $\log_۳ ۲$

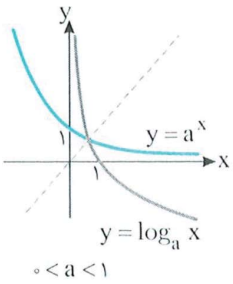
سؤال
۲۳۶۱
۲۳۶۲
۲۳۶۳
۲۳۶۴
۲۳۶۵
۲۳۶۶
۲۳۶۷
۲۳۶۸
۲۳۶۹
۲۳۷۰

درس چهارم: توابع لگاریتمی

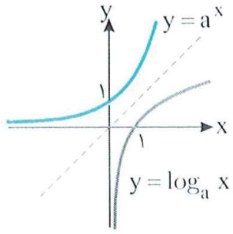
تابع وارون تابع نمایی $f(x)=a^x$ را به‌صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$y=a^x \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} x=\log_a y \xrightarrow{\text{عوض کردن جای x و y}} y=\log_a x \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_a x$$

تذکر دامنهٔ تابع نمایی $f(x)=a^x$ مجموعهٔ عددهای حقیقی و برد آن مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت است. بنابراین دامنهٔ تابع وارون آن با ضابطهٔ $f^{-1}(x)=\log_a x$، مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت و برد آن مجموعهٔ عددهای حقیقی است. نمودار تابع f^{-1} قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است. بنابراین برحسب اینکه $0<a<1$ یا $a>1$، نمودار f^{-1} به یکی از صورت‌های زیر است.

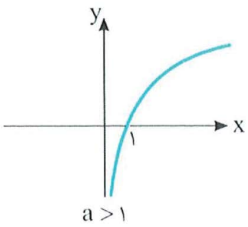


$0<a<1$



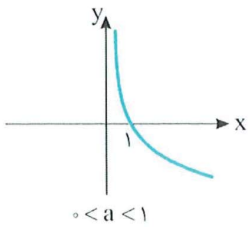
$a>1$

نکته دامنه و برد تابع $f(x)=\log_a x$ به ترتیب $D_f=(0,+\infty)$ و $R_f=\mathbb{R}$ است. همچنین نمودار این تابع به‌صورت زیر است.



$a>1$

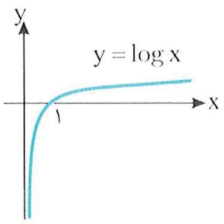
تابع f اکیداً صعودی است.

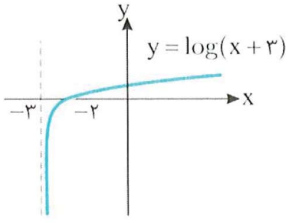


$0<a<1$

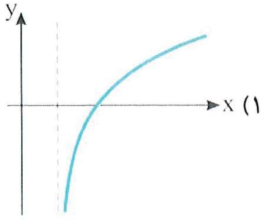
تابع f اکیداً نزولی است.

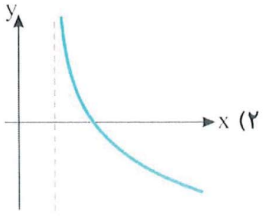
مثال: نمودار تابع $y=\log(x+3)$ را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم. ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم. سپس این نمودار را سه واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log(x+3)$ به‌دست بیاید.

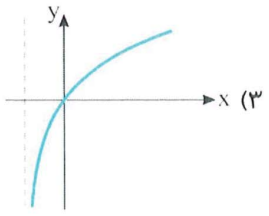


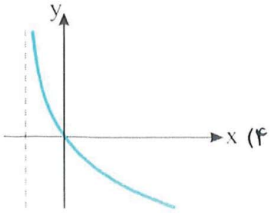


تست ۱ نمودار تابع $f(x)=-\log_2(x-1)$ کدام است؟

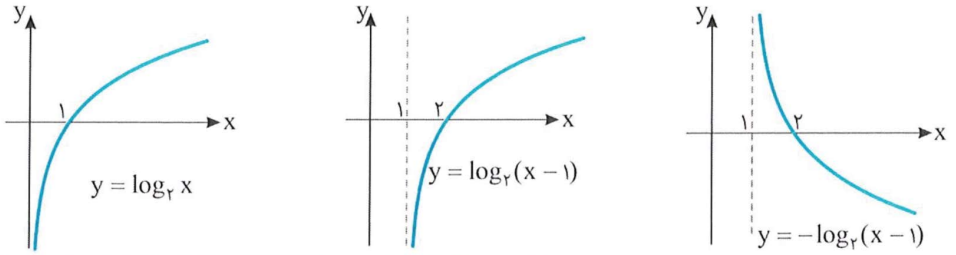
۱)


۲)


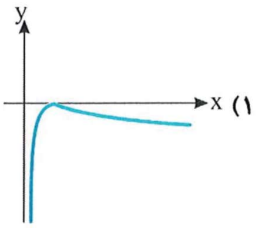
۳)


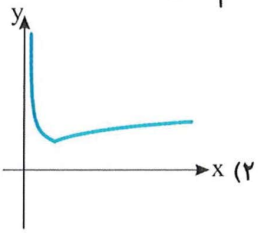
۴)


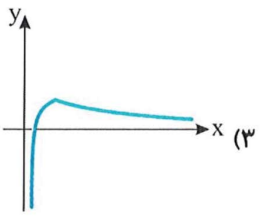
راه‌حل برای رسم نمودار تابع f، ابتدا نمودار تابع $y=\log_2 x$ را رسم می‌کنیم. سپس آن را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log_2(x-1)$ به‌دست آید و در نهایت آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=-\log_2(x-1)$ حاصل شود.

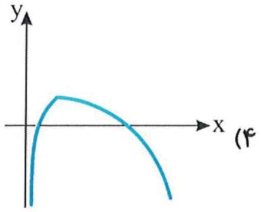


تست ۲ نمودار تابع $f(x)=1-|\log x|$ کدام است؟

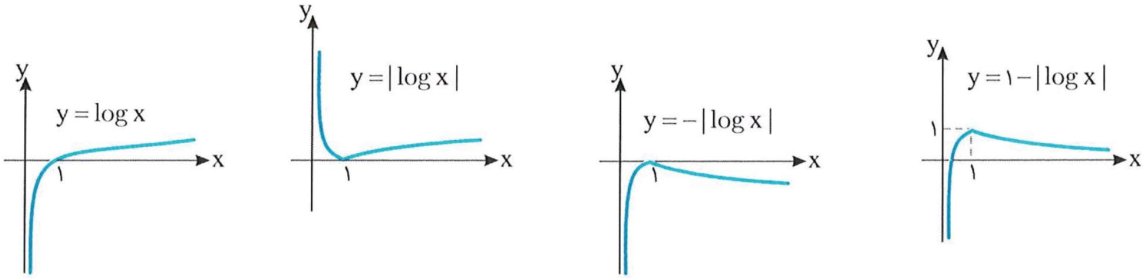
۱) 

۲) 

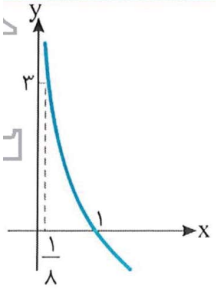
۳) 

۴) 

راه‌حل ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ قسمتی را که زیر محور x است نسبت به محور x پیدا می‌کنیم و قسمت زیر محور x را حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\log x|$ به‌دست بیاید. اکنون قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-|\log x|$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=1-|\log x|$ به‌دست بیاید.



تست ۳ نمودار تابع $f(x)=\log_a x$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f(16)f^{-1}(4)$ کدام است؟

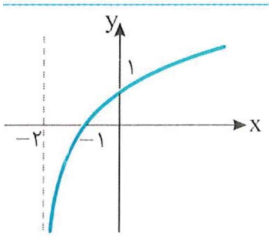


۱) $-\frac{1}{4}$
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) -4
۴) -2

راه‌حل نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{1}{8},3)$ گذشته است. بنابراین $\frac{1}{8}=3\Rightarrow a^3=\frac{1}{8}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$. بنابراین $f(\frac{1}{8})=\log_a \frac{1}{8}=3$.

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$. در نتیجه $f(16)=\log_{\frac{1}{2}} 16=-4$. برای اینکه $f^{-1}(4)$ را پیدا کنیم، x ای را پیدا می‌کنیم که $f(x)=4$. این معادله را می‌توان این‌طور نوشت $\log_{\frac{1}{2}} x=4$. بنابراین $x=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$. به این ترتیب $f(\frac{1}{16})=4$، پس $f^{-1}(4)=\frac{1}{16}$. بنابراین $f(16)f^{-1}(4)=(-4)(\frac{1}{16})=-\frac{1}{4}$.

تست ۴ شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\log_a(x+b)$ را نشان می‌دهد. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

راه‌حل دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-b,+\infty)$ است. با توجه به شکل، دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-2,+\infty)$ است. در نتیجه

$$-b=-2\Rightarrow b=2\Rightarrow f(x)=\log_a(x+2)$$

همچنین نمودار تابع از نقطهٔ $(0,1)$ می‌گذرد. در نتیجه $f(0)=\log_a 2=1$، پس $a=2$. بنابراین $a+b=4$.

تست ۵

نمودار تابع $f(x)=\log_a(bx+7)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر نمودار تابع از نقطهٔ $(b,1)$ بگذرد، مقدار ab کدام است؟

۱) -22 ۲) -33 ۳) -44 ۴) -55

راه‌حل

نمودار تابع از نقطهٔ $(3,0)$ می‌گذرد. پس

$$f(3)=0\Rightarrow\log_a(3b+7)=0\Rightarrow 3b+7=a^0=1\Rightarrow b=-2$$

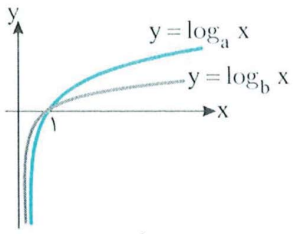
به این ترتیب $f(x)=\log_a(-2x+7)$. نمودار تابع از نقطهٔ $(b,1)$ عبور می‌کند. پس

$$f(b)=1\xrightarrow{b=-2}f(-2)=1\Rightarrow\log_a(4+7)=1\Rightarrow a=11$$

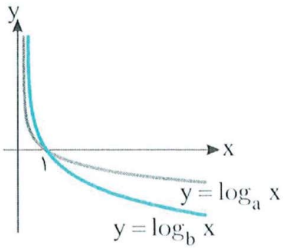
بنابراین $ab=-22$.

نکته ۳۴۷

نمودار تابع‌های $y=\log_a x$ و $y=\log_b x$ نسبت به یکدیگر به‌صورت زیر است:



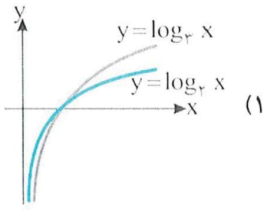
$1<a<b$

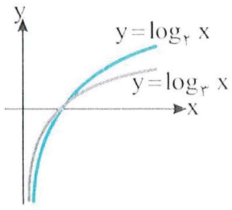


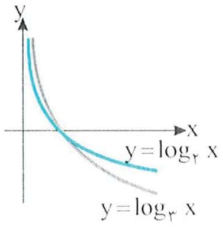
$0<a<b<1$

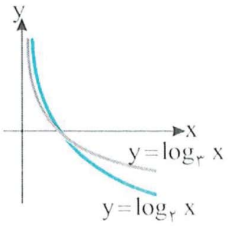
تست ۶

نمودار توابع $y=\log_2 x$ و $y=\log_3 x$ در کدام گزینه درست رسم شده است؟

۱)


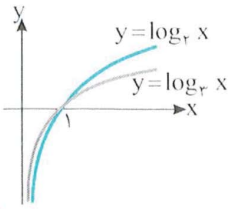
۲)


۳)


۴)


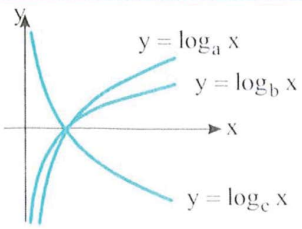
راه‌حل

می‌دانیم اگر پایه‌ها در توابع لگاریتمی از ۱ بزرگ‌تر باشند، نمودار آن‌ها به‌صورت روبه‌رو خواهد بود.



تست ۷

با توجه به نمودار روبه‌رو، کدام گزینه درست است؟



۱) $a<b<c$ ۲) $a<c<b$

۳) $c<a<b$ ۴) $c<b<a$

راه‌حل

توجه کنید که $a,b>1$ و $c<1$. همچنین $a<b$. پس $b>a>c$.

نکته ۳۴۸ دامنهٔ توابع لگاریتمی

برای تعیین دامنهٔ تابع $y=\log_{g(x)} f(x)$ باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را پیدا کنیم:

$$f(x)>0,\quad g(x)>0,\quad g(x)\neq 1$$

مثال: دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{(x-1)}(4-x)$ به‌صورت مقابل به‌دست می‌آید $4-x>0\Rightarrow x<4\ ,\ x-1>0\Rightarrow x>1\ ,\ x-1\neq 1\Rightarrow x\neq 2$

از اشتراک شرط‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $x\in(1,2)\cup(2,4)$.

تست ۸ چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(16-x^2)$ قرار دارند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

راه‌حل توجه کنید $D_f=\{x|16-x^2>0\}$ ، پس $16-x^2>0\Rightarrow x^2<16\Rightarrow|x|<4\Rightarrow-4<x<4$

بنابراین فقط هفت عدد صحیح -3 ، -2 ، ... ، 2 و 3 در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

نکته ۳۴۹

وارون برخی تابع‌های نمایی را می‌توان با استفاده از تابع‌های لگاریتمی نوشت. همین‌طور، وارون برخی تابع‌های لگاریتمی را می‌توان با استفاده از تابع‌های نمایی نوشت.

تست ۹ اگر $f(x)=\frac{2}{3^{x-1}}+1$ ، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{x-2}{3})$ ۲) $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{2}{x-1})$

۳) $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{3}{x-2})$ ۴) $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{1-x}{2})$

راه‌حل می‌توان نوشت $y=\frac{2}{3^{x-1}}+1\Rightarrow 3^{x-1}y=2+3^{x-1}\Rightarrow 3^{x-1}(y-1)=2\Rightarrow 3^{x-1}=\frac{2}{y-1}\Rightarrow x-1=\log_3(\frac{2}{y-1})$

پس $x=1+\log_3(\frac{2}{y-1})$. اگر جای x و y را در این تساوی عوض کنیم، به‌دست می‌آید $f^{-1}(x)=1+\log_3(\frac{2}{x-1})$.

تست ۱۰ اگر $f(x)=3\log(x-3)+5$ ، ضابطهٔ تابع وارون تابع f کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=3+10^{\frac{x-5}{3}}$ ۲) $f^{-1}(x)=3+\frac{1}{3}\times 10^{x-5}$

۳) $f^{-1}(x)=5+10^{\frac{x-3}{5}}$ ۴) $f^{-1}(x)=5+\frac{1}{3}\times 10^{x-5}$

راه‌حل توجه کنید که $y=3\log(x-3)+5$ ، بنابراین $y-5=3\log(x-3)$. در نتیجه

$$\frac{y-5}{3}=\log(x-3)\Rightarrow x-3=10^{\frac{y-5}{3}}\Rightarrow x=3+10^{\frac{y-5}{3}}\Rightarrow f^{-1}(x)=3+10^{\frac{x-5}{3}}$$

تست ۱۱ اگر $f(x)=\frac{10^x-3}{5+10^x}$ ، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\log(\frac{5x+1}{1-x})$ ۲) $f^{-1}(x)=\log(\frac{x-5}{x-3})$

۳) $f^{-1}(x)=\log(\frac{x+3}{x+5})$ ۴) $f^{-1}(x)=\log(\frac{5x+3}{1-x})$

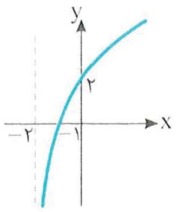
راه‌حل توجه کنید که

$$y=\frac{10^x-3}{5+10^x}\Rightarrow y(5+10^x)=10^x-3\Rightarrow 5y+10^x y=10^x-3\Rightarrow 10^x(y-1)=-3-5y$$

$$10^x=\frac{5y+3}{1-y}\Rightarrow x=\log(\frac{5y+3}{1-y})\Rightarrow f^{-1}(x)=\log(\frac{5x+3}{1-x})$$

دست‌گرمی

۳۹۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. ضابطهٔ تابع f کدام می‌تواند باشد؟



۱) $f(x)=\log_{\sqrt{۲}}(x+۲)$

۲) $f(x)=\log_{۲}(x+۲)$

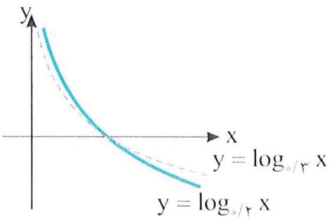
۳) $f(x)=\log_{\sqrt{۲}}(x+۳)$

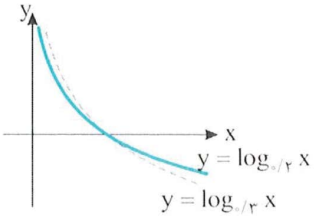
۴) $f(x)=\log_{۲}(x+۳)$

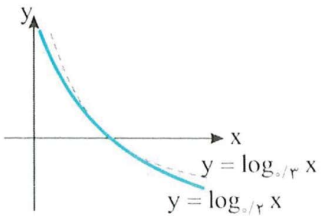
۳۹۱- اگر $f(x)=۴+\log(۲x-۴)$، مقدار $f^{-۱}(۶)$ کدام است؟

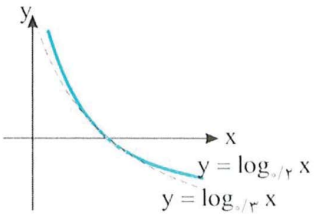
۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۱۰۴

۳۹۲- نمودار تابع‌های $y=\log_{۰/۲} x$ و $y=\log_{۰/۳} x$ در کدام گزینه درست رسم شده است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۳۹۳- دامنهٔ تابع $f(x)=\log(۹-x^{۲})$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۹۴- اگر $f(x)=۳^{۵x-۱}$، ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\log_{۳}(۵x)-۱$

۲) $f^{-۱}(x)=\log_{۳}(۵x)+۱$

۳) $f^{-۱}(x)=\dfrac{\log_{۳} x-۱}{۵}$

۴) $f^{-۱}(x)=\dfrac{\log_{۳} x+۱}{۵}$

۳۹۵- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\log_{۳}(x-۲)$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۳^{x}-۲$

۲) $f^{-۱}(x)=۳^{x}+۲$

۳) $f^{-۱}(x)=۲^{x}+۳$

۴) $f^{-۱}(x)=۲^{x}-۳$

آزمون ۲۳۸ توابع لگاریتمی (۱)

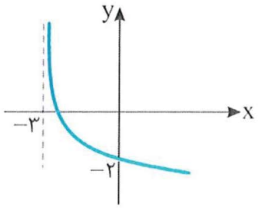
۲۳۷۱- اگر $f(x)=3+5\log(2x-3)$، مقدار $f^{-1}(8)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) $\frac{13}{2}$

۲۳۷۲- نمودار تابع $f(x)=a+\log_{\frac{1}{2}}(bx+1)$ از نقطه‌های $(2,3)$ و $(3,4)$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟

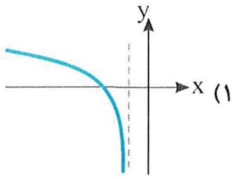
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

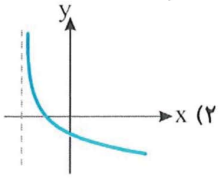
۲۳۷۳- نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(ax+b)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار ab کدام است؟

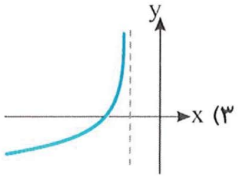


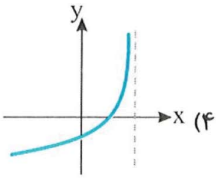
۱) ۹ ۲) ۳۶
۳) ۸۱ ۴) ۲۷

۲۳۷۴- نمودار تابع $y=-\log(x+2)$ کدام است؟

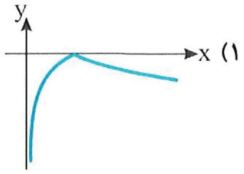
۱) 

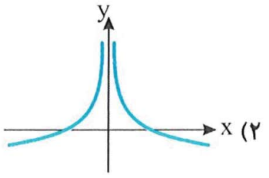
۲) 

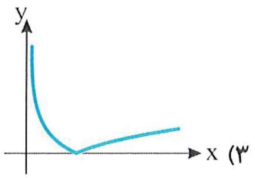
۳) 

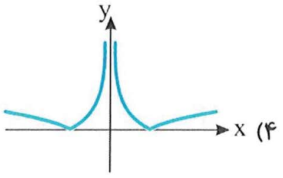
۴) 

۲۳۷۵- نمودار تابع $y=-|\log x|$ کدام است؟

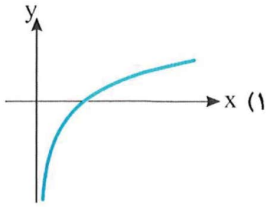
۱) 

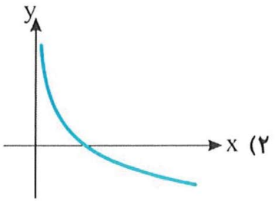
۲) 

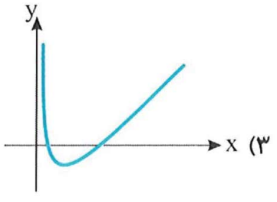
۳) 

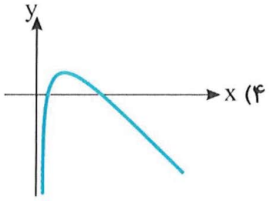
۴) 

۲۳۷۶- نمودار تابع $f(x)=\log_2\frac{2}{x}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۳۷۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{(x-2)}(10-x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۳۷۸- اگر دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log(x^2-2mx+4)$ مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(0,2)$

۲۳۷۹- نمودار تابع $y=2^x$ را ابتدا یک واحد به سمت راست برده، پس از آن یک واحد به بالا می‌بریم، سپس نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید کدام است؟

۱) $y=\log_2(x+1)+1$ ۲) $y=\log_2(x-1)-1$ ۳) $y=\log_2(x-1)+1$ ۴) $y=\log_2(x+1)-1$

۲۳۸۰- اگر $f(x)=-\log_2(x-1)+2$، ضابطهٔ تابع f^{-1} کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=2^{x-2}-1$ ۲) $f^{-1}(x)=2^{2-x}-1$ ۳) $f^{-1}(x)=2^{2-x}+1$ ۴) $f^{-1}(x)=2^{x-2}+1$

سؤال
۲۳۷۱
۲۳۷۲
۲۳۷۳
۲۳۷۴
۲۳۷۵
۲۳۷۶
۲۳۷۷
۲۳۷۸
۲۳۷۹
۲۳۸۰

آزمون ۲۳۹ توابع لگاریتمی (۲)

سؤال	گام
۲۳۸۱	۶۲ ۳۴۳ ۳۵۰
۲۳۸۲	۳۴۳ ۳۴۶
۲۳۸۳	۳۴۳ ۳۴۶ ۳۴۸
۲۳۸۴	۳۵۲ ۳۴۳ ۳۴۶
۲۳۸۵	۳۲ ۳۵ ۳۴۶
۲۳۸۶	۳۱ ۳۲ ۳۸ ۳۴۶
۲۳۸۷	۳۴۳ ۳۴۸
۲۳۸۸	۳۸۴
۲۳۸۹	۳۳۸ ۳۴۳ ۳۴۹
۲۳۹۰	۳۴۳ ۳۴۹

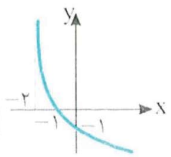
۲۳۸۱- اگر $f(x)=\log_۳(۲x-k)$ و $f^{-۱}(۳)=۲۹$، مقدار k کدام است؟

۱) ۶۹ ۲) ۵۷ ۳) ۵۲ ۴) ۳۱

۲۳۸۲- نمودار تابع $f(x)=\log_۲(ax+b)$ نیمساز ناحیهٔ اول را در نقطه‌ای به طول ۲ و نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده است. مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۳۸۳- نمودار تابع $f(x)=\log_a(bx+c)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

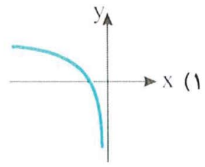


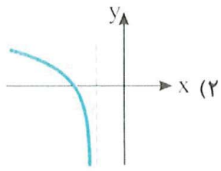
۱) ۲ ۲) ۳
۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

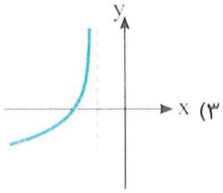
۲۳۸۴- فاصلهٔ نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f(x)=\log_۲(۳x-۵)$ با محور طول‌ها از نقطهٔ برخورد نمودار تابع وارون آن با محور عرض‌ها کدام است؟

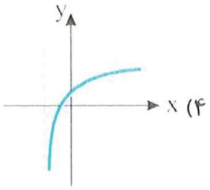
۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۲۳۸۵- کدام گزینه نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(-x-۱)$ است؟

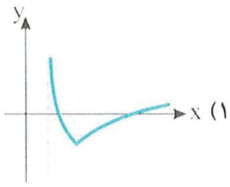
۱) 

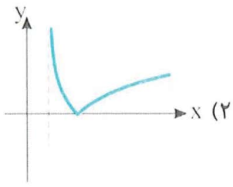
۲) 

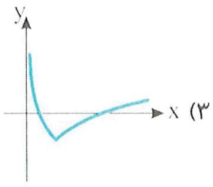
۳) 

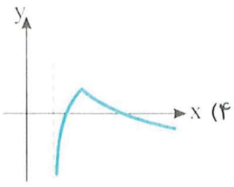
۴) 

۲۳۸۶- نمودار تابع $f(x)=|\log(x-۱)|-۱$ کدام است؟

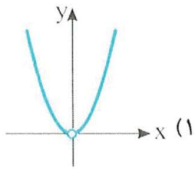
۱) 

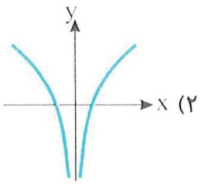
۲) 

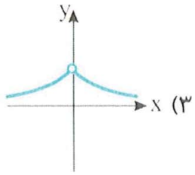
۳) 

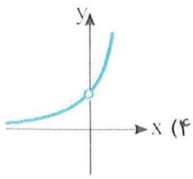
۴) 

۲۳۸۷- نمودار تابع $f(x)=۲^{\log_۲ x^۲}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۳۸۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{(x-۱)}(۱۶-x^۲)$ به‌صورت $(a,b)-\{c\}$ است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۳۸۹- اگر $f(x)=\frac{۴-۲^{x+۱}}{۲^x-۱}$، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\log_۲(\frac{x+۴}{x-۲})$ ۲) $f^{-۱}(x)=\log_۲(\frac{x-۴}{x-۲})$ ۳) $f^{-۱}(x)=\log_۲(\frac{x-۴}{x+۲})$ ۴) $f^{-۱}(x)=\log_۲(\frac{x+۴}{x+۲})$

۲۳۹۰- ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\frac{\log x}{۱+\log x}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۱۰^{\frac{x}{۱+x}}$ ۲) $f^{-۱}(x)=۱۰^{\frac{x}{۱-x}}$ ۳) $f^{-۱}(x)=۱۰^{\frac{x+۱}{x}}$ ۴) $f^{-۱}(x)=۱۰^{\frac{x-۱}{x}}$

درس پنجم: معادلات و نامعادلات لگاریتمی

معادلات لگاریتمی

چون تابع لگاریتمی یک‌به‌یک است، برای حل معادلهٔ $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ باید معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل کنیم. البته باید توجه کنیم که اگر b جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ باشد، باید b در دامنهٔ تابع‌های f و g باشد و $f(b)>0$ و $g(b)>0$.

مثال: معادلهٔ $\log(x^2-3)=\log(2x)$ به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$x^2-3=2x\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow(x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=3\ ,\ x=-1$$

چون مقادیر x^2-3 و $2x$ به ازای $x=-1$ منفی می‌شوند، پس این جواب قابل قبول نیست. بنابراین جواب معادلهٔ مورد نظر $x=3$ است.

تست ۱ معادلهٔ $\log(x-1)+\log(x+1)=\log 3$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log(x-1)+\log(x+1)=\log 3\Rightarrow\log((x-1)(x+1))=\log 3$$

$$\log(x^2-1)=\log 3\Rightarrow x^2-1=3\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

واضح است که به ازای $x=-2$ عبارت‌های $\log(x-1)$ و $\log(x+1)$ تعریف نمی‌شوند، پس تنها جواب معادله $x=2$ است.

تست ۲ اگر $\log_3(x^2-1)=1+\log_3(x+3)$، مقدار x کدام است؟

۱) ۵ و ۲ ۲) ۵ و -2 ۳) -5 و ۲ ۴) -5 و -2

راه‌حل ابتدا طرفین را ساده می‌کنیم:

$$\log_3(x^2-1)=\log_3 3+\log_3(x+3)\Rightarrow\log_3(x^2-1)=\log_3 3(x+3)$$

$$x^2-1=3x+9\Rightarrow x^2-3x-10=0\Rightarrow(x-5)(x+2)=0\Rightarrow x=-2,\quad x=5$$

تست ۳ معادلهٔ $\log_2(x-1)\times\log_{(x-1)}4=x^2$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

راه‌حل چون $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$، معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{\log(x-1)}{\log 2}\times\frac{\log 4}{\log(x-1)}=x^2\Rightarrow\frac{\log 4}{\log 2}=x^2\Rightarrow\log_2 4=x^2\Rightarrow 2=x^2\Rightarrow x=-\sqrt{2},\quad x=\sqrt{2}$$

به ازای $x=-\sqrt{2}$ عبارت $x-1$ منفی است، پس این جواب قبول نیست و فقط جواب $x=\sqrt{2}$ قبول است.

تست ۴ چند عدد طبیعی در دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{\log_2(x-3)-3}$ قرار ندارند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل توجه کنید xهایی در دامنهٔ f قرار دارند که اولاً $x-3>0$ و ثانیاً $\log_2(x-3)-3\neq 0$. برای اینکه $x-3>0$، باید $x>3$. از طرف دیگر

$$\log_2(x-3)-3=0\Rightarrow\log_2(x-3)=3\Rightarrow x-3=2^3=8\Rightarrow x=11$$

بنابراین باید $x>3$ و $x\neq 11$. به این ترتیب، عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۱۱ در دامنهٔ تابع f نیستند.

تست ۵ جواب معادلهٔ $\log_{۳} x+\log_{x} ۳-۲=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۹

راه‌حل توجه کنید که $\log_{x} ۳=\frac{۱}{\log_{۳} x}$. بنابراین اگر فرض کنیم $\log_{۳} x=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$t+\frac{۱}{t}-۲=۰\Rightarrow t^{۲}-۲t+۱=۰\Rightarrow(t-۱)^{۲}=۰\Rightarrow t=۱$$

بنابراین $\log_{۳} x=۱$، در نتیجه $x=۳$.

تست ۶ معادلهٔ $\log_{x}(x^{۳}-۲x)=۲$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

راه‌حل معادله را ساده می‌کنیم:

$$\log_{x}(x^{۳}-۲x)=۲\Rightarrow x^{۳}-۲x=x^{۲}\Rightarrow x^{۳}-x^{۲}-۲x=۰\Rightarrow x(x^{۲}-x-۲)=۰\Rightarrow x(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-۱\ ,\ x=۲$$

$x=۰$ و $x=-۱$ غیرقابل قبول هستند. پس معادله یک جواب دارد.

تست ۷ جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $\log_{۲}(۴^{x}+۳)=x+۲$ کدام است؟

۱) $\log_{۳} ۲$ ۲) $\log_{۳} ۴$ ۳) $\log_{۲} ۳$ ۴) صفر

راه‌حل با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_{۲}(۴^{x}+۳)=x+۲\Rightarrow ۴^{x}+۳=۲^{x+۲}\Rightarrow ۴^{x}-۴\times ۲^{x}+۳=۰\Rightarrow(۲^{x}-۱)(۲^{x}-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}۲^{x}-۱=۰\Rightarrow ۲^{x}=۱\Rightarrow x=۰\\ ۲^{x}-۳=۰\Rightarrow ۲^{x}=۳\Rightarrow x=\log_{۲} ۳\end{cases}$$

بنابراین جواب بزرگ‌تر معادله $\log_{۲} ۳$ است.

تست ۸ حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $x^{(۲+\log_{۲} x)}=۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

راه‌حل از طرفین معادله در پایهٔ ۲ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_{۲} x^{(۲+\log_{۲} x)}=\log_{۲} ۴\Rightarrow(۲+\log_{۲} x)\log_{۲} x=۲$$

فرض می‌کنیم $a=\log_{۲} x$. در نتیجه

$$(۲+a)a=۲\Rightarrow a^{۲}+۲a-۲=۰\Rightarrow a=-۱\pm\sqrt{۳}\Rightarrow\log_{۲} x=-۱+\sqrt{۳}\Rightarrow x=۲^{-۱+\sqrt{۳}}\ ,\ \log_{۲} x=-۱-\sqrt{۳}\Rightarrow x=۲^{-۱-\sqrt{۳}}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با $۲^{-۱+\sqrt{۳}}\times ۲^{-۱-\sqrt{۳}}=۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$.

تست ۹ در دستگاه معادله‌های $\begin{cases}\log x+\log y=۶\\ \log x\log y=۸\end{cases}$ مقدار $\log(\frac{x}{y})$ کدام است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۴ ۳) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۴) $\pm\frac{۱}{۴}$

راه‌حل اگر فرض کنیم $\log x=a$ و $\log y=b$، آن‌گاه

$$a+b=۶\Rightarrow b=۶-a\ ,\quad ab=۸$$

بنابراین $a(۶-a)=۸$ و در نتیجه

$$a^{۲}-۶a+۸=۰\Rightarrow(a-۲)(a-۴)=۰\Rightarrow a=۲,\ a=۴$$

$$a=۲\xrightarrow{b=۶-a} b=۴\Rightarrow\log x=۲,\ \log y=۴\Rightarrow\log(\frac{x}{y})=\log x-\log y=۲-۴=-۲$$

$$a=۴\xrightarrow{b=۶-a} b=۲\Rightarrow\log x=۴,\ \log y=۲\Rightarrow\log(\frac{x}{y})=\log x-\log y=۴-۲=۲$$

چون تابع لگاریتم اکیداً یکنواست، پس می‌توانیم نامعادلهٔ $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$ را به یکی از نامعادلات $0 < f(x) \le g(x)$ یا $0 < g(x) \le f(x)$ تبدیل کنیم.

نکته

فرض کنید $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$. در این‌صورت،

- اگر $0 < a < 1$، آن‌گاه $0 < g(x) \le f(x)$.
- اگر $a > 1$، آن‌گاه $0 < f(x) \le g(x)$.

مثال: مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log x \le \log(2x-1)$ به‌صورت $0 < 2x-1 \le x$ به‌دست می‌آید:

بنابراین $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 \le x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \le 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \in (\frac{1}{2}, 1]$

تست ۱۰ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_4(3x-2) \le 2$ بازهٔ $(a, b]$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

راه‌حل توجه کنید که $\log_4(3x-2) \le 2 \Rightarrow \log_4(3x-2) \le \log_4 16 \Rightarrow 3x-2 \le 16 \Rightarrow x \le 6$

از طرف دیگر، باید $3x-2 > 0$، یعنی $x > \frac{2}{3}$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ داده شده بازهٔ $(\frac{2}{3}, 6]$ است. بنابراین $a = \frac{2}{3}$ و $b = 6$، در نتیجه $ab = 4$.

تست ۱۱ چند عدد صحیح کوچک‌تر از ۱۰ در نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{3}}(x-4) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 0$ صدق می‌کنند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل نامعادله را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم: $\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3}(x-2)(x-4)) < 0 = \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow \frac{1}{3}(x-2)(x-4) > 1$

$(x-2)(x-4) > 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) > 0 \Rightarrow x > 5$ یا $x < 1$

چون $x-2$ و $x-4$ باید مثبت باشند، پس باید $x > 4$. اکنون پاسخ را با $x > 4$ اشتراک می‌گیریم. جواب نامعادله $x > 5$ است و فقط ۴ عدد صحیح کوچک‌تر از ۱۰ در آن وجود دارد.

تست ۱۲ چند عدد طبیعی در نامعادلهٔ $\log_2(\log_3(2x+1)) > 2$ صدق نمی‌کنند؟

۱) ۳۸ ۲) ۳۹ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

راه‌حل توجه کنید که $\log_2(\log_3(2x+1)) > 2 = \log_2 4 \Rightarrow \log_3(2x+1) > 4 = \log_3 3^4 \Rightarrow 2x+1 > 81 \Rightarrow x > 40$

بنابراین عددهای طبیعی ۱ تا ۴۰ در نامعادله صدق نمی‌کنند که تعداد آن‌ها ۴۰ تا است.

تست ۱۳ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{(x-1)} x^2 > 2$ کدام است؟

۱) $(2, +\infty)$ ۲) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ۳) $(1, +\infty)$ ۴) $(1, 2)$

راه‌حل با توجه به اینکه پایهٔ لگاریتم متغیر است، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول پایه عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد. یعنی $x > 2$. در این حالت

$$\log_{(x-1)} x^2 > \log_{(x-1)} (x-1)^2 \Rightarrow x^2 > (x-1)^2 \Rightarrow x^2 > x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

بنابراین در این حالت $(2, +\infty)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است.

حالت دوم پایه عددی بین صفر و ۱ باشد. یعنی $0<x-1<1$. در این حالت

$$\log_{(x-1)} x^2 > \log_{(x-1)}(x-1)^2 \Rightarrow x^2 < (x-1)^2 \Rightarrow x^2 < x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

بنابراین در این حالت نامعادله جواب ندارد. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(2, +\infty)$ است.

تست ۱۴ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{1-\log(x-1)}$ به کدام صورت است؟

۱) $(1, 2]$ ۲) $[2, 10]$ ۳) $[1, 11)$ ۴) $(1, 11]$

راه‌حل

شرایط دامنه را می‌نویسیم:

$x-1>0 \Rightarrow x>1$ ، $1-\log(x-1)\geq 0 \Rightarrow \log(x-1)\leq 1 \Rightarrow x-1\leq 10 \Rightarrow x\leq 11$

بنابراین $D_f=(1, 11]$.

دست‌گرمی

۳۹۶- معادلهٔ $\log(x^2-7x)=\log x$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۹۷- جواب معادلهٔ $\log_2 \sqrt{x}+\log_4(x-6)=2$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۳۹۸- معادلهٔ $\log_{(2x-1)} x=2$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۹۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_3(10-x)\leq 2$ کدام است؟

۱) $(1, +\infty)$ ۲) $[1, +\infty)$ ۳) $[1, 10]$ ۴) $[1, 10)$

۴۰۰- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log(x+2)>\log(2x+1)$ کدام است؟

۱) $(-\infty, 1)$ ۲) $(-\frac{1}{2}, 1)$ ۳) $(-2, 1)$ ۴) $(-2, -\frac{1}{2})$

۴۰۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log_{0/5}(x-2)}$ بازهٔ $(a, b]$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

آزمون ۲۴۰ معادلات و نامعادلات لگاریتمی (۱)

۲۳۹۱- معادلهٔ $\log(x^۲-۳x)=\log x$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۳۹۲- معادلهٔ $\log_۲(۱۲b-۲۱)-\log_۲(b^۲-۳)=۲$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳۹۳- جواب معادلهٔ $\log_۲(\log_۳(x-۱))=۵$ کدام است؟

۱) $۳^{۳۲}+۱$ ۲) $۲^{۳۲}+۳$ ۳) $۳^۵+۱$ ۴) $۲^{۳۵}+۱$

۲۳۹۴- جواب معادلهٔ $\log_۴ x+\log_{۱۶} x^۲+\log_{۶۴} x^۳=۹$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۶۴

۲۳۹۵- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\log_۳ x-۶\log_x ۳+۱=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۲۳۹۶- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\log(x+۲)}{\log(۳-x)}$ کدام است؟

۱) $(-۲,۳)-\{۲\}$ ۲) $(-۲,۳)$ ۳) $(-۳,-۲)$ ۴) $(-۳,۲)-\{۱\}$

۲۳۹۷- اگر $f(x)=\log x^۲$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۱}$، چند عدد در دامنهٔ تابع gof قرار ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) نامتناهی

۲۳۹۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log(x+۱)>\log ۳$ کدام است؟

۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $(۲,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۲)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

۲۳۹۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)>۱$ کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $(۱,\frac{۳}{۲}]$ ۳) $[۱,\frac{۳}{۲}]$ ۴) $(۱,\frac{۳}{۲})$

۲۴۰۰- چند عدد صحیح در مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log(۱۶-x^۲)<\log ۱۵$ قرار دارند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) نامتناهی

سؤال
۲۳۹۱
۲۳۹۲
۲۳۹۳
۲۳۹۴
۲۳۹۵
۲۳۹۶
۲۳۹۷
۲۳۹۸
۲۳۹۹
۲۴۰۰

آزمون ۲۴۱ معادلات و نامعادلات لگاریتمی (۲)

۲۴۰۱- جواب معادلهٔ $\log_{۹}(۲x+۱)=\frac{۱}{۲}+\log_{۹}(x-۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۴۰۲- جواب معادلهٔ $\log x-\log(x+۱)=\log(\log ۲)$ کدام است؟

۱) $\log_{۵} ۲$ ۲) $\log_{۲} ۵$ ۳) $\log ۵$ ۴) $\log_{۵} ۱۰$

۲۴۰۳- جواب معادلهٔ $\log_{۲}(۱۴+\log_{۴}(x-۱))=۴$ کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۳۳ ۳) ۱۷ ۴) ۹

۲۴۰۴- جواب معادلهٔ $\log_{۴} x+\log_{۱۶} x+\log_{۶۴} x=\frac{۱۱}{۳}$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۲

۲۴۰۵- اگر $\frac{۱}{\log_{x} ۳}-\frac{۱۲}{\log_{۳} x}=۱$، مقادیر x کدام‌اند؟

۱) ۲۷ و $\frac{۱}{۸۱}$ ۲) ۸۱ و $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) ۹ و $\frac{۱}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱}{۲۷}$ و ۹

۲۴۰۶- حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $(\log_{۲} x)(\log_{۸} x)-\log_{۲} x-\log_{\frac{۱}{۸}} x-۱=۰$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۴۰۷- در دستگاه معادله‌های $\begin{cases}\log x+\log y=۳\\ \log x^{۲}-\log y^{۳}=۱\end{cases}$ حاصل $x-۲y$ کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۸۰۰

۲۴۰۸- چند عدد صحیح در نامعادله‌های $-۳\le\log_{\frac{۱}{۳}}(۲x-۱)\le-۲$ صدق می‌کنند؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۴۰۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{۲}(۱+۳x)<\log_{۲}(x+۷)$ کدام است؟

۱) $(-۷,۳)$ ۲) $(-۷,-\frac{۱}{۳})$ ۳) $(-\infty,۳)$ ۴) $(-\frac{۱}{۳},۳)$

۲۴۱۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۱-\log_{۳}(x+۲)}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۲)$ ۲) $(-۲,۱]$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(-۲,۱)$

سؤال	گام
۲۴۰۱	۳۰۶ ۳۴۳ ۳۴۴ ۳۵۰
۲۴۰۲	۳۰۶ ۳۴۴ ۳۵۰
۲۴۰۳	۳۴۳ ۳۵۰
۲۴۰۴	۳۴۳ ۳۴۴ ۳۵۰
۲۴۰۵	۳۰۶ ۳۴۳ ۳۴۴ ۳۵۰
۲۴۰۶	۳۴۳ ۳۴۴ ۳۵۰
۲۴۰۷	۳۴۳ ۳۴۴ ۳۵۰
۲۴۰۸	۳۴۴ ۳۵۱
۲۴۰۹	۳۵۱
۲۴۱۰	۳۴۴ ۳۵۱

آزمون ۲۴۲ — معادلات و نامعادلات لگاریتمی (۳)

۲۴۱۱- اگر $\log_{۵} ۲۵=\log_{۴}(۲۸x-۶)-\log_{۴}(x-۱)$، آن‌گاه

۱) $x=-\frac{۵}{۶}$ ۲) $x=-\frac{۲}{۳}$ ۳) $x=-\frac{۱}{۲}$ ۴) معادله جواب ندارد.

۲۴۱۲- معادلهٔ $۲\log_{x}(۲x-۱)=۱$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴۱۳- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\log_{۲}(x+۳)+\log_{۴}(x^{۲}-۶x+۹)=۴$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴۱۴- جواب معادلهٔ $\log_{۵} x+\log_{\sqrt{۵}} x-۲\log_{۲۵} x=\log_{۲} ۲۵$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۵^{\log_{۲} ۵}$ ۳) $۲^{\log_{۵} ۲}$ ۴) ۵

۲۴۱۵- مجموع مربع‌های جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱}{۱+\log_{۲} x}-\frac{۱}{۱+\log_{۲} x^{۲}}=\frac{۱}{۶}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۴۱۶- معادلهٔ $x^{(۸-\log x)}=\frac{۱}{x^{۲}}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۲۴۱۷- در دستگاه معادله‌های $\begin{cases} x+y=۱۰ \\ \log_{۲} x+\log_{۲} y=۴ \end{cases}$ حاصل $x^{۲}+y^{۲}$ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۶۸ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

۲۴۱۸- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۱)>\log_{\frac{۱}{۲}}(۲x-۱)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},۲)$ ۴) $(۱,۲)$

۲۴۱۹- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۱}{۱+\log x}+\frac{۱}{۱-\log x}>۲$ کدام است؟

۱) $(۰,۱۰)-\{۱\}$ ۲) $(۱,۱۰)$ ۳) $(\frac{۱}{۱۰},۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۱۰},۱۰)-\{۱\}$

۲۴۲۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log(\frac{۳x-۱}{x+۳})}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

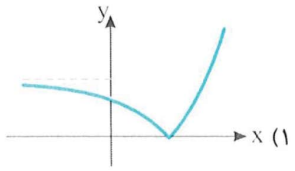
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

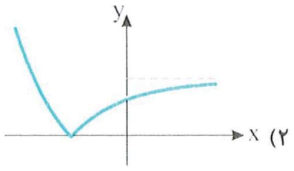
سؤال: ۲۴۱۱، ۲۴۱۲، ۲۴۱۳، ۲۴۱۴، ۲۴۱۵، ۲۴۱۶، ۲۴۱۷، ۲۴۱۸، ۲۴۱۹، ۲۴۲۰

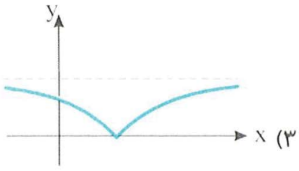
آزمون ۲۴۳

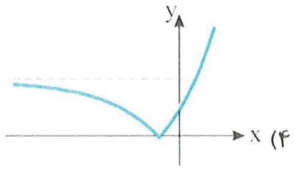
آزمون فصل یازدهم (۱)

۲۴۲۱- نمودار تابع $f(x)=|۳^{x-۱}-۱|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۴۲۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۴^x-۳\times۲^{x+۲}+۲۷=۰$ در کدام بازه است؟

۱) $(۱,۲)$ ۲) $(۲,۳)$ ۳) $(۳,۴)$ ۴) $(۴,۵)$

۲۴۲۳- فرض کنید $f(x)=a^x+b$. اگر $f(۱)=۱$ و $f(۲)=۷$، مقدار $f^{-۱}(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۳

۲۴۲۴- برد تابع $f(x)=۲^x-\frac{|x|}{x}$ کدام است؟

۱) $(-۱,+\infty)$ ۲) $(۰,+\infty)$

۳) $(-۱,۰)\cup(۲,+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)-\{۱\}$

۲۴۲۵- نمودار تابع $f(x)=\log_a(bx-۳)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. اگر نمودار تابع از نقطهٔ $(۱۵,۲)$ بگذرد، مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱۴}{۵}$

۲۴۲۶- اگر $\log ۳=a$ و $\log ۲=b$، مقدار $\log\sqrt[۴]{۷۲}$ برحسب a و b کدام است؟

۱) $\frac{۲a+۳b}{۴}$ ۲) $\frac{۳a+۲b}{۴}$ ۳) $\frac{a+۳b}{۴}$ ۴) $\frac{۳a+b}{۴}$

۲۴۲۷- مقدار $\frac{۱}{\log_۵ ۳۰}+\frac{۱}{\log_۳ ۳۰}+\frac{۱}{\log_۲ ۳۰}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴۲۸- جواب معادلهٔ $\log(x-۱)-\log x=\log(\log ۲)$ کدام است؟

۱) $۱+\log_۵ ۲$ ۲) $\log_۲ ۵$ ۳) $\log_۵ ۲$ ۴) $۱+\log_۲ ۵$

۲۴۲۹- جواب معادلهٔ $۲^{x+۱}=۵^{x-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱-۲\log ۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱-\log ۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱-۲\log ۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱-\log ۵}$

۲۴۳۰- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\log(x+۳)}{\log(۲-x)}$ کدام است؟

۱) $(-۳,۲)-\{۱\}$ ۲) $(-۲,۳)$ ۳) $(-۳,-۲)$ ۴) $(-۲,۳)-\{۲\}$

سؤال	گام
۲۴۲۱	۳۱، ۳۲، ۳۸، ۳۳۹
۲۴۲۲	۳۳۸، ۳۴۱
۲۴۲۳	۶۲، ۳۳۸
۲۴۲۴	۲۳، ۳۱، ۳۳۱، ۳۳۹
۲۴۲۵	۳۴۳، ۳۴۶
۲۴۲۶	۳۴۴
۲۴۲۷	۳۴۴
۲۴۲۸	۳۰۶، ۳۴۴، ۳۵۰
۲۴۲۹	۳۳۸، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵
۲۴۳۰	۲۲، ۳۴۸، ۳۵۰

آزمون ۲۴۴ آزمون فصل یازدهم (۲) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۲۴۳۱- نمودارهای دو تابع $y=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}$ و $y=۳^x+\frac{۸}{۳}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $(-۱,۱)$ کدام است؟

ریاضی - ۹۶

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

۲۴۳۲- نمودارهای دو تابع $f(x)=۴^x$ و $g(x)=(\frac{۱}{۲})^{۲x}+\frac{۳}{۲}$ در نقطهٔ A متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ A تا نقطهٔ $(-\frac{۱}{۲},۱)$ کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

۲۴۳۳- تابع $f(x)=a+\log_۲(bx-۴)$ از دو نقطهٔ $(۲,۶)$ و $(۱۲,۱۰)$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟

ریاضی - ۹۶

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴۳۴- تابع $f(x)=\log_۳(ax+b)$ فقط برای مقدارهای $x\in(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ بامعنی است. اگر $f(۴)=۲$، آن‌گاه مقدار $f(-\frac{۴}{۹})$ کدام است؟

ریاضی - ۹۴

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۴۳۵- اگر لگاریتم عدد $\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ در مبنای ۸، برابر با A باشد، مقدار لگاریتم عدد $(\frac{۱}{A}-۱)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

ریاضی - ۹۰

۱) ۳- ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۴۳۶- اگر $\log ۲=k$، حاصل $\log(۱+\sqrt{۵})+۲\log(۶-۲\sqrt{۵})$ کدام است؟

تجربی - ۹۰

۱) ۲k ۲) ۴k ۳) ۱+k ۴) ۲+۴k

۲۴۳۷- اگر $۲\log(x-۲)=\log(x+۱۰)$، آن‌گاه $\log_۴(x+۲)$ کدام است؟

ریاضی - ۸۵

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۴۳۸- از تساوی $\log_۵(۲x-۱)+\log_۵(۳x-۵)=۱$، مقدار $\log_۲(۶x+۳)$ کدام است؟

ریاضی - ۸۶

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۴۳۹- از معادلهٔ $\log_۳(x^۲-۱)=۱+\log_۳(x+۳)$، مقدار لگاریتم $(x-۳)$ در مبنای ۴ کدام است؟

ریاضی - ۸۸

۱) ۱- ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۲۴۴۰- از دو معادلهٔ دو مجهولی $۲^{x-۷}\times۴^{x+y}=۱$ و $\log y=۲\log ۳+\log x$، مقدار y کدام است؟

تجربی - ۹۶

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۲۴۵ آزمون فصل یازدهم (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

۲۴۴۱- نمودارهای دو تابع $f(x)=۳^{ax+b}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۹})^x$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(۲)=\frac{۱}{۳}$، مقدار $f^{-۱}(۲۷)$ کدام است؟ ریاضی ۹۵

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۳

۲۴۴۲- در تابع $f(x)=ab^x$، $f(۰)=\frac{۳}{۲}$، $f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}$ و $b>۰$. مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟ تجربی ۹۱

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۲۴۴۳- تابع $f(x)=a+\log_۲(۳x+b)^۲$ از دو نقطهٔ $(۵,۱۱)$ و $(۲۱,۱۵)$ می‌گذرد. مقدار a کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۶

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴۴۴- نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(ax+b)$ محور x را در نقطه‌ای به طول ۱- و نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده است. مقدار b کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۹۴

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۲۴۴۵- اگر $\log(x-۲)=۲\log ۲-\log(x-۴)$، حاصل $\log_۵(x-۳)$ کدام است؟ ریاضی ۸۷

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۴۴۶- اگر $۳^a=A$، مقدار $\log_۳(۹A^۲)$ برحسب a کدام است؟ ریاضی ۹۱

۱) ۲+۲a ۲) ۳+۲a ۳) ۲+$a^۲$ ۴) ۳+$a^۲$

۲۴۴۷- از تساوی $\log_x(۳x+۸)=۲-\log_x(x-۶)$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۳

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

۲۴۴۸- از معادلهٔ لگاریتمی $\log_۳(۲x^۲+۱)-\log_۳(x+۲)=۱$، مقدار لگاریتم $(۲x-۱)$ در پایهٔ ۸ کدام است؟ تجربی ۹۵

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۴۴۹- از معادلهٔ لگاریتمی $\log(x^۲-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)$، مقدار لگاریتم $\sqrt[۳]{x+۱}$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۵

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

۲۴۵۰- از دو معادلهٔ $\log_۳ x+\log_۳ y=۲$ و $x^۲+y^۲=۴۶$، مقدار لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ تجربی ۸۹

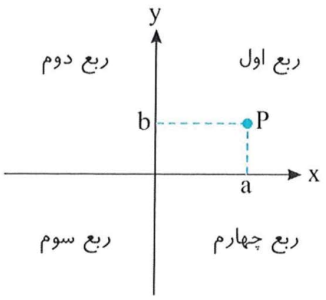
۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

سؤال	گام
۲۴۴۱	۶۲، ۳۳۸، ۳۴۱
۲۴۴۲	۳۳۸، ۳۴۱
۲۴۴۳	۳۴۴، ۳۴۶، ۳۵۰
۲۴۴۴	۳۴۳، ۳۴۶، ۳۵۰
۲۴۴۵	۳۴۴، ۳۵۰
۲۴۴۶	۳۴۳، ۳۴۴
۲۴۴۷	۳۴۴، ۳۵۰
۲۴۴۸	۳۴۴، ۳۵۰
۲۴۴۹	۳۰۶، ۳۴۴، ۳۵۰
۲۴۵۰	۳۴۴، ۳۵۰

فایل PDF آزمون‌های جامع تألیفی این فصل (و البته فصل‌های دیگر کتاب!) را می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

درس اول: خط راست

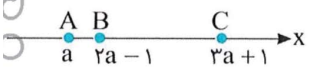
یادآوری محورهای مختصات در صفحه، دو محور با مبدأ مشترک هستند که هر یک بر دیگری عمود است. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر یک از این ناحیه‌ها را یک **ربع** می‌نامند (شکل را ببینید). نقطه‌های روی محورهای مختصات در هیچ ربعی نیستند. هر نقطه در صفحه مانند P متناظر با زوج مرتبی از عددهای حقیقی مانند (a, b) است. a را **طول** نقطهٔ P می‌نامند و معمولاً آن را با x_P نشان می‌دهند. b را عرض نقطهٔ P می‌نامند و معمولاً آن را با y_P نشان می‌دهند. a و b را **مختصات** نقطهٔ P می‌نامند و گاهی این نقطه را به شکل $P(a, b)$ می‌نویسند، که یعنی P نقطهٔ (a, b) است.



نکته فاصلهٔ بین دو نقطه ۳۵۲

اگر $A(x_A, ۰)$ و $B(x_B, ۰)$ دو نقطه روی محور x باشند، آن‌گاه طول پاره‌خط AB برابر است با $AB=|x_A-x_B|$. به همین ترتیب، اگر $C(۰, y_C)$ و $D(۰, y_D)$ دو نقطه روی محور y باشند، آن‌گاه طول پاره‌خط CD برابر است با $CD=|y_C-y_D|$. به‌طور کلی، اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در صفحه باشند، طول پاره‌خط AB برابر است با $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$

تست ۱ در شکل مقابل $AB+BC=۵$. اندازهٔ پاره‌خط BC کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

راه‌حل فاصلهٔ A از B برابر است با $AB=۲a-۱-a=a-۱$. فاصلهٔ B از C برابر است با $BC=۳a+۱-(۲a-۱)=a+۲$. بنابراین

$$AB+BC=۵\Rightarrow a-۱+a+۲=۵\Rightarrow a=۲\xrightarrow{BC=a+۲}BC=۲+۲=۴$$

تست ۲ اگر A و B نقطه‌های $(k+۳, ۲)$ و $(۵, ۱۰)$ باشند و $AB=۱۶$، حاصل‌ضرب مقدارهای ممکن k کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۲۲۱ ۴) -۱۸۸

راه‌حل توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(k+۳-۵)^۲+(۲-۱۰)^۲}\Rightarrow ۱۶=\sqrt{(k-۲)^۲+۸^۲}\Rightarrow ۲۵۶=(k-۲)^۲+۶۴\Rightarrow ۱۹۲=(k-۲)^۲\Rightarrow k-۲=\pm\sqrt{۱۹۲}\Rightarrow k=۲\pm\sqrt{۱۹۲}$$

حاصل‌ضرب این دو مقدار برابر است با $(۲-\sqrt{۱۹۲})(۲+\sqrt{۱۹۲})=۴-۱۹۲=-۱۸۸$.

تست ۳ طول نقطه‌ای روی محور x که فاصله‌اش از نقطه‌های $(۱, ۳)$ و $(۲, -۵)$ برابر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۲}$ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) $\frac{۱۷}{۲}$

راه‌حل فرض کنید نقطهٔ مورد نظر $(a, ۰)$ باشد. در این‌صورت فاصلهٔ این نقطه از نقطهٔ $(۱, ۳)$ برابر است با $\sqrt{(a-۱)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{a^۲-۲a+۱۰}$

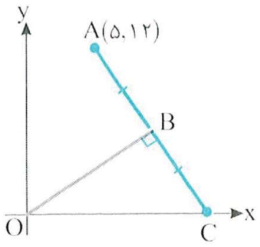
و فاصله‌اش از نقطهٔ $(۲, -۵)$ برابر است با $\sqrt{(a-۲)^۲+(۰-(-۵))^۲}=\sqrt{(a-۲)^۲+۲۵}=\sqrt{a^۲-۴a+۲۹}$

در نتیجه $\sqrt{a^۲-۲a+۱۰}=\sqrt{a^۲-۴a+۲۹}$. اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$a^۲-۲a+۱۰=a^۲-۴a+۲۹\Rightarrow ۲a=۱۹\Rightarrow a=\frac{۱۹}{۲}$$

تست ۴

در شکل مقابل O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است. طول نقطهٔ C کدام است؟



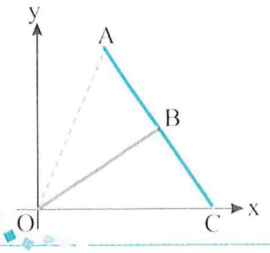
۱) ۱۵
۲) ۱۴
۳) ۱۳
۴) ۱۲

راه‌حل

چون O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است، پس

$$OC=OA=\sqrt{(۰-۵)^۲+(۰-۱۲)^۲}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

بنابراین طول نقطهٔ C برابر ۱۳ است.



نکته ۳۵۳ **مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط**

اگر A و B دو نقطه در صفحهٔ مختصات باشند، مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB، به‌صورت زیر است

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\quad ,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

تست ۵

نقطه‌های $A(۱۰,۴)$ ، $B(-۴,۹)$ و $C(-۲,-۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. طول میانهٔ نظیر رأس A کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۱
۴) ۹

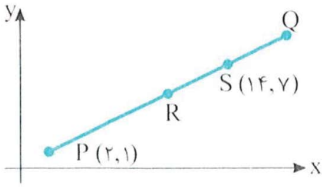
راه‌حل

نقطهٔ M وسط ضلع BC ، نقطهٔ $(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲})=(-۳,۴)$ است. بنابراین

$$AM=\sqrt{(۱۰+۳)^۲+(۴-۴)^۲}=\sqrt{۱۳^۲}=۱۳$$

تست ۶

در شکل روبه‌رو نقطهٔ R وسط پاره‌خط PQ و نقطهٔ S وسط پاره‌خط QR است. طول نقطهٔ Q کدام است؟



۱) ۱۷
۲) ۱۶
۳) ۱۵
۴) ۱۸

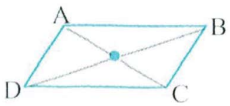
راه‌حل

طول نقطهٔ Q را با x نشان می‌دهیم. چون R وسط PQ است، پس طول نقطهٔ R برابر $\frac{x+۲}{۲}$ است. از طرف دیگر نقطهٔ S وسط پاره‌خط QR است. بنابراین طول نقطهٔ S برابر با $\frac{۱}{۲}(x+\frac{x+۲}{۲})$ است. با توجه به شکل، طول نقطهٔ S برابر ۱۴ است. بنابراین

$$\frac{۱}{۲}(x+\frac{x+۲}{۲})=۱۴\Rightarrow x+\frac{x+۲}{۲}=۲۸\Rightarrow ۲x+x+۲=۵۶\Rightarrow ۳x=۵۴\Rightarrow x=۱۸$$

نکته ۳۵۴

اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، چون قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، پس وسط قطر AC بر وسط قطر BD منطبق است، در نتیجه



$$x_A+x_C=x_B+x_D\quad ,\quad y_A+y_C=y_B+y_D$$

تست ۷

اگر نقطه‌های $A(۲,-۲)$ ، $B(۸,۴)$ ، $C(۵,۷)$ و $D(a,b)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، نقطهٔ D کدام است؟

۱) $(۱,۱)$
۲) $(۱,-۱)$
۳) $(-۱,۱)$
۴) $(-۱,-۱)$

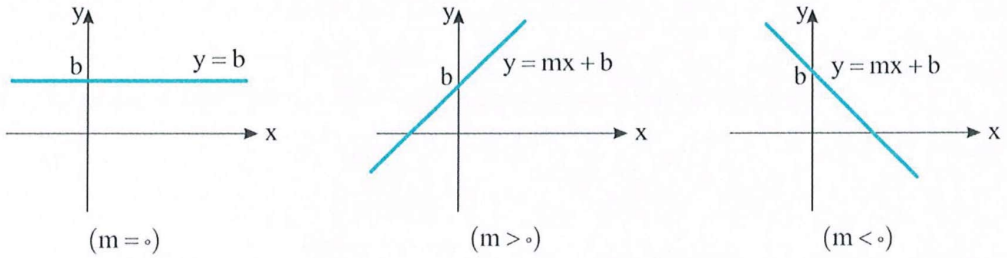
راه‌حل

توجه کنید که $y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow -۲+۷=۴+b\Rightarrow b=۱$ ، $x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow ۲+۵=۸+a\Rightarrow a=-۱$

بنابراین D نقطهٔ $(-۱,۱)$ است.

۳۵۵ **نکته** معادلهٔ خط

- شیب خطی که از نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد $(x_1 \neq x_2)$، برابر است با $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) می‌گذرد، به‌صورت $y-y_1=m(x-x_1)$ است.
- معادلهٔ هر خط که موازی محور y نیست به صورت $y=mx+b$ است، که در آن m شیب خط و b عرض از مبدأ خط است (عرض از مبدأ خط، عرض نقطهٔ برخورد خط با محور y است).



تست ۸ وسط پاره‌خطی که دو سر آن نقطه‌های برخورد خط راست l با محورهای مختصات هستند، نقطهٔ $(۵, ۲)$ است. معادلهٔ خط l کدام است؟

۱) $۵x+۲y=۲۹$ ۲) $۲x+۵y=۲۰$ ۳) $۳x-۲y=۱۱$ ۴) $۲x+۳y=۱۶$

راه‌حل فرض کنید خط l محورهای x و y را به ترتیب در نقطه‌های $(a, ۰)$ و $(۰, b)$ قطع می‌کند. در این‌صورت وسط پاره‌خطی که دو سرش این دو نقطه هستند، نقطهٔ $(\frac{a+۰}{۲}, \frac{۰+b}{۲})$، یعنی $(\frac{a}{۲}, \frac{b}{۲})$ است. بنابراین

$$(\frac{a}{۲}, \frac{b}{۲})=(۵, ۲) \Rightarrow \frac{a}{۲}=۵,\ \frac{b}{۲}=۲ \Rightarrow a=۱۰, b=۴$$

معادلهٔ خط راستی که از نقطه‌های $(۱۰, ۰)$ و $(۰, ۴)$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$y-۰=\frac{۰-۴}{۱۰-۰}(x-۱۰) \Rightarrow y=-\frac{۲}{۵}(x-۱۰) \Rightarrow ۵y+۲x=۲۰$$

۳۵۶ **نکته** حالت‌های خاص در معادلهٔ خط

معادلهٔ هر خط راست به‌صورت $ax+by+c=۰$ است، که در آن a و b همزمان برابر صفر نیستند.

- اگر $a=۰$، خط مورد نظر موازی محور x و شیب آن برابر صفر است.
- اگر $b=۰$، خط مورد نظر موازی محور y است و شیب آن تعریف نمی‌شود.
- اگر $c=۰$، خط مورد نظر از مبدأ مختصات می‌گذرد.
- اگر $b \neq ۰$، شیب خط مورد نظر برابر $-\frac{a}{b}$ است.

تست ۹ اگر شیب خط $(۲m-۱)x+(m+۱)y-m=۰$ برابر صفر باشد، شیب خط $(m-۱)x+(۲m^۲-۳m+۱)y+m=۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) تعریف نمی‌شود.

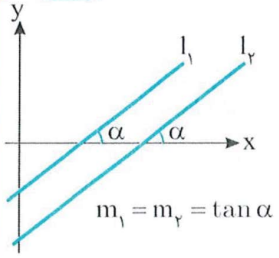
راه‌حل اگر $m+۱ \neq ۰$، شیب خط $(۲m-۱)x+(m+۱)y-m=۰$ برابر $-\frac{۲m-۱}{m+۱}$ است، که چون این شیب برابر صفر است، پس $-\frac{۲m-۱}{m+۱}=۰ \Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$

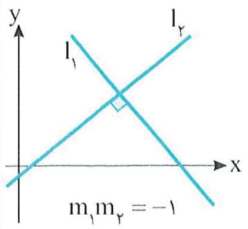
اکنون توجه کنید که اگر $m=\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه $۲m^۲-۳m+۱=۲(\frac{۱}{۴})-۳(\frac{۱}{۲})+۱=۰$

پس شیب خط $(m-۱)x+(۲m^۲-۳m+۱)y+m=۰$ تعریف نمی‌شود.

۳۵۷ **نکته** خط‌های موازی و خط‌های عمود بر هم

- فرض کنید l_1 و l_2 دو خط راست غیرموازی با محور y با شیب‌های m_1 و m_2 باشند. در این‌صورت l_1 و l_2 موازی‌اند، اگر و فقط اگر $m_1=m_2$.





- فرض کنید l_1 و l_2 دو خط راست غیرموازی با محورهای مختصات باشند. در این‌صورت l_1 و l_2 بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $m_1m_2=-1$.
- اگر یکی از خطوط l_1 و l_2 موازی محور x و دیگری موازی محور y باشد، این دو خط بر هم عمودند.

تست ۱۰

اگر خط‌های $2mx-3y=1$ و $y=-2x+1$ بر هم عمود باشند، مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

راه‌حل

شیب خط $2mx-3y=1$ برابر $\frac{-2m}{-3}$، یعنی $\frac{2m}{3}$ است و شیب خط $y=-2x+1$ برابر -2 است. حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -1 است:

$$\frac{2m}{3}\times(-2)=-1\Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

تست ۱۱

اگر خط‌های $3x+my=-1$ و $2m^2x+18y=1$ با یکدیگر موازی باشند، مقدار m کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -3 ۴) 3

راه‌حل

شیب خط $3x+my=-1$ برابر $-\frac{3}{m}$ و شیب خط $2m^2x+18y=1$ برابر $-\frac{m^2}{9}$ است. چون این خط‌ها با یکدیگر موازی هستند، پس شیب آن‌ها برابر است. در نتیجه

$$-\frac{3}{m}=-\frac{m^2}{9}\Rightarrow m^3=27\Rightarrow m=3$$

تست ۱۲

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(5,-3)$ می‌گذرد و بر خط گذرا از نقطه‌های $(-1,4)$ و $(2,3)$ عمود است، کدام است؟

۱) $3x+y-12=0$ ۲) $3y+x+4=0$ ۳) $y-3x-14=0$ ۴) $3x-y-18=0$

راه‌حل

شیب خطی که از نقطه‌های $(-1,4)$ و $(2,3)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{4-3}{-1-2}=-\frac{1}{3}$. بنابراین شیب خطی که بر آن عمود است برابر با 3 است.

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(5,-3)$ با شیب 3 می‌گذرد به‌صورت زیر است:

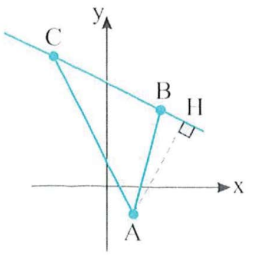
$$y+3=3(x-5)\Rightarrow 3x-y-18=0$$

تست ۱۳

اگر نقطه‌های $A(1,-1)$، $B(2,3)$ و $C(-2,5)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، معادلهٔ خطی که ارتفاع وارد بر ضلع BC روی آن است کدام است؟

۱) $y=2x-3$ ۲) $y=2x+1$ ۳) $y=-2x+1$ ۴) $y=-2x-1$

راه‌حل



ابتدا توجه کنید که شیب خطی که ضلع BC روی آن قرار دارد، برابر است با

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{5-3}{-2-2}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین ارتفاع وارد بر این ضلع، یعنی AH روی خطی به شیب 2 قرار دارد، یعنی $m_{AH}=2$. پس معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)\Rightarrow y-(-1)=2(x-1)\Rightarrow y=2x-3$$

تست ۱۴ اگر نقطه‌های $A(۲,۱)$ و $B(۴,-۳)$ دو سر پاره‌خط AB باشند، معادلهٔ عمودمنصف AB کدام است؟

۱) $x+۲y=۵$ ۲) $x-۲y=۵$ ۳) $۲x-y=۳$ ۴) $۲x+y=۳$

راه‌حل اول فرض کنید نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد. مختصات نقطهٔ M را حساب می‌کنیم

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+۴}{۲}=۳\ ,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۱-۳}{۲}=-۱$$

شیب خطی را که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حساب می‌کنیم $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۳-۱}{۴-۲}=-۲$. بنابراین شیب عمودمنصف پاره‌خط AB برابر $\frac{۱}{۲}$ است. پس معادلهٔ عمودمنصف AB که از نقطهٔ $M(۳,-۱)$ می‌گذرد و شیب آن $\frac{۱}{۲}$ است به‌صورت زیر است:

$$y-(-۱)=\frac{۱}{۲}(x-۳)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۲}\Rightarrow x-۲y=۵$$

راه‌حل دوم اگر نقطهٔ $M(x,y)$ روی عمودمنصف AB باشد، فاصلهٔ M از A برابر فاصلهٔ M از B است. پس

$$\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x-۴)^۲+(y+۳)^۲}\Rightarrow x^۲-۴x+۴+y^۲-۲y+۱=x^۲-۸x+۱۶+y^۲+۶y+۹\Rightarrow ۴x-۸y=۲۰\Rightarrow x-۲y=۵$$

معادلهٔ اخیر همان معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است.

تست ۱۵ پای عمود وارد از نقطهٔ $(۳,۴)$ بر خط $۲x+y-۷=۰$ کدام نقطه است؟

۱) $(\frac{۹}{۵},\frac{۱۷}{۵})$ ۲) $(۱,۵)$ ۳) $(۱,-۵)$ ۴) $(-۵,۱)$

راه‌حل شیب خط $۲x+y-۷=۰$ برابر است با $-\frac{۲}{۱}=-۲$. بنابراین اگر شیب خط مورد نظر برابر m باشد، آن‌گاه $m(-۲)=-۱$، یعنی $m=\frac{۱}{۲}$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن $\frac{۱}{۲}$ است و از نقطهٔ $(۳,۴)$ می‌گذرد به‌صورت مقابل است:

$$y-۴=\frac{۱}{۲}(x-۳)\Rightarrow x-۲y+۵=۰$$

پای عمود مورد نظر محل برخورد خط‌های $۲x+y-۷=۰$ و $x-۲y+۵=۰$ است. اگر دستگاه معادله‌های تشکیل شده از این معادلات را حل کنیم،

$x=\frac{۹}{۵}$ و $y=\frac{۱۷}{۵}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نقطهٔ مورد نظر $(\frac{۹}{۵},\frac{۱۷}{۵})$ است.

نکته فاصلهٔ نقطه از خط راست

فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$.

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,-۴)$ از خط $۳x-۴y+۶=۰$ برابر است با $\frac{|۳\times ۱-۴(-۴)+۶|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۲۵}{۵}=۵$.

مثال: برای اینکه فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,۳)$ از خط $y=۲x-۶$ را پیدا کنیم، ابتدا خط را به صورت $۲x-y-۶=۰$ می‌نویسیم، سپس از دستور فاصلهٔ نقطه از خط استفاده می‌کنیم: $\frac{|۲\times ۲-۳-۶|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|-۵|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$.

تست ۱۶ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۲k)$ از خط $y=-kx+۱$ برابر ۳ است. مقدار k کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۳}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

راه‌حل ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت $kx+y-۱=۰$ می‌نویسیم. به این ترتیب

$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ A از خط مورد نظر}=\frac{|k+۲k-۱|}{\sqrt{k^۲+۱}}=۳\Rightarrow |۳k-۱|=۳\sqrt{k^۲+۱}\Rightarrow ۹k^۲-۶k+۱=۹k^۲+۹\Rightarrow k=-\frac{۴}{۳}$$

تست ۱۷ اگر نقاط $A(۱,۲)$ ، $B(۳,۰)$ و $C(۱,۶)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $\frac{۴}{\sqrt{۱۰}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ ۳) $\frac{۶}{\sqrt{۱۰}}$ ۴) $\frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}$

راه‌حل ابتدا توجه کنید که معادلهٔ خطی که ضلع BC روی آن قرار دارد، به‌صورت زیر است:

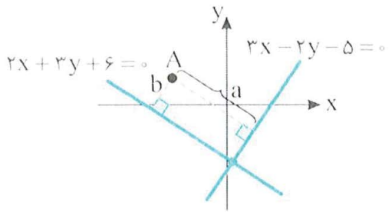
$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۶-۰}{۱-۳}=-۳,\quad y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-۰=-۳(x-۳)\Rightarrow ۳x+y-۹=۰$$

طول ارتفاع AH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ A از خطی است که ضلع BC روی آن قرار دارد. $AH=\frac{|۳x_A+y_A-۹|}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}=\frac{|۳+۲-۹|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۴}{\sqrt{۱۰}}$.

تست ۱۸ دو ضلع از مستطیلی روی خط‌های $۳x-۲y-۵=۰$ و $۲x+۳y+۶=۰$ قرار دارند و نقطهٔ $A(-۲,۱)$ یک رأس این مستطیل است. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

راه‌حل شیب خط‌های داده شده به‌ترتیب $\frac{۳}{۲}$ و $-\frac{۲}{۳}$ است و چون $\frac{۳}{۲}\times(-\frac{۲}{۳})=-۱$، پس این خط‌ها بر هم عمودند. بنابراین دو ضلع مجاور مستطیل مورد نظر روی این خط‌ها قرار دارند. از طرف دیگر، چون نقطهٔ $A(-۲,۱)$ روی خط‌های داده شده نیست، پس فاصلهٔ این نقطه تا خط‌های داده شده برابر با طول ضلع‌های مستطیل است: $a=\frac{|-۶-۲-۵|}{\sqrt{۹+۴}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$ و $b=\frac{|-۴+۳+۶|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}$. بنابراین مساحت مستطیل مورد نظر برابر است با $ab=\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}\times\sqrt{۱۳}=۵$.



تست ۱۹ مساحت مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌های $(۲,۳)$، $(-۱,۴)$ و $(۲,۱)$ هستند، چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

راه‌حل معادلهٔ خط راستی که رأس‌های $(۲,۳)$ و $(۲,۱)$ روی آن قرار دارند به‌صورت زیر است:

$$y-۳=\frac{۳-۲}{۲-۱}(x-۲)\Rightarrow x-y+۱=۰$$

فاصلهٔ رأس $(-۱,۴)$ تا این خط که برابر طول ارتفاع وارد از این رأس است، برابر است با $\frac{|۴-(-۱)+۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}$. فاصلهٔ رأس‌های $(۲,۳)$ و $(۲,۱)$ هم برابر است با $\sqrt{(۲-۱)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۲}$. بنابراین مساحت مثلث برابر است با $\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۲}=۳$.

تست ۲۰ قرینهٔ نقطهٔ $(۳,۸)$ نسبت به خط $x+۳y-۷=۰$ کدام نقطه است؟

۱) $(-۱,-۴)$ ۲) $(-۳,-۸)$ ۳) $(۱,-۴)$ ۴) $(۳,۸)$

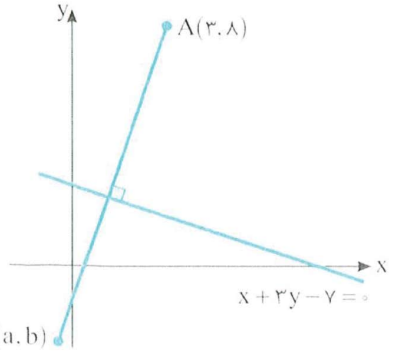
راه‌حل فرض کنید A نقطهٔ $(۳,۸)$ باشد و نقطهٔ $A'(a,b)$ قرینهٔ A نسبت به خط $x+۳y-۷=۰$ باشد. وسط پاره‌خط AA' نقطهٔ $(\frac{۳+a}{۲},\frac{۸+b}{۲})$ است که چون روی خط $x+۳y-۷=۰$ قرار دارد، پس

$$\frac{۳+a}{۲}+۳\times\frac{۸+b}{۲}-۷=۰\Rightarrow a+۳b=-۱۳\qquad(۱)$$

از طرف دیگر، خط $x+۳y-۷=۰$ بر خطی که از A و A' می‌گذرد عمود است. در نتیجه حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -۱ است. بنابراین

$$\frac{۸-b}{۳-a}\times(-\frac{۱}{۳})=-۱\Rightarrow ۸-b=۳(۳-a)\Rightarrow ۳a-b=۱\qquad(۲)$$

از معادله‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $a=-۱$ و $b=-۴$. بنابراین A' نقطهٔ $(-۱,-۴)$ است.



۳۵۹

نکته فاصلهٔ دو خط موازی

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

تست ۲۱ دو ضلع مربعی روی خط‌های $5x-12y-65=0$ و $5x-12y+26=0$ هستند. مساحت این مربع چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۱۶۹ ۳) ۱۳ ۴) ۴۹

راه‌حل طول ضلع مربع مورد نظر فاصلهٔ خط‌های داده شده است. فاصلهٔ این دو خط برابر است با

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-65-26|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{91}{13}=7$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با $7^2=49$.

تست ۲۲ اگر فاصلهٔ دو خط موازی $ax-4y+24=0$ و $x-y+b=0$ برابر $\sqrt{2}$ باشد، حاصل‌ضرب مقدارهای ممکن b کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۳۲ ۳) -12 ۴) -32

راه‌حل معادلهٔ خط دوم را به شکل $4x-4y+4b=0$ می‌نویسیم. در نتیجه فاصلهٔ دو خط موازی برابر است با

$$\frac{|4b-24|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{4|b-6|}{4\sqrt{2}}=\frac{|b-6|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow|b-6|=2\Rightarrow b=4, b=8$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقدارهای ممکن b برابر ۳۲ است.

دست‌گرمی

۴۰۲- فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,1)$ از نقطه‌های $B(-1,1)$ و $C(3,5)$ برابر است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۰۳- نقطه‌های $A(0,0)$، $B(3,0)$ و $C(a,b)$ رأس‌های مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند. مقدار $|b|$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

۴۰۴- رأس‌های مثلث ABC نقطه‌های $A(2,5)$، $B(-2,3)$ و $C(4,1)$ هستند. طول میانهٔ نظیر رأس A کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{13}$ ۳) $\sqrt{17}$ ۴) $\sqrt{26}$

۴۰۵- خط راستی که از نقطه‌های $(3,a)$ و $(2,7)$ می‌گذرد بر خط راستی که از نقطه‌های $(-1,4)$ و $(1,8)$ می‌گذرد عمود است. مقدار ا

کدام است؟

۱) ۷ ۲) $-\frac{13}{2}$ ۳) $\frac{13}{2}$ ۴) -7

۴۰۶- طول عمود وارد از نقطهٔ $(3,1)$ بر خط $4x+3y+20=0$ کدام است؟

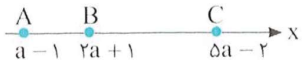
۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۰۷- معادلهٔ خطی که شیب آن برابر -1 و فاصلهٔ مبدأ از آن برابر ۵ است، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $2x+2y-5\sqrt{2}=0$ ۲) $2x+2y-5=0$ ۳) $x+y-5=0$ ۴) $x+y-5\sqrt{2}=0$

آزمون ۲۴۶ خط راست (۱)

۲۴۵۱- در شکل مقابل اگر $AB=۵$، طول پاره‌خط BC کدام است؟



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۲

۲۴۵۲- اگر فاصلهٔ نقطهٔ $(a, a\sqrt{۳})$ از مبدأ مختصات برابر ۶ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ± ۲
۲) ± ۳
۳) ± ۱
۴) ± ۵

۲۴۵۳- نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB، روی خط $۲y+۳x-۱=۰$ قرار دارد. اگر A نقطهٔ $(۲, -۳m)$ و B نقطهٔ $(m, ۱)$ باشد، نقطهٔ M کدام است؟

۱) $(\frac{۲}{۳}, -\frac{۱}{۲})$
۲) $(۲, -\frac{۵}{۲})$
۳) $(-\frac{۵}{۳}, ۳)$
۴) $(-۲, \frac{۷}{۲})$

۲۴۵۴- اگر خط‌های $۳x-ky+۶=۰$ و $(k-۵)x+۲y-۴=۰$ بر هم عمود باشند، مقدار k کدام است؟

۱) -۱۲
۲) ۱۲
۳) -۱۵
۴) ۱۵

۲۴۵۵- نقطه‌های $A(۷, ۶)$، $B(۴, ۴)$ و $C(۲a, a^۲)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. اگر رأس B قائمه باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) -۵
۴) -۶

۲۴۵۶- نقطهٔ $(۴m, ۲m-۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه‌های $(-۳, ۱۰)$ و $(-۹, -۲)$ است. مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۲
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۴۵۷- فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط راستی که بر خط به معادلهٔ $۲y+x=۱$ عمود است و از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$
۲) $\frac{۴}{\sqrt{۵}}$
۳) $\frac{۲}{\sqrt{۱۷}}$
۴) $\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$

۲۴۵۸- خط $۶x+۸y+۱=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۱, -۱)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲۰}$
۲) $\frac{\pi}{۴۰}$
۳) $\frac{\pi}{۵۰}$
۴) $\frac{\pi}{۱۰۰}$

۲۴۵۹- مساحت مربعی که یک رأس آن نقطهٔ $A(۲, ۱)$ و یک ضلع آن روی خط $y=۲x-۱$ است، کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۷}{۵}$
۴) $\frac{۹}{۵}$

۲۴۶۰- دو ضلع مستطیلی روی خط‌های $۴x+۳y=۵$ و $۳x-۴y=۲$ هستند. اگر نقطهٔ $A(۱, ۲)$ یک رأس آن باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۱۴}{۲۵}$
۲) $\frac{۱۲}{۵}$
۳) $\frac{۷}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

سؤال	گام
۲۴۵۱	۳۵۲
۲۴۵۲	۳۵۲
۲۴۵۳	۳۵۳
۲۴۵۴	۳۵۶ ۳۵۷
۲۴۵۵	۳۵۵ ۳۵۷
۲۴۵۶	۳۵۲ ۳۵۳ ۳۵۵ ۳۵۷
۲۴۵۷	۳۵۵ ۳۵۷ ۳۵۸
۲۴۵۸	۳۵۸
۲۴۵۹	۳۵۸
۲۴۶۰	۳۵۸

آزمون ۲۴۷ خط راست (۲)

۲۴۶۱- اگر A و B و C نقاطی روی محور طول‌ها باشند، $x_A=m-1$ ، $x_B=2m$ ، $x_C=3m+1$ و $2AB-BC=3$، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -3

۲۴۶۲- نقطه‌های $A(-3,\frac{1}{2})$ و $B(a,2a)$ مفروض‌اند. اگر طول پاره‌خط AB برابر با $\frac{\sqrt{13}}{2}$ باشد، مجموع مقدارهای ممکن a کدام است؟

۱) $-\frac{11}{5}$ ۲) $\frac{9}{5}$ ۳) $\frac{11}{5}$ ۴) $-\frac{9}{5}$

۲۴۶۳- نقطه‌های $A(-2,-3)$ ، $B(7-x,2-y)$ ، $C(x,y)$ و $D(-1,3)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. نقطهٔ C کدام است؟

۱) $(1,1)$ ۲) $(2,2)$ ۳) $(3,3)$ ۴) $(4,4)$

۲۴۶۴- معادلهٔ خط راست گذرا از نقطهٔ $(0,-5)$ و عمود بر خط راست گذرا از نقطه‌های $(-1,6)$ و $(-2,-3)$ کدام است؟

۱) $x+9y+45=0$ ۲) $x+9y-45=0$

۳) $-x+9y+45=0$ ۴) $x-9y+45=0$

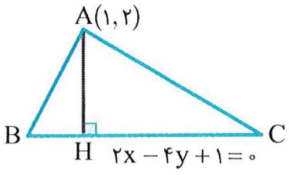
۲۴۶۵- اگر نقطه‌های $A(1,2)$ ، $B(-1,0)$ و $C(3,-1)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع CH کدام است؟

۱) $y=x-4$ ۲) $y=2x-7$ ۳) $y=-x+2$ ۴) $y=-2x+5$

۲۴۶۶- معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه‌های $A(-3,1)$ و $B(1,5)$ کدام است؟

۱) $2x+y=-1$ ۲) $x+y=2$ ۳) $y-x=4$ ۴) $x+y=3$

۲۴۶۷- در شکل مقابل، نقطهٔ H کدام است؟



۱) $(\frac{3}{2},1)$ ۲) $(\frac{1}{2},-1)$

۳) $(-1,-\frac{3}{4})$ ۴) $(-\frac{1}{2},0)$

۲۴۶۸- معادلهٔ یک قطر مربعی $x+y=2$ و مختصات یک رأس آن $(-1,1)$ است. محیط مربع کدام است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۸ ۴) $8\sqrt{2}$

۲۴۶۹- فاصلهٔ خط‌های موازی $ax+2y=6$ و $3x+y+k=0$ برابر $\sqrt{10}$ است. اگر $k>0$، مقدار $a+k$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۴۷۰- معادلهٔ خطی که از دو خط $2x-y+1=0$ و $2y-4x+3=0$ به یک فاصله است، کدام است؟

۱) $4x-2y-\frac{1}{2}=0$ ۲) $4x-2y-\frac{1}{4}=0$ ۳) $2x-y-\frac{1}{2}=0$ ۴) $2x+y-\frac{1}{2}=0$

سؤال
۲۴۶۱
۲۴۶۲
۲۴۶۳
۲۴۶۴
۲۴۶۵
۲۴۶۶
۲۴۶۷
۲۴۶۸
۲۴۶۹
۲۴۷۰

آزمون ۲۴۸ خط راست (۳)

سؤال	گام
۲۴۷۱	۳۵۲
۲۴۷۲	۳۵۵
۲۴۷۳	۳۵۲ ۳۵۳
۲۴۷۴	۳۵۶ ۳۵۷
۲۴۷۵	۳۵۳ ۳۵۵ ۳۵۷
۲۴۷۶	۳۵۲
۲۴۷۷	۳۲۶ ۳۵۸
۲۴۷۸	۳۵۵ ۳۵۷
۲۴۷۹	۳۵۲ ۳۵۵ ۳۵۸
۲۴۸۰	۳۵۹

۲۴۷۱- نقطه‌های $A(۰,۰)$ ، $B(۳,۰)$ و $C(۰,-۳)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. نوع مثلث کدام است؟

۱) فقط متساوی‌الساقین
۲) متساوی‌الاضلاع
۳) فقط قائم‌الزاویه
۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۲۴۷۲- نقطه‌های $M(-۲,-۱)$ ، $N(۵,۴)$ و $P(-۳,-۴)$ به‌ترتیب وسط‌های ضلع‌های AB، AC و BC از مثلث ABC هستند. معادلهٔ خطی که ضلع BC روی آن قرار دارد کدام است؟

۱) $۷y=۵x-۱۳$
۲) $۶y=۷x-۳$
۳) $۵y=۶x+۴$
۴) $۴y=۳x-۱$

۲۴۷۳- نقطه‌های $A(۴,۱)$ ، $B(m,-۲)$ و $C(۲,-۱)$ رأس‌های مثلث ABC هستند و طول میانهٔ نظیر رأس B برابر ۲ است. مقدار m کدام است؟

۱) ۱
۲) -۳
۳) ۳
۴) -۱

۲۴۷۴- اگر خط‌های $۳x+y=۴$ ، $x-ay=۷$ و $bx+۲y=-۵$ سه ضلع متوالی یک مستطیل باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۷

۲۴۷۵- قرینهٔ نقطهٔ $A(-۳,۴)$ نسبت به خط $y=ax+b$ نقطهٔ $A'(۱,۲)$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱۰
۲) -۱۰
۳) ۵
۴) -۵

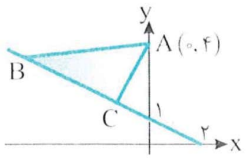
۲۴۷۶- مساحت مثلث با سه رأس $A(۱,۳)$ ، $B(۵,-۵)$ و $C(-۱,۲)$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۲۴۷۷- فاصلهٔ نقطهٔ $A(k,-۱)$ از خط $y=۲x+k$ دو برابر فاصلهٔ A از خط $۲y=x-۱$ است. مقدار k کدام است؟

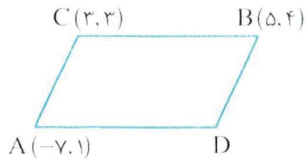
۱) ۱ یا $\frac{۳}{۵}$
۲) -۱ یا $-\frac{۳}{۵}$
۳) ۱ یا $-\frac{۳}{۵}$
۴) -۱ یا $\frac{۳}{۵}$

۲۴۷۸- در شکل روبه‌رو $BC=۴$. مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$
۲) $\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$
۳) $۴\sqrt{۵}$
۴) $۱۲\sqrt{۵}$

۲۴۷۹- در شکل مقابل مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟



۱) $\frac{۸۱}{۷}$
۲) ۶
۳) $\frac{۹۵}{۲}$
۴) ۳

۲۴۸۰- دو ضلع مستطیلی روی دو خط موازی $۳x+۴y+۶=۰$ و $۳x+۴y-۶=۰$ قرار دارند و مساحت این مستطیل ۱۲ است. طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$
۲) ۶
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۵

آزمون ۲۴۹ آزمون جامع (۱) (جمع‌بندی ریاضیات پایه)

محل انجام م

۲۴۸۱- به‌ازای چند عدد صحیح مانند a اشتراک دو بازهٔ $(-۱,۳)$ و $[a,a+۱]$ تهی نیست؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴۸۲- جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسی $۲,۴,۸,\ldots$ با جملهٔ چندم دنبالهٔ حسابی $۸,۱۲,۱۶,\ldots$ برابر است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۵۲ ۴) ۲۵۵

۲۴۸۳- اگر $a>۰$ و $\sqrt{a\sqrt[۳]{a}}=۲$، مقدار $\sqrt[۳]{a\sqrt{a}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۴]{۲}$ ۲) $\sqrt[۴]{۸}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۸}$

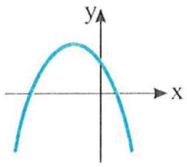
۲۴۸۴- اگر $a<۰$ و $a-\frac{۱}{a}=۲$، مقدار $a^۲-\frac{۱}{a^۲}$ کدام است؟

۱) $-۴\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

۲۴۸۵- حاصل عبارت $A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۲}+\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳۲}+\sqrt[۳]{۲}-۲}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}+۱$ ۲) $\sqrt[۳]{۴}-۱$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{۴}$

۲۴۸۶- اگر نمودار تابع $f(x)=-x^۲+(۲m-۱)x+m$ به شکل مقابل باشد، حدود m کدام است؟



۱) $m>۰$ ۲) $m<\frac{۱}{۲}$

۳) $۰<m<\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}<m<\frac{۱}{۲}$

۲۴۸۷- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۶x+۲=۰$ باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی که جواب‌های آن $\alpha+\frac{۱}{\beta}$ و $\beta+\frac{۱}{\alpha}$ باشد، کدام است؟

۱) $۲x^۲-۱۸x+۹=۰$ ۲) $۲x^۲+۱۸x+۹=۰$

۳) $x^۲-۹x+۲=۰$ ۴) $x^۲+۹x+۲=۰$

۲۴۸۸- اگر انتهای کمان نظیر زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم باشد و $۲\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=۳\cos(\frac{۵\pi}{۲}-x)$، مقدار $\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$ ۲) $\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$ ۴) $-\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$

۲۴۸۹- مقدار $\sin ۳۷^\circ \cos ۲۳^\circ+\cos ۶۷^\circ \sin ۵۳^\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۴۹۰- نمودار تابع $f(x)=|x-۱|-۱$ در چند نقطه نمودار تابع $g(x)=(x+۱)^۲+۱$ را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴۹۱- چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $x^۲\le ۴|x|$ صدق می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۴۹۲- معادلهٔ $\sqrt{۴x+۱}=۲x+|x+۱|$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

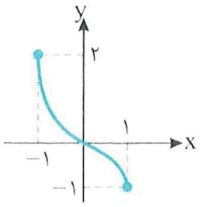
۲۴۹۳- نمودار تابع $f(x)=a^{bx}-b$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -۲ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\log_۸ ۳$ قطع می‌کند. مقدار ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۴۹۴- اگر $۲^{a}=۳^{b}$ و $۲^{b+۱}=۳^{a}$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\log_{۲} ۳$ ۲) $\log_{\frac{۳}{۲}} ۲$ ۳) $\log_{۶} ۳$ ۴) $\log_{۶} ۲$

۲۴۹۵- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=-f^{-۱}(x-۱)$ در چند نقطه این نمودار را قطع می‌کند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۲۴۹۶- اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}+۳$، برد تابع $g(x)=(fof^{-۱})(x)-۲$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۳,+\infty)$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $[-۱,+\infty)$

۲۴۹۷- اگر $f(x)=\sqrt{۴x-x^{۲}}-۲\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{۴x-x^{۲}}+۲\sqrt{x}$، برد تابع $f\times g$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $[۰,۴]$ ۳) $[-۱۶,۰]$ ۴) $[-۱۶,۴]$

۲۴۹۸- اگر تابع $f(x)=a[x]+۳x[۲x]$ در نقطهٔ $x=-۲$ حد داشته باشد، مقدار $f(-۲)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۴۶ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۲۴۹۹- اگر توابع f و g در نقطهٔ $x=۲$ حد داشته باشند، $\lim\limits_{x\to ۲}(f\times g)(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۲}(f-g)(x)=\frac{۷}{۲}$، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ یا ۶ ۲) $\frac{۱}{۸}$ یا ۸ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ یا ۱۲ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$ یا ۱۸

۲۵۰۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۳۲x-۶۴}{x^{۲}-a^{۲}} & x>۲\\ bc & x=۲\\ ax+b & x<۲\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته باشد، مقدار c کدام است؟ $(a,b>۰)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

آزمون ۲۵۰ آزمون جامع (۲) (جمع‌بندی ریاضیات پایه)

محل انجام م

۲۵۰۱- تعداد جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله‌های دنباله سه برابر مجموع جمله‌های با ردیف زوج باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

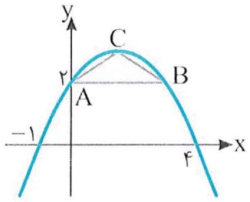
۲۵۰۲- مقدار عبارت $(x-۲)(x^۳+۸)(x^۲+۲x+۴)+۶۴$ به‌ازای $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۵۰۳- کمترین مقدار مجموع مربعات جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲kx+k^۲+۱۰k+۲۰=۰$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۴۰ ۳) ۸ ۴) ۲۰

۲۵۰۴- نمودار تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم f به‌صورت مقابل است. مساحت مثلث ABC کدام است؟ (AB موازی محور x است.)



۱) $\frac{۲۷}{۸}$ ۲) $\frac{۲۵}{۸}$ ۳) $\frac{۲۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۲۵۰۵- مقادیر تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x+۲}-۵$ روی بازهٔ $(۰,a)$ منفی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۳+۳\sqrt{۵}}{۲}$

۲۵۰۶- جواب مثبت معادلهٔ $۲\sqrt{۲x-x^۲}=[x]$ کدام است؟

۱) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۴}$

۲۵۰۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|\frac{۳}{۵-x}|<\frac{۱}{۲}$ برابر $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۲۵۰۸- مقدار عبارت $\frac{۲\sin\frac{\pi}{۵}+\cos(\frac{۳\pi}{۱۰})}{۳\sin(\frac{۶\pi}{۵})-۲\sin(\frac{۹\pi}{۵})}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۲۵۰۹- اگر $\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۲}{۳}$، مقدار $\sin^۶x+\cos^۶x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۲۵۱۰- اگر α و β حاده باشند، $\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$ و $\cos(\alpha+\beta)=\frac{۳}{۵}$، مقدار $\cos\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۷}{۲۵}$ ۴) $\frac{۲۴}{۲۵}$

۲۵۱۱- اگر هیچ جوابی از معادلهٔ $۴^x+k=۴+(k-۳)۲^x$ مثبت نباشد، مجموعهٔ مقادیر k کدام است؟

۱) $[\frac{۷}{۲},۴)$ ۲) $(-\infty,۴)$ ۳) $[۳,۴)$ ۴) $[۳,+\infty)$

۲۵۱۲- نمودار تابع $f(x)=\log_a(bx+۷)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر نمودار تابع از نقطهٔ $(b,۱)$ بگذرد، مقدار ab کدام است؟

۱) -۲۲ ۲) -۳۳ ۳) -۴۴ ۴) -۵۵

۲۵۱۳- جواب بزرگ‌تر معادلهٔ $\log_{۲} x \log_{۴} x = \log_{۸} x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{۴}$

۲۵۱۴- توابع $f(x)=\frac{-۲}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{ax-b}{x^{۲}+bx+۴}$ برابرند. مقدار ab کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۵۱۵- تابع $f(x)=\begin{cases} ۳-x^{۲} & x\leq ۰ \\ x^{۲}+k & x\geq ۱ \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود k کدام است؟

۱) $k>۲$ ۲) $k>۳$ ۳) $k>۴$ ۴) $k>۰$

۲۵۱۶- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|x^{۲}-۴x|+۶x-x^{۲}$ و دامنهٔ $[a,+\infty)$ وارون‌پذیر است. اگر a کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

تابع وارون تابع f کدام است؟

۱) $f^{-۱}=۲x \ , \ D_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲} \ , \ D_{f^{-۱}}=[۴,+\infty)$

۳) $f^{-۱}(x)=۲x \ , \ D_{f^{-۱}}=[۱۰,+\infty)$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲} \ , \ D_{f^{-۱}}=[۸,+\infty)$

۲۵۱۷- اگر $\lim_{x\to a}\frac{x^{۳}-a^{۳}}{۲x-۸}=b\neq ۰$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۲۵۱۸- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^{۲}-۱}{ax+b} & x<۱ \\ c & x=۱ \\ \frac{-b[x]}{x} & x>۱ \end{cases}$ روی بازهٔ $(۰,۲)$ پیوسته باشد. مقدار c کدام است؟ $(a,b\neq ۰)$

۱) $\pm\sqrt{۲}$ ۲) ± ۲ ۳) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\pm ۲\sqrt{۲}$

۲۵۱۹- مقدار $\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-x}{\sqrt[۳]{x-۱}-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۹}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۲۵۲۰- مقدار $\lim_{x\to -۱}\frac{x\sin \pi x}{x^{۲}-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

محل انجام محاسبات

۲۵۲۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}(x^۳+۱)$ خط $y=k$ را در دو نقطه قطع می‌کند. حدود k کدام است؟

۱) $k<-۱$ ۲) $۰<k<۱$ ۳) $-۱<k<۱$ ۴) $k>۱$

۲۵۲۲- به‌ازای چند عدد صحیح x تابع $f=\{(-۱,x^۲-x),(۰,x^۳),(x^۲,۸)\}$ صعودی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۲۳- اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(۳)=۰$، چند عدد طبیعی در دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{(x^۲-۹)f(x)}$ قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) نامتناهی ۴) صفر

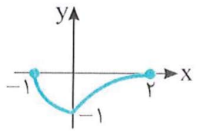
۲۵۲۴- تابع $f(x)=|x-۲|-|x+۱|$ روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

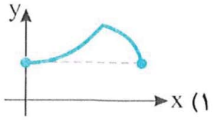
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

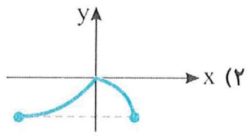
۲۵۲۵- تابع درجهٔ دوم $f(x)=(k-۱)x^۲+x$ روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ نزولی است. حدود k کدام است؟

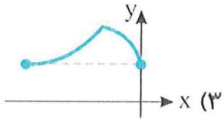
۱) $k<۱$ ۲) $k\leq\frac{۱}{۲}$ ۳) $-۲<k<-۱$ ۴) $\frac{۱}{۲}\leq k<۱$

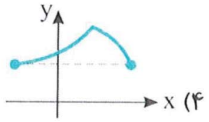
۲۵۲۶- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=۱-f(۱-x)$ کدام گزینه است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۵۲۷- نمودار تابع $g(x)=۳f(۲x)$ را یک واحد به چپ و سه واحد به بالا منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط این نمودار را دو برابر و عرض آن‌ها را یک سوم می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده کدام است؟

۱) $y=f(x+۳)+۱$ ۲) $y=f(x+۲)+۱$

۳) $y=f(x-۲)+۱$ ۴) $y=f(۲x+۲)+۱$

۲۵۲۸- اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a^۲+b\cos(a\pi x)$ برابر $\frac{۱}{۲}$ و کمترین مقدار آن برابر -۴ باشد، بیشترین مقدار آن کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

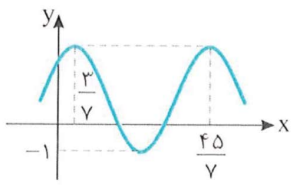
۲۵۲۹- اگر $-\frac{\pi}{۴}\leq x<\frac{\pi}{۲}$ و $\tan x=۲m^۲-۵$، حداقل مقدار $|m|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۲۵۳۰- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\frac{\pi x}{۸})$ و دامنهٔ $(a,۱۲)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

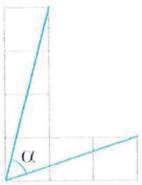
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۵۳۱- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=۳a+۲\sin(\frac{۲\pi}{b}x+\frac{\pi}{۳})$ به‌صورت مقابل است. مقدار ab کدام است؟



۱) -۲
۲) ۲
۳) -۴
۴) ۴

۲۵۳۲- شکل مقابل از شش مربع به طول ضلع ۲ درست شده است. مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۹}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۳}{۹}$

۳) $\frac{۷}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۷}$

۲۵۳۳- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x-\cos(x+\frac{\pi}{۴})=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۱۲}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{۱۲}$

۲۵۳۴- معادلهٔ $۲\cos^۲ x+۵\sin x-۵=۰$ چند جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۳۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲}=-۱$ در بازهٔ $[۰,۴\pi]$ کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) ۷π ۴) ۴π

۲۵۳۶- اگر $f(x)=\frac{۲[x]-۵}{x-۳}$، مقدارهای $\lim\limits_{x\to۳^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to۳^-} f(x)$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

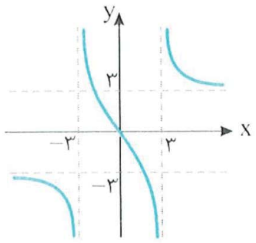
۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $+\infty$ و $-\infty$

۳) $-\infty$ و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و $-\infty$

۲۵۳۷- اگر $\lim\limits_{x\to۲}\frac{۲x-۱}{۳x^۲+ax-b}=+\infty$، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۲۴ ۳) -۸ ۴) صفر

۲۵۳۸- نمودار تابع f به شکل مقابل است. مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ f)(x)$ کدام است؟



۱) صفر
۲) $+\infty$
۳) $-\infty$
۴) ۴

۲۵۳۹- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(۲a-۴)x^۴+۴x^۳-۱}{(۶a)x^۳+x^۲+۲}=b$، مقدار ab کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۵۴۰- اگر $(۲,۳)$ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{۲ax+۱}{(a-۱)x+۳b}$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۴

آزمون ۲۵۲ آزمون جامع (۴) (جمع‌بندی نیم‌سال دوم سال دوازدهم)

محل انجام م

۲۵۴۱- اگر $f'(-۲)=f(-۲)=k$ و $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{f^۲(x)-kf(x)}{x^۲-۴}=-۲$، مقدار $k^۲$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۲۵۴۲- اگر $f(x)=|x|\sqrt[۳]{x^۲+۱}$، مقدار $۲f'_+(۰)-f'_-(۰)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۲۵۴۳- اگر $f(x)=(۲x^۴+۵x^۲-۳)(ax^۲+۱)$ و $f'(۱)=-۸$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۵۴۴- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۳+۲x & x\geq ۲ \\ x^۲+bx & x<۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۵۴۵- اگر $g(x)=f(\frac{۱}{\sqrt{x}})$ و $f'(x)=\frac{x^۲+۱}{x-۳}$، مقدار $g'(\frac{۱}{۴})$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) -۱۰ ۴) -۲۰

۲۵۴۶- مشتق دوم تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۴+ax^۳+۳x^۲+۱$ همواره مخالف صفر است. حدود a کدام است؟

۱) $|a|>۲$ ۲) $|a|<۲$ ۳) $|a|>۱$ ۴) $|a|<۱$

۲۵۴۷- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=(x-۲)\sqrt{۱-x}$ در بازهٔ $[a,۱]$ برابر $\frac{۵}{۲}$ است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۵۴۸- معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=۲x^۳-۴x+۶$ که با خط $y=۲x+۴$ موازی است، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y=۲x+۴$ ۲) $y=۲x-۱$ ۳) $y=۲x-۲$ ۴) $y=۲x+۲$

۲۵۴۹- خط $y=۴x+۲$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر نمودار تابع $f(x)=x^۳-ax^۲+b$ مماس است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۵۰- تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۱$ روی بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۵۱- تابع $f(x)=-۲x^۳+ax^۲-۶x+۱$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $[-۶,۶]$ ۲) $[-۳,۳]$ ۳) $[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}]$ ۴) $[-\sqrt{۶},\sqrt{۶}]$

۲۵۵۲- فاصلهٔ نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۸x-۱$ از یکدیگر کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۳۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳۳}$ ۳) $۶\sqrt{۳۷}$ ۴) $۴\sqrt{۳۷}$

۲۵۵۳- اگر $x=۲$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=(x+۱)\sqrt[۳]{x+a}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۷ ۴) -۷

۲۵۵۴- تابع $f(x)=|x||x^۲-۲|$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۵۵۵- تابع $f(x)=\begin{cases} -|x^۲-۱| & x\neq ۰ \\ k & x=۰ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد ولی ماکزیمم مطلق ندارد. حدود k کدام است؟

۱) $-۱<k<۱$ ۲) $k>۰$ ۳) $k<-۱$ ۴) $-۱<k<۰$

محل انجام محاسبات

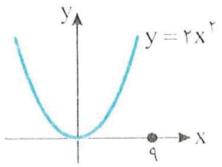
۲۵۵۶- اگر مقدار اکسترمم مطلق تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}+1}$ روی بازهٔ $[0,4]$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۵۵۷- در کدام بازه تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-3x^2$ صعودی و جهت تقعر نمودار آن رو به پایین است؟

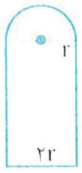
۱) $(-2,0)$ ۲) $(-2,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(0,1)$

۲۵۵۸- عرض نزدیک‌ترین نقطه روی نمودار تابع $y=2x^2$ به نقطهٔ $A(9,0)$ چقدر است؟



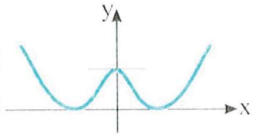
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱
۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۲

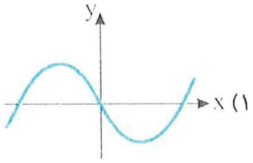
۲۵۵۹- اگر محیط پنجره‌ای به شکل مقابل که از یک مستطیل و یک نیم‌دایره تشکیل شده است، ۵ متر باشد، مقدار r کدام باشد تا پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد؟

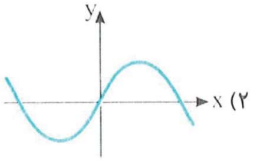


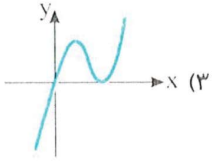
۱) $\frac{3}{\pi+4}$ ۲) $\frac{5}{2\pi+8}$
۳) $\frac{3}{\pi+2}$ ۴) $\frac{5}{\pi+4}$

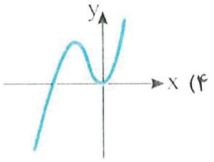
۲۵۶۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f' به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

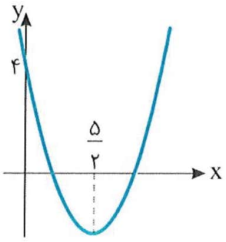
آزمون ۲۵۳ — آزمون جامع (۵)

محل انجام م

۲۵۶۱- مقدار $\frac{\sqrt{۵\sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}}}{\sqrt[۴]{۵\sqrt[۶]{۵}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۵}$ ۲) $\sqrt[۱۲]{۵}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۵}$

۲۵۶۲- اگر نمودار تابع $f(x)=x^۲+ax-b$ به‌صورت مقابل باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ چقدر از حاصل‌ضرب آن‌ها بیشتر است؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۵۶۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{۳-x}=۲$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۵۶۴- اگر $\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)-۲\sin(۲\pi+\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)-۲\cos(۳\pi-\alpha)}=۳$، مقدار $\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

۲۵۶۵- اگر $\frac{\sin x+۲\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{۱}{۴}$، مقدار $\tan ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۳۱}{۹}$ ۳) $\frac{۳۵}{۳۷}$ ۴) $\frac{۳۵}{۱۲}$

۲۵۶۶- نمودار تابع $f(x)=\cos ۳x$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۲})$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۵۶۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^۲-x|>۲x$ به‌صورت $\mathbb{R}-[a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۵۶۸- اگر $f(x)=\sqrt{۴x-x^۲}+۳$ و دامنهٔ تابع fof به‌صورت $[۰,a]\cup[b,۴]$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۵۶۹- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=۲-\sqrt{۴-x^۲}$, $-۲\le x\le ۰$ به‌صورت $f^{-۱}(x)=a\sqrt{b+۴x-x^۲}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) -۲ ۴) -۱

۲۵۷۰- نمودار تابع $g(x)=۴f(۲x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم. سپس طول و عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

۱) $y=۸f(x-۲)+۱$ ۲) $y=f(\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲})+۱$ ۳) $y=۲f(۴x-۲)+۱$ ۴) $y=۲f(x-۲)+۱$

۲۵۷۱- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log_{۰/۵}(x-۳)-۱}$ به‌صورت $D_f=(a,b]$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۵۷۲- مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۳-x^۲+x-۱}{۲x-\sqrt{۳x^۲+۱}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۵۷۳- مقدار $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{[\cos x]}{\sin x-\sin^۲ x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۲۵۷۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|-۲}$ در چند نقطه مجانب‌های افقی خود را قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۷۵- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}۳x-[x] & x<۲\\ a & x=۲\\ x+۲ & x>۲\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) هیچ مقدار a

۲۵۷۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۱+a\cos \pi x & x>۱\\ bx^۲+x & x\le ۱\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۵۷۷- تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-۹}{h}=\frac{۳}{۲}$، مشتق تابع $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

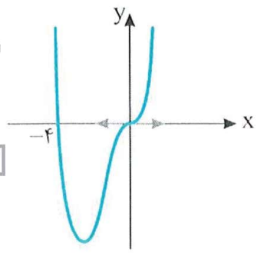
۲۵۷۸- تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x^۳+۴}$ روی بازهٔ $[۰,a]$ صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{۴}$

۲۵۷۹- جهت تقعر تابع $f(x)=x^۴-۴x^۳+۱۲x+۳$ روی بازهٔ (a,b) رو به پایین است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۸۰- شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+bx$ است. مقدار مینیمم مطلق تابع کدام است؟



۱) -۳۶
۲) -۳۲
۳) -۲۷
۴) -۲۴

محل انجام محاسبات

۲۵۸۱- در دنباله‌ای حسابی $S_۷=۸۴$ و $S_{۱۸}=۷۱۱$. مجموع یازده جملهٔ نخست این دنبالهٔ حسابی چقدر است؟

۱) ۲۱۲ ۲) ۲۴۲ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۵۲

۲۵۸۲- اگر $a-b=b-c=۴$، مقدار $\frac{ab-ac+bc-b^۲}{a-c}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۵۸۳- $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۲m+۱=۰$ هستند و $۳x_۱-x_۲=۱$. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۵۸۴- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x-۵}{۹}<\frac{۱}{x+۳}$ به‌صورت $(a,-۳)\cup(b,+\infty)$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) -۲۴ ۲) ۲۴ ۳) -۱۰ ۴) ۱۰

۲۵۸۵- معادلهٔ $\cos x-\sin x=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۸۶- اگر معادلهٔ $||x-۱|-a|=-a$ دقیقاً یک جواب داشته باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a\leq ۰$ ۲) $-۱\leq a\leq ۰$ ۳) $a<۰$ ۴) $-۱\leq a<۰$

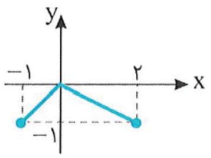
۲۵۸۷- اگر $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۲x-۳}{x+۲}$، مجموع مقادیری که در دامنهٔ تابع fog قرار ندارند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

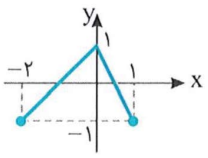
۲۵۸۸- اگر $f(x)=\sqrt[۳]{ax+b}$ و نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۱,۲)$ برخورد کنند، حاصل $۳a+b$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۶ ۴) -۵

۲۵۸۹- نمودار تابع f به‌صورت شکل (۱) است. نمودار کدام تابع به‌صورت شکل (۲) است؟



شکل (۱)



شکل (۲)

۱) $y=۱-۲f(-x)$ ۲) $y=۱+۲f(-x)$
۳) $y=۱-۲f(x)$ ۴) $y=۱+۲f(x)$

۲۵۹۰- اگر $\log\sqrt{۸}=a$، مقدار $\log ۱۲۵$ کدام است؟

۱) $۳-۳a$ ۲) $۲-۳a$ ۳) $۳-۲a$ ۴) $۲-۲a$

۲۵۹۱- اگر $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-ax+b}{۲x^۲-۳x+۱}=a-۴$، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۵۹۲- اگر $\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+۱)x^۳-۲x^۲+x}{(b+۱)x^۲-۴}=۲$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۵۹۳- اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۴+mx^۲+x+۳$ در نقطهٔ $x=۱$ برابر با ۲ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) -۱

۲۵۹۴- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۱} & x>۳\\ x-۱ & x\leq ۳\end{cases}$، مقدار $\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۳+h)-f(۳-h)}{h}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

محل انجام محاسبات

۲۵۹۵- مشتق دوم تابع $f(x)=x^{۳}\sqrt{x}$ در $x=۴$ کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۷۰ ۳) $\frac{۷۰}{۳}$ ۴) ۱۴۰

۲۵۹۶- اگر تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}+x^{۲}+kx-۶$ اکیداً صعودی باشد، حدود مقادیر k کدام است؟

۱) $k\geq ۱$ ۲) $k\leq -۱$ ۳) $k\geq -۱$ ۴) $k\leq ۱$

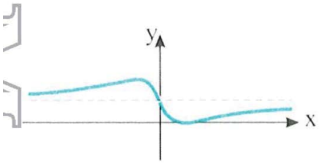
۲۵۹۷- به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a، جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^{۴}+ax^{۳}+\frac{۳}{۲}x^{۲}$ همواره رو به بالا است؟

۱) $-۱\leq a\leq ۱$ ۲) $-۱\leq a\leq ۲$ ۳) $-۲\leq a\leq ۱$ ۴) $-۲\leq a\leq ۲$

۲۵۹۸- اگر $A(۱,-۲)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}-۳x-۱$ باشد، مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن کدام است؟

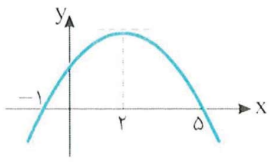
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) تابع نقطهٔ ماکزیمم نسبی ندارد.

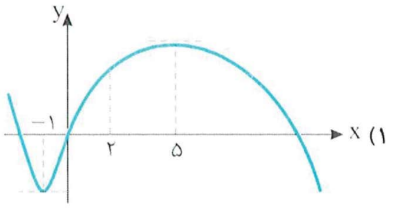
۲۵۹۹- شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^{۲}+bx+۸}{x^{۲}+۴}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

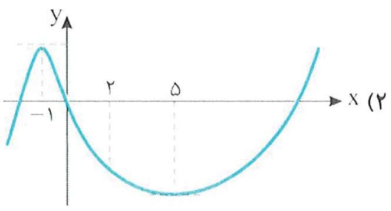


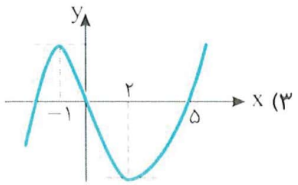
۱) ۷-
۲) ۶-
۳) ۹
۴) ۱۰

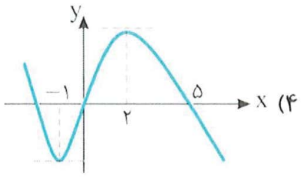
۲۶۰۰- نمودار تابع مشتق تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع f به کدام شکل می‌تواند باشد؟



۱)


۲)


۳)


۴)


محل انجام م

۲۶۰۱- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع بیست جملهٔ اول سه برابر مجموع دوازده جملهٔ اول آن است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ دهم کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۲۶۰۲- حاصل عبارت $A=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}+\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $۲\sqrt[۳]{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۶۰۳- هر یک از جواب‌های معادلهٔ $x^۲-(۲m-۳)x+۲n+۲=۰$ یک واحد از جواب‌های معادلهٔ $x^۲-nx+m+۱=۰$ بیشتر است. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۶۰۴- اگر معادلهٔ $x^۴+۲mx^۲+m^۲-۱=۰$ جواب حقیقی نداشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>۱$ ۲) $۰<m<۱$ ۳) $m<-۱$ ۴) $-۱<m<۰$

۲۶۰۵- اگر $\cos^۲ x-\cos^۴ x=\frac{۱}{۸}$، حاصل عبارت $\tan^۲ x+\cot^۲ x$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۶۰۶- معادلهٔ $\tan(\frac{\pi}{۴}+x)+\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=-۳$ چند جواب در بازهٔ $(۰,\pi)$ دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

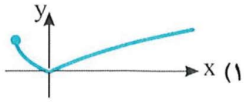
۲۶۰۷- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $-۱\le\frac{x-۲}{x-۳}\le۱$ به‌صورت $(-\infty,\frac{a}{b}]$ است ($\frac{a}{b}$ ساده شدنی نیست). مقدار $a+b$ کدام است؟

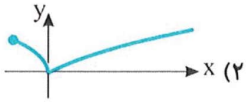
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

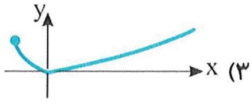
۲۶۰۸- نمودار تابع $f(x)=x|x-۲|$ در سه نقطه نمودار تابع $g(x)=|x-۱|$ را قطع می‌کند. کمترین طول مربوط به این نقاط کدام است؟

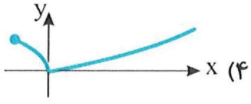
۱) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$

۲۶۰۹- نمودار تابع $y=|۱-\sqrt{x+۱}|$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۶۱۰- تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و $R_f=\mathbb{R}$. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f^{-۱}(۴x-۳)>f^{-۱}(x^۲)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

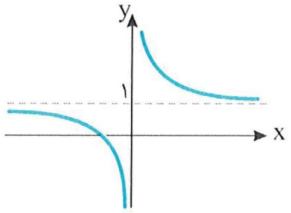
۲۶۱۱- تابع وارون $f(x)=\frac{۲x-|x|}{۲}$ تابع $f^{-۱}(x)=\frac{ax+۲|x|}{b}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۶۱۲- اگر $\log_۸\frac{x}{y}=۰$، مقدار $\log_x y+\log_۴(xy)$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۳- ۳) ۴- ۴) ۵-

۲۶۱۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^۲(x)-۱}{۲f^۲(x)-۳f(x)+۱}$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

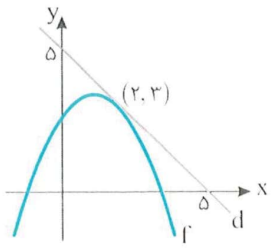
۲۶۱۴- اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(2kx)}{1-\cos 2x}=2k$، مجموع مقدارهای ممکن برای k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۱۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x^3-4x^2+5x-2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۲۶۱۶- در شکل مقابل خط d بر نمودار تابع f در نقطهٔ $(2,3)$ مماس است. اگر $g(x)=f^2(x)$،



مقدار $g'(2)$ کدام است؟

۱) -12

۲) -6

۳) -18

۴) -24

۲۶۱۷- اگر $f(x)=x^3-2x$، مقدار $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{5h}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۶۱۸- اگر $g(x)=xf(x)$ و $f'(2)=f''(2)=2$، مقدار $g''(2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۶۱۹- مجموع طول و عرض نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ در بازهٔ $(3,5)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۶۲۰- با توجه به نمودار تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m معادلهٔ $f(x)=m$ فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) $m<2$ یا $m>7$ ۲) $m<3$ یا $m>6$ ۳) $m<3$ یا $m>7$ ۴) $m<2$ یا $m>6$

آزمون ۲۵۶ — آزمون جامع (۸)

محل انجام ه

۲۶۲۱- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ اضلاع، دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند و مساحت مثلث واسطهٔ هندسی طول وتر و محیط مثلث است. مساحت مثلث کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

۲۶۲۲- اگر $\sqrt{۵\sqrt[۴]{۳}}=\sqrt[۴]{۵\sqrt{x}}$، مقدار x کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۹۰

۲۶۲۳- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۶x-۳=۰$ باشند، مقدار $(\frac{x_۱}{x_۲}+x_۲)(\frac{x_۲}{x_۱}+x_۱)$ کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۰ ۴) ۸۸

۲۶۲۴- تعداد جواب‌های متمایز معادلهٔ $x+\frac{x}{\sqrt{x^۲-۱}}=۲\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۶۲۵- اگر چندجمله‌ای $P(x)=ax^۳+۴x^۲-۱۴x+۱۰-a$ بر $x^۲-۲x+۱$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۲۶- اگر $\frac{\sin ۳x}{\sin x}+\frac{\cos ۳x}{\cos x}=۱$، مقدار $\sin^۲ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۲۶۲۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos x+۲\sin^۲ x-۱=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چقدر است؟

۱) ۲π ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) ۵π

۲۶۲۸- اگر $(fog)(x)=\frac{۳x-۲}{۲x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{۲x}$، ضابطهٔ تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $\frac{۴x^۲-۹}{۶x-x^۲}$ ۲) $\frac{۴x^۲-۶x-۹}{۲x^۲-۶x}$ ۳) $\frac{۶x-۹}{۲x^۲-۶x}$ ۴) $\frac{۴x^۲+۶x-۹}{۲x^۲-۶x}$

۲۶۲۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{-x}$ را دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم، سپس این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و مجدداً دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

۱) $y=\sqrt{x+۴}$ ۲) $y=\sqrt{x}$ ۳) $y=\sqrt{-x+۴}$ ۴) $y=\sqrt{x-۴}$

۲۶۳۰- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۳]{a+bx^۳}$ نسبت به خط $y=x$ بر نمودار تابع f منطبق است. مقدار b کدام است؟ $(a,b\neq ۰)$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۶۳۱- اگر $۲^a=۳$ و $۳^b=۸$، مقدار $۳^{b+\frac{۱}{a}}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۲۶۳۲- جواب معادلهٔ $\log_۲ x+\log_۵ x=۲$ کدام است؟

۱) $۴^{\log ۵}$ ۲) $۵^{\log ۲}$ ۳) $۲^{\log ۵}$ ۴) $۴^{\log ۲}$

۲۶۳۳- اگر $f(x)=\frac{ax^۲+x+۴}{(a+۲)x^۲-۳x-۲}$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=۳$، آن‌گاه $\lim_{x\to-۱} f(x)$ کدام است؟

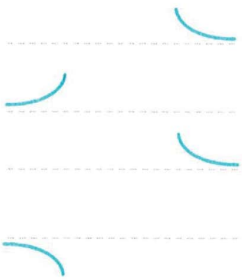
۱) -۴ ۲) -۵ ۳) -۷ ۴) -۸

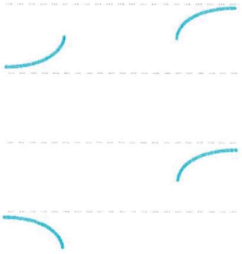
۲۶۳۴- حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x+\tan ۵x}{\sin ۲x+\tan ۴x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۴}$

محل انجام محاسبات

۲۶۳۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{|x|-1}$ در اطراف مجانب‌های افقی آن چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳)

۴)

۲۶۳۶- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x-\sin x}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -1 ۴) هیچ مقدار a

۲۶۳۷- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^3-x$ در بازهٔ $[-1,2]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در کدام یک از نقاط زیر برابر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) صفر

۲۶۳۸- مقدار مشتق تابع $f(x)=2\cos^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۶۳۹- کمترین مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2$ کدام است؟

۱) -36 ۲) -32 ۳) -24 ۴) -18

۲۶۴۰- اگر طول نقطهٔ عطف تابع $f(x)=ax^3+3x^2+2$ برابر -1 باشد، عرض آن چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

آزمون ۲۵۷ آزمون جامع (۹)

محل انجام م

۲۶۴۱- نسبت واسطهٔ حسابی دو عدد مثبت به واسطهٔ هندسی آن‌ها برابر $\frac{۳}{\sqrt{۸}}$ است. نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۶۴۲- حاصل $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۴-\sqrt{۵}}{۲}$

۲۶۴۳- خط‌های $(۵-k)y+۲x=۳$ و $mx-y=-۲$ بر هم عمودند و یکدیگر را روی محور x قطع می‌کنند. مقدار $k-m$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۶۴۴- معادلهٔ $x^۳+mx-m-۱=۰$ سه جواب متمایز دارد. حدود m کدام است؟

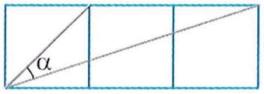
۱) $m\in(-\infty,-\frac{۳}{۴})$ ۲) $m\in(-\frac{۳}{۴},+\infty)$

۳) $m\in(-\frac{۳}{۴},+\infty)-\{۳\}$ ۴) $m\in(-\infty,-\frac{۳}{۴})-\{-۳\}$

۲۶۴۵- مقادیر عبارت $x+\frac{۲}{x}$ به ازای هر x از مجموعهٔ $(a,۱)\cup(b,+\infty)$ بیشتر از ۳ هستند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۴۶- در شکل زیر طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

۳) $\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۱۵}}$

۲۶۴۷- جواب کلی معادلهٔ $\sqrt{۳}\tan(۲x+\frac{\pi}{۴})+۱=۰$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi-\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۲۴}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}$ ۴) $k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}$

۲۶۴۸- اگر $|x+۱|\leq۷$، مجموع بیشترین و کمترین مقدار عبارت $A=x|x|-۴x$ کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۱۶ ۳) -۲۰ ۴) -۲۴

۲۶۴۹- اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲+۳ax+۶a-۴}{x+۲}$ و دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۲\}$ یک تابع همانی باشد، مقدار $f(۳a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۵۰- تابع $f(x)=-۲x^۲+kx$ با دامنهٔ $(-\infty,۳]$ یک‌به‌یک است. حداقل مقدار k کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۲۶۵۱- اگر $f(x)=۳^{\frac{۲-x}{۲}}-۱$، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\log_۳(\frac{۳}{x+۱})$ ۲) $f^{-۱}(x)=\log_۳(\frac{x+۱}{۳})$

۳) $f^{-۱}(x)=\log_۳(\frac{۳}{x+۱})^۲$ ۴) $f^{-۱}(x)=\log_۳(\frac{x+۱}{۳})^۲$

۲۶۵۲- جواب معادلهٔ $۲^{x+۱}=۵^{x-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱-\log۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱-\log۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱+\log۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱+\log۴}$

محل انجام محاسبات

۲۶۵۳- مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin x-\frac{۱}{۲}}{\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

۲۶۵۴- فاصلهٔ مجانب‌های افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{۴x+۲|x|+۱}{۳x-|x|-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۶۵۵- تابع $f(x)=\begin{cases}ax-a+۳ & x\le ۱\\ \frac{x-۱}{x-\sqrt{x}} & x>۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

۲۶۵۶- اگر $g(x)=x+f(x^۳)$ و $f'(۸)=۲$، مقدار $g'(۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۳ ۳) ۲۵ ۴) ۳۱

۲۶۵۷- اگر $f(x)=x\sqrt[۳]{x}$، دامنهٔ تابع f' کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰\}$ ۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $[۰,+\infty)$

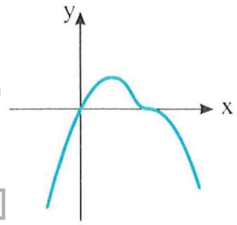
۲۶۵۸- فرض کنید $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۲$. اگر نقطه‌ای به طول -۲ نقطهٔ عطف این تابع باشد و تابع در نقطهٔ $x=۱$ اکسترمم نسبی داشته باشد، مقدار این اکسترمم نسبی کدام است؟

۱) -۲۰ ۲) -۹ ۳) -۷ ۴) -۶

۲۶۵۹- برد تابع $f(x)=x^۴-۴x$ کدام است؟

۱) $[-۲,+\infty)$ ۲) $[-۳,+\infty)$ ۳) $[-۴,+\infty)$ ۴) $[-۵,+\infty)$

۲۶۶۰- ضابطهٔ تابع نمودار مقابل کدام است؟



۱) $y=x(۱-x)^۳$

۲) $y=x(x-۱)^۳$

۳) $y=x(۱-x^۳)$

۴) $y=x(x^۳-۱)$

آزمون ۲۵۸ آزمون جامع (۱۰) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۹۸ - داخل کشور)

محل انجام م

۲۶۶۱- در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامهٔ دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۲۶۶۲- اگر $A=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

۲۶۶۳- به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟

۱) $-2<m<2/5$ ۲) $-2<m<3/5$ ۳) $-1<m<3/5$ ۴) $-1<m<2/5$

۲۶۶۴- نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

۱) (۳,۴) ۲) (۲,۵) ۳) (۳,۵) ۴) (۲,۶)

۲۶۶۵- مجموع تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷، کدام است؟

۱) ۷۲۱ ۲) ۷۲۸ ۳) ۷۳۵ ۴) ۷۴۲

۲۶۶۶- بهروز یک مجلّه را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۲۶۶۷- اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$، تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$ کدام است؟

۱) $\{(4,2),(5,2)\}$ ۲) $\{(4,2),(3,5)\}$ ۳) $\{(5,2),(2,4)\}$ ۴) $\{(3,5),(2,4)\}$

۲۶۶۸- نمودار یک تابع به صورت $f(x)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^2-x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۶۶۹- حاصل عبارت $\tan\frac{11\pi}{4}+\sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

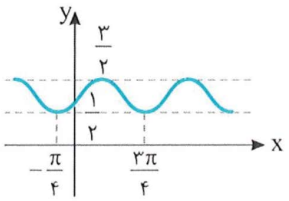
۲۶۷۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$ کدام است؟

۱) $-\sin a$ ۲) $-\cos a$ ۳) $\cos a$ ۴) $\sin a$

۲۶۷۱- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & x>2\\ ax-1 & x\le 2\end{cases}$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۲۶۷۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=1+a\sin bx\cos bx$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

محل انجام محاسبات

۲۶۷۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۳ x+\cos^۳ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) ۳π

۲۶۷۴- اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۲x-۵}{x^۲+ax+b}=-\infty$، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۶۷۵- اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}$، مقدار $(fog)'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

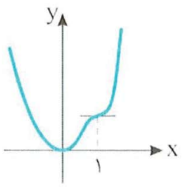
۲۶۷۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x^۲-۲x| & x<۲\\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b & x\geq ۲\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۶۷۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+۲)\sqrt{۴x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۴}$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲۰ ۴) ۰/۲۵

۲۶۷۸- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=۳x^۴+ax^۳+bx^۲+cx$ است. مقدار a کدام است؟



۱) -۸
۲) -۷
۳) -۵
۴) -۴

۲۶۷۹- فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x}{(x-۱)^۲}$، از خط مجانب قائم آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲۶۸۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(x+۱,۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{۲\}$ ۳) $۲<x<۲/۵$ ۴) $۱/۵<x<۲$

آزمون ۲۵۹ آزمون جامع (۱۱) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۹۸ - خارج کشور)

محل انجام م

۲۶۸۱- در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۲۶۸۲- اگر $A=\sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5}$، حاصل $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۶۸۳- به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$، همواره پایین محور xها است؟

۱) $1<m<5$ ۲) $2<m<5$ ۳) $2<m<4$ ۴) $2<m<6$

۲۶۸۴- نمودار تابع $y=x^2-x-3$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xهاست؟

۱) $(-5,2)$ ۲) $(-5,3)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(-2,5)$

۲۶۸۵- با توجه به دنبالهٔ حسابی، مجموع $\frac{1}{17\times20}+\cdots+\frac{1}{8\times11}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{2\times5}$، کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۲۵

۲۶۸۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|2x-1|+|x+2|=3$، کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۶۸۷- اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-1}of)-f$، کدام است؟

۱) $\{-1,4\}$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\{3,4\}$ ۴) $\{2,-1\}$

۲۶۸۸- نمودار یک تابع به صورت $f(x)=3^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^2$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند، عرض نقطهٔ تلاقی تابع f با محور yها، کدام است؟

۱) $\frac{1}{27}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\sqrt{3}$

۲۶۸۹- حاصل عبارت $\tan\frac{17\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{3}+\cos\frac{10\pi}{3}$، کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{3}$

۲۶۹۰- حاصل $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) 2π

۲۶۹۱- به‌ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x[x] & |x|<1\\ ax+b & |x|\geq1\end{cases}$، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۶۹۲- دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) π

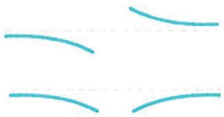
۲۶۹۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4x+\cos^4x=\frac{1}{2}$، در بازهٔ $[0,2\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

محل انجام محاسبات

۲۶۹۴- نمودار تابع $y=\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}$، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟

۱) 

۲) 

۳)

۴)

۲۶۹۵- خط به معادلهٔ $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $x=۲$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}$، $(fog)'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

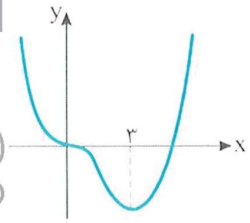
۲۶۹۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}$، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶۹۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۲x+۱}+\frac{۱}{x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۴]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۲}$، چقدر کمتر است؟

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۰۴ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۶

۲۶۹۸- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+bx^۲$ است. $f(-۲)$ کدام است؟



۱) ۳۲

۲) ۳۶

۳) ۴۰

۴) ۴۸

۲۶۹۹- فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{۲x-x^۲}{(x+۱)^۲}$، از خط مجانب افقی آن، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۷۰۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر k، بازهٔ $(k-۲.۳k+۲)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}$ است؟

۱) $(\frac{۱}{۳},۳]$ ۲) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ ۳) $[-۱,\frac{۱}{۳})$ ۴) $[-۱,-\frac{۱}{۳})$

آزمون ۲۶۰ آزمون جامع (۱۲) (برگزیدهٔ کنکور رشتهٔ تجربی سال ۹۸ - داخل کشور)

محل انجام م

۲۷۰۱- اگر $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$، حاصل $\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲ x)$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

۲۷۰۲- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۲۷۰۳- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۱<\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ ۲) $\mathbb{R}-[-۴,۶]$ ۳) $x>۴$ ۴) $x<-۶$

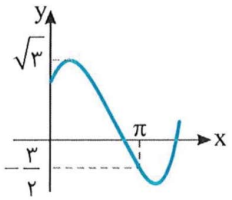
۲۷۰۴- اگر $۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲$، عدد $\frac{a+۱}{a}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

۲۷۰۵- حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۷۰۶- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ است. مقدار b کدام است؟



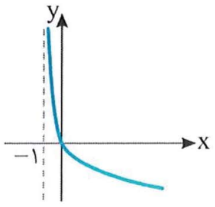
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۲۷۰۷- اگر $(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲}=(۰/۴)^{۲x-۱}$، مقدار $\log_۸(۹x+۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۷۰۸- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=\log_۲ U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟



۱) $x+۱$

۲) $(x+۱)^{-۱}$

۳) $x-۱$

۴) $۱-x$

۲۷۰۹- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۸+x^۳}{|x+۲|} & x\neq -۲\\ a & x=-۲\end{cases}$، در نقطهٔ $x=-۲$ فقط از چپ پیوسته است؟

۱) -۱۲ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۲۷۱۰- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty,-۲)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,+\infty)$

۲۷۱۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) ۵π

محل انجام محاسبات

۲۷۱۲- حد عبارت $\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}$، وقتی $x\to -۸$ کدام است؟

۱) -۲۴ ۲) -۱۸ ۳) -۱۲ ۴) -۶

۲۷۱۳- در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x+|x|}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=+\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-\infty$

۲۷۱۴- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۲۷۱۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x-۱} & x\geq ۲\\ -x^۲+ax+b & x<۲\end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۷۱۶- اگر $g(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲)=۶$، مقدار $f'(۵)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷۱۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

۲۷۱۸- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x-۴|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۲۷۱۹- بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۱۲-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۷۲۰- اگر $f(x)=x^۲-۲x-۳; x\geq ۱$، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

آزمون ۲۶۱ آزمون جامع (۱۳) (برگزیدهٔ کنکور رشتهٔ تجربی سال ۹۸ - خارج کشور)

محل انجام م

۲۷۲۱- اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}(\frac{۱}{\sin x}-\sin x)$، کدام است؟

۱) $-\cos^۲ x$ ۲) $-\cos x$ ۳) $\cos^۲ x$ ۴) $\cos x$

۲۷۲۲- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}>\frac{x}{x-۲}$، به‌صورت بازه، کدام است؟

۱) $(-۴,۲)\cup(۲,۱)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ ۴) $(-۱,۲)$

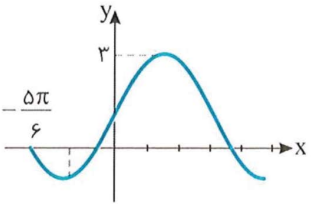
۲۷۲۳- اگر $۲a+\sqrt{۳a+۱۶}=۱$، عدد $۴a+۹$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۲۷۲۴- اگر $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت $\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)-\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) $-۱/۲۳$ ۲) $-۰/۵۲$ ۳) $۰/۲۷$ ۴) $۰/۴۸$

۲۷۲۵- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$ است. مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟



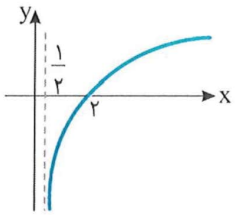
۱) ۱/۵ ۲) ۲

۳) ۲/۵ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۲۷۲۶- اگر $۸۱^x=۳^{x^۲-۲}$، مقدار $\log_۶(x-۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۷۲۷- شکل مقابل، نمودار تابع $y=-۱+\log_b(۲x+a)$ است. این نمودار خط $y=۱$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟



۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

۲۷۲۸- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|} & x\neq ۲\\ ۲ & x=۲\end{cases}$، از نظر پیوستگی در $x=۲$، چگونه است؟

۱) از چپ پیوسته ۲) پیوسته

۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته ۴) از راست پیوسته

۲۷۲۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

۲۷۳۰- جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x+\cos x=۰$، با شرط $\cos x\neq ۰$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$

۲۷۳۱- حد عبارت $\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$، وقتی $x\to ۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

محل انجام محاسبات

۲۷۳۲- در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x}{1+2\cos x}$، کدام بیان، درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+} f(x)=-\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+} f(x)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^-} f(x)=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to\frac{4\pi}{3}} f(x)=+\infty$

۲۷۳۳- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷۳۴- در تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{8}{ax+b} & x>2\\ -x^3+6x & x\le 2\end{cases}$، اگر $f'(2)$ موجود باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷۳۵- مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطهٔ $x=-3$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۲۷۳۶- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{4x-5}{x+1}$ و دامنهٔ $[0,8]$، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند، این خط مماس، محور y را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -2 ۲) $-1/5$ ۳) -1 ۴) $-0/5$

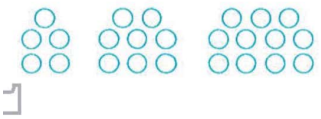
۲۷۳۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x|-2x$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) ۴

۲۷۳۸- بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

۲۷۳۹- در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟



۱) ۳۴ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۴۰

۲۷۴۰- اگر $f(x)=\frac{2}{5}x-4$ و $g(x)=x^3+x$، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(8)$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

آزمون ۲۶۲ آزمون جامع (۱۴) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۹۹ - داخل کشور)

محل انجام م

۲۷۴۱- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب، ۸ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x^2-x-1$، کدام است؟

۱) $-x+4$ ۲) $x+3$ ۳) $2x+6$ ۴) $2x-3$

۲۷۴۲- مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^2-4x+4}$ و $y=\frac{1}{2}x+2$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

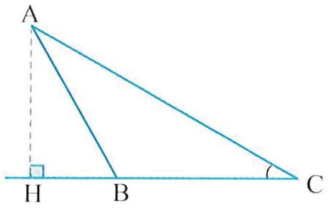
۲۷۴۳- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۷۴۴- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

۱) $x=1$ ۲) $x=1/5$ ۳) $x=2$ ۴) $x=2/5$

۲۷۴۵- در شکل مقابل، فرض کنید $\sin\hat{C}=\frac{5}{13}$ و $CH=9$. اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟



۱) ۳/۲۵
۲) ۳/۵
۳) ۳/۶
۴) ۳/۷۵

۲۷۴۶- اگر انتهای کمان α در ربع دوّم دایرهٔ مثلثاتی و $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4}+\alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۲۷۴۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(3x)\tan(x)=1$، در بازهٔ $[\pi,2\pi]$، کدام است؟

۱) 5π ۲) 6π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{2}$

۲۷۴۸- اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، یعنی $\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\},\ldots$. مجموع اعداد واقع در دستهٔ بیستم، کدام است؟

۱) ۴۱۲۰ ۲) ۴۰۲۰ ۳) ۴۰۱۰ ۴) ۳۹۸۰

۲۷۴۹- مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر مورد نظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه، $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز ۸ گرم از آن عنصر، باقی می‌ماند؟ $(\log 3=0/48)$

۱) ۳۶۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۴۰

۲۷۵۰- فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times2^{1-2n}}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -1

۲۷۵۱- حاصل $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$، کدام است؟

۱) $-1/5$ ۲) $-1/2$ ۳) $-0/8$ ۴) $-0/6$

محل انجام محاسبات

۲۷۵۲- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & ;|x-1|<1\\ x^2+ax+b & ;|x-1|\geq 1\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) 1 ۴) $\frac{5}{2}$

۲۷۵۳- نمودار تابع $f(x)=\frac{-2x^2+3x}{ax^2+bx+c}$ دارای خط‌های مجانب $y=-1$، $x=-2$ و $x=1$ است. $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۷۵ ۴) $-1/5$

۲۷۵۴- اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\sqrt{1+\tan^2 x})$ و $g'(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $f'(2)$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۲۷۵۵- آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{21-x^2+4x}$ در بازهٔ $[5,6]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

۱) $4+\sqrt{2}$ ۲) $3+2\sqrt{2}$ ۳) $2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ۴) $2+\frac{5}{2}\sqrt{2}$

۲۷۵۶- خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=4$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -4 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

۲۷۵۷- اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ برابر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x-1=0$ باشند، $\tan(\alpha+\beta)$، کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) -3 ۴) -1

آزمون ۲۶۳ آزمون جامع (۱۵) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۹۹ - خارج کشور)

محل انجام م

۲۷۵۸- بـه ازای یـک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x)=۲x^۴+ax^۳+۲x^۲-۳x$، بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر اسـت. در ایـن حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x+۲$، کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۸ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۷۵۹- نمودارهای دو تابع $y=|x-۲|+|x+۱|$ و $y=x+۷$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

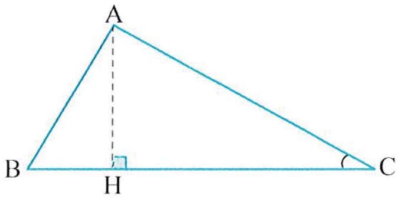
۲۷۶۰- با فرض $f(x)=x^۲-۴x+۹;x\geq ۲$ و $g(x)=\frac{۳-x}{۲}$، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۷۶۱- ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ را نسـبت به مبدأ مختصات رسـم کرده، سـپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سـمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

۱) ۰، ۲ ۲) ۱-، ۱ ۳) ۱-، ۲ ۴) ۲-، ۱

۲۷۶۲- در شکل مقابل، $\cot C=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و $AC=۹۶$، اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۶
۳) ۶۴
۴) ۷۲

۲۷۶۳- اگر انتهای کمان α در ربع اوّل دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۷۶۴- جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x$، کدام است؟

۱) $x=\frac{۲k\pi}{۳},k\in\mathbb{Z}$ ۲) $x=\frac{k\pi}{۳},k\in\mathbb{Z}$ ۳) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳},k\in\mathbb{Z}$ ۴) $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳},k\in\mathbb{Z}$

۲۷۶۵- اعـداد طبیعـی فـرد را طـوری دسـته‌بندی می‌کنیـم کـه تعـداد جمـلات هر دسـته، برابـر شـمارهٔ آن دسـته باشـد، یعنی $\{۱\},\{۳,۵\},\{۷,۹,۱۱\},\ldots$، در این صورت جملهٔ آخر واقع در دستهٔ شمارهٔ چهل، کدام است؟

۱) ۱۵۶۳ ۲) ۱۵۸۹ ۳) ۱۶۳۹ ۴) ۱۶۵۱

۲۷۶۶- در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن $\frac{۱}{۳}$ غلظت اوّلیه می‌شود؟ $(\log ۲=۰/۳,\log ۳=۰/۴۸)$

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

۲۷۶۷- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۲۷۶۸- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x;|x|\leq ۲$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

محل انجام محاسبات

۲۷۶۹- نمودار تابع ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^۲+۷x}{۲x^۲+bx+c}$، فقط یک مجانب قائم $x=۲$ دارد. اگر $f(۳)=۶$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن، کدام است؟

۱) $y=-۱$ ۲) $y=-\frac{۱}{۲}$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}$ ۴) $y=\frac{۳}{۲}$

۲۷۷۰- اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x})$ و $g'(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشند، مقدار $f'(\frac{۱}{۳})$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

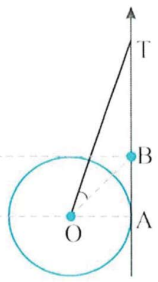
۲۷۷۱- فرض کنید نمودارهای دو تابع $y=x\sqrt{x}$ و $y=x^۲+ax+b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۷۷۲- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & :۰\le x<۴\\ [\frac{x}{۴}](x^۲-۹x) & :۴\le x<۸\end{cases}$، مقدار $f'(۵)-f'(۲)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۷۷۳- با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل، اگر $BT=۲$ باشد، مقدار $\tan(\hat{TOB})$، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

آزمون ۲۶۴ آزمون جامع (۱۶) (برگزیدهٔ کنکور رشتهٔ تجربی سال ۹۹ - داخل کشور)

محل انجام م

۲۷۷۴- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}-۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}$، کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $-۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۱-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}$

۲۷۷۵- اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{۱\},\{۲,۳,۴\},\ldots$. در دستهٔ نهم، واسطهٔ حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

۱) ۷۱ ۲) ۷۲ ۳) ۷۳ ۴) ۷۴

۲۷۷۶- فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$، بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$، آن‌گاه حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۷۷۷- معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲+(۲m-۱)x+۲-m=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۲۷۷۸- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳$، کدام است؟

۱) $(۰/۶,۱/۵)$ ۲) $(۰/۸,۱/۲)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۰/۸,۲)$

۲۷۷۹- فرض کنید نقاط $(-۲,۵)$، $(۰,۵)$ و $(۱,۱۱)$، بر سهمی $y=ax^۲+bx+c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(۲,۹)$ ۴) $(۲,۱۵)$

۲۷۸۰- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۵}$ ۲) $۶\sqrt{۷}$ ۳) $۴\sqrt{۱۷}$ ۴) $۶\sqrt{۱۰}$

۲۷۸۱- در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=|۲x^۲-۴|$ در زیر خط $y=۲x$ واقع است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷۸۲- اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$ باشند، بُرد تابع gof، کدام است؟

۱) $[۰,۲)$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) $[۱,۴)$

۲۷۸۳- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۱۲)+g(۶)$، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

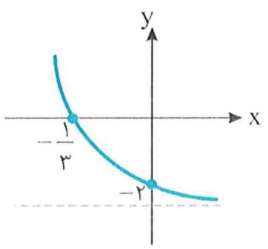
۲۷۸۴- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۲}{x}$ در دامنهٔ $D_f=(-\infty,۰)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲۷۸۵- اگر $\log_۴ ۳=۰/۸$ باشد، مقدار $\log_{۱۲} ۶$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۸}$ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

۲۷۸۶- شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-۴+۲^{ax+b}$ است. $f(-\frac{۵}{۳})$، کدام است؟



۱) ۵۴
۲) ۶۰
۳) ۴۸
۴) ۲۸

محل انجام محاسبات

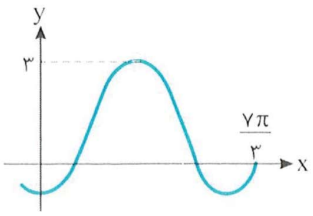
۲۷۸۷- فرض کنید در دامنهٔ $[۰,+\infty)$، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲}$، مفروض باشد. $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟

۱) $\log_۲(۲-\sqrt{۳})$ ۲) $\log_۲(\sqrt{۳}-۱)$ ۳) $\log_۲(۱+\sqrt{۳})$ ۴) $\log_۲(۲+\sqrt{۳})$

۲۷۸۸- حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰)+\tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

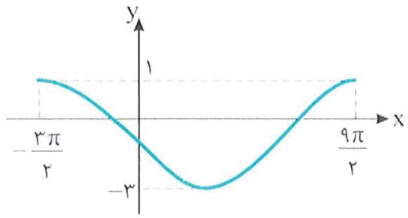
۲۷۸۹- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$



است. مقدار b، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱
۳) -۱ ۴) -۲

۲۷۹۰- شکل مقابل، نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان



می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳
۳) -۴ ۴) -۶

۲۷۹۱- جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})$، با شرط $x\neq k\pi$، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$

۲۷۹۲- حاصل $\lim\limits_{x\to -۲^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}$، کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

۲۷۹۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x^n-۱۲}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{۱}{۶}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to ۳}f(x)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۳۶}$

۲۷۹۴- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & :x\leq -۲\\ -\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c & :x>-۲\end{cases}$، در $x=-۲$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۷۹۵- مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x})^۳$، در نقطهٔ $x=۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

۲۷۹۶- فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{۴x-x^۲}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲۷۹۷- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

۲۷۹۸- مثلثی با رأس‌های $A(۱,۵)$، $B(۷,۳)$ و $C(۲,-۲)$، مفروض است. اندازهٔ ارتفاع AH در مثلث ABC، کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

آزمون ۲۶۵ آزمون جامع (۱۷) (برگزیدهٔ کنکور رشتهٔ تجربی سال ۹۹ - خارج کشور)

محل انجام م

۲۷۹۹- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}$ ، کدام است؟

۱) $۱+۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۱+\sqrt{۳}$ ۴) ۱

۲۸۰۰- جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی، هستند. قدر نسبت دنبالهٔ هندسی، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۲۸۰۱- فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$ ، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$ ، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۱-

۲۸۰۲- معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲+mx+m+۶=۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟

۱) $(-۴,۰)$ ۲) $(-۴,-۲)$ ۳) $(-۶,۰)$ ۴) $(-۶,-۴)$

۲۸۰۳- مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۱<\frac{۲x-۱}{x+۱}<۳$ ، کدام است؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $(۴,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-[-۴,۰]$ ۴) $\mathbb{R}-[-۴,-۱]$

۲۸۰۴- فرض کنید $A(-۱,۹)$ رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ گذرا بر نقطهٔ $(۳,۱)$ باشد. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

۱) $(۵,-۷)$ ۲) $(۵,-۹)$ ۳) $(۲,۵)$ ۴) $(۱,۵)$

۲۸۰۵- نمودار تابع ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x\ ;(x>۱)$ ، مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور xها را، ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۲۸۰۶- در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع $y=(x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار تابع $y=۴x^۴$ است. بیشترین مقدار $b-a$ ، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲۸۰۷- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\frac{۱-۲x}{x+۱}$ باشند، برد تابع gof ، کدام است؟

۱) $[-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۱]$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱]$

۲۸۰۸- فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۱۵)+g(۳)$ ، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

۲۸۰۹- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۱}{۲x}$ بر دامنهٔ $(۰,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

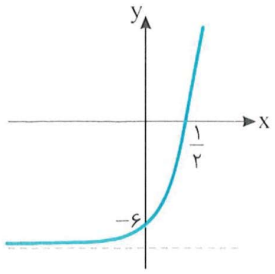
۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) ۱- ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۸۱۰- اگر $\log_{۳}۲=\frac{۵}{۸}$ باشد، آنگاه $\log_{۱۸}۸$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۸}{۱۱}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

محل انجام محاسبات

۲۸۱۱- شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-۹+(\frac{۱}{۳})^{ax+b}$ است. $f(۲)$، کدام است؟



۱) ۲۳۴ ۲) ۱۰۸
۳) ۷۲ ۴) ۱۸

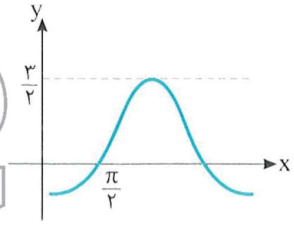
۲۸۱۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲^x-(\frac{۱}{۲})^x}{۲}$ را در نظر بگیرید. $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟

۱) $\log_۲(-۱+\sqrt{۵})$ ۲) $\log_۲(۱+\sqrt{۵})$ ۳) $\log_۲(۲+\sqrt{۵})$ ۴) $\log_۲(۳+\sqrt{۵})$

۲۸۱۳- حاصل عبارت $\tan(۲۸۵)\tan(-۱۶۵)-\sin(۱۰۹۵)\cos(۲۵۵)$، کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

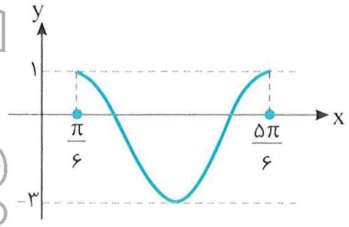
۱) $\sin^۲(۱۵)$ ۲) $\cos^۲(۱۵)$ ۳) $-\sin^۲(۱۵)$ ۴) $-\cos^۲(۱۵)$

۲۸۱۴- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ است. مقدار a، کدام است؟



۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۸۱۵- شکل مقابل، نمودار $y=a\sin(bx)+c$، در یک بازهٔ تناوب است. مقادیر b و c، کدام‌اند؟



۱) $b=۳, c=-۱$ ۲) $b=۳, c=-۲$
۳) $b=\frac{۳}{۲}, c=-۲$ ۴) $b=\frac{۳}{۲}, c=-۱$

۲۸۱۶- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱$، در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۸۱۷- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۲\sin^۲x-\sin x-۱}{\cos^۲x} & ;x\neq\frac{\pi}{۲}\\ a & ;x=\frac{\pi}{۲}\end{cases}$، در $x=\frac{\pi}{۲}$، پیوسته است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) $-۱/۵$

۲۸۱۸- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۴x^n-۶x^۲+۱}{ax^۳+۷x^۲-۲}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x\to\infty}f(x)=۲$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}f(x)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۱۷}$ ۲) $-\frac{۶}{۱۷}$ ۳) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $-\frac{۶}{۱۱}$

۲۸۱۹- خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^۲+bx$، در نقطهٔ $x=۲$، مشترک‌اند. مقدار b، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۸۲۰- مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵})^۲}$، در نقطهٔ $x=-۲$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۸۲۱- مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+۱}$، کدام است؟

۱) $-۱+\sqrt{۵}$ ۲) $۱+\sqrt{۵}$ ۳) $-۱+\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۲۸۲۲- کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطه $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۲x+۷}$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۸۲۳- اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y+۲x=۱۶$، $۲y-x=۲$ و $y=۰$ هستند. اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحهٔ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۵ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

آزمون ۲۶۶ آزمون جامع (۱۸) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۰ - داخل کشور)

محل انجام م

۲۸۲۴- اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۴-۷x^۲-۵=۰$ به‌ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $۲P^۲-۳SP+۲S$، کدام است؟

۱) $۵۹-۷\sqrt{۶۹}$ ۲) $۷+\sqrt{۶۹}$ ۳) ۵۰ ۴) $۵۹+۷\sqrt{۶۹}$

۲۸۲۵- فرض کنید $\log_{\frac{۵}{۲}}(۳x-۲)=۱$. مقدار x، کدام است؟ $\begin{vmatrix}\log ۵ & \log ۲\\ \log ۲ & \log ۵\end{vmatrix}$

۱) ۹ ۲) $\frac{۱۷}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۲۸۲۶- حاصل عبارت $(\log_{۲۱}(۳))^۲+\log_{۲۱}(۱۴۷)\log_{۲۱}(۱۳۲۳)$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۲۷- فرض کنید مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{((m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴)(x-۳\sqrt{x}+۲)}{۲x-۳}>۰$، به‌ازای $x>\frac{۳}{۲}$، بازهٔ $(۲,۴)$ باشد. مقدار m، کدام است؟

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۸۲۸- اگر $\tan(\frac{\alpha}{۲})=\frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha)-\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)-\cos(\alpha)}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۹۱}{۱۰۵}$ ۲) $-\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۴) $\frac{۹۱}{۱۰۵}$

۲۸۲۹- اگر $f(\alpha)=۴\sin(\alpha)\cos(۲\alpha)+۲\sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f(\frac{۴۱\pi}{۹})$، کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۲۸۳۰- فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha))(۱+\cos(۸\alpha))=\frac{۱}{۸}$، در بازهٔ $[۰,\pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعهٔ A، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۷}\pi$ ۲) $\frac{۶}{۷}\pi$ ۳) $\frac{۷}{۹}\pi$ ۴) $\frac{۸}{۹}\pi$

۲۸۳۱- تابع چند جمله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به‌ترتیب -۲ و $\frac{۱}{۲}x+۱$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۲۸۳۲- فرض کنید جملهٔ صدم دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+۱}=\frac{۱}{a_n}+۱$ با شرط $a_۱=۱$، برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جملهٔ نود و هشتم دنباله، کدام است؟

۱) $\frac{k-m}{۲m-k}$ ۲) $\frac{k-۲m}{k-m}$ ۳) $\frac{k-m}{k-۲m}$ ۴) $\frac{۲m-k}{k-m}$

۲۸۳۳- دنبالهٔ $a_n=\begin{cases}۲^k & ; \quad n=۳k\\ -۲k+۴ & ; \quad n=۳k+۱\\ [\frac{n}{k+۲}]+a & ; \quad n=۳k+۲\end{cases}$ به‌ازای اعداد حسابی n، مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت $a_۲+a_۵+a_۸+\cdots+a_{۲۹}$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۲۸۳۴- فرض کنید برد تابع $f(x)=۲\sqrt[۳]{۹\cos^۲(x)-۱}-۲\sqrt[۳]{۱-۹\cos^۲(x)}$ به‌صورت $[a,b]$ باشد. مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۲۱}{۴}$

۲۸۳۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\log_۶\frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}$، کدام است؟

۱) $(-۹,۹)$ ۲) $(-۴,۹)$ ۳) $(۴,۹)$ ۴) $(-۴,۴)$

محل انجام محاسبات

۲۸۳۶- نمودار منحنی $y=\sqrt{۴-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-۲$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به‌دست آمده با محور xها، کدام است؟

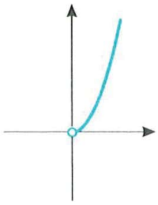
۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲

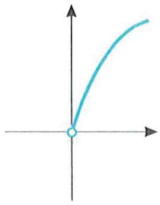
۲۸۳۷- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<-۱\\ x & -۱\le x\le ۱\\ ۱ & x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$. تعداد عناصر مجموعهٔ نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

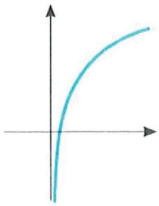
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۸۳۸- نمودار تابع $f(x)=۹^{\log_۳ x}$، کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۸۳۹- فرض کنید $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\tan^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)}{(۱-\cos(\sqrt{۲x}))^n}=a$ $(a\neq ۰)$، مقدار $a+n$، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۷}{۴}$

۲۸۴۰- مقدار $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}^-}\frac{۱۰x-۵+[\frac{۳}{x^۲}]}{۱۶x-[-\frac{۲}{x^۲}]}$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $+\infty$

۲۸۴۱- تابع $f(x)=\frac{ax^۳-bx^۲+۲}{ax^۳-bx+۲}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a و b، کدام‌اند؟

۱) $a=۰, b=۲$ ۲) $a=۸, b=۱۰$ ۳) $a=-۲, b=۰$ ۴) $a=-۸, b=-۶$

۲۸۴۲- فرض کنید $f(x)=\cos^۳(۲x)+ax^۲+b$، $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{x}=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{f'(x)}{x}=۲$، مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) -۸

۲۸۴۳- خط‌وط مماس بر منحنی تابع $f(x)=|\sin(۲x)|+۱$ را در نقطه‌ای به طول $x=۰$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به‌ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره‌خط AB، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲۸۴۴- کدام عبارت برای تابع $f(x)=۲\sqrt{x}-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$، درست است؟

۱) تابع f در مجموعهٔ $(۰,۱)\cup(۱,\infty)$ صعودی است.
۲) تابع f در بازه‌های $(۱,\infty)$ و $(۰,۱)$ صعودی است.
۳) تابع f در بازهٔ $(۱,\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(۰,۱)$ نزولی است.
۴) تابع f در بازهٔ $(۱,\infty)$ نزولی و در بازهٔ $(۰,۱)$ صعودی است.

۲۸۴۵- بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^۴}{x^۳-۸}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. ماکزیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt[۳]{۴}-۱$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $۲(\sqrt[۳]{۴}-۱)$

۲۸۴۶- فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره‌خط AB است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸۴۷- اگر به‌ازای اعداد مثبت و مخالف یک a، b و c تساوی $\log_a c+\log_b c=1$ برقرار باشد، آن‌گاه $\log_c a.\log_c b$، کدام است؟

۱) $\log_c(ab)$ ۲) $2\log_c(ab)$ ۳) $\log_c(a+b)$ ۴) $2\log_c(a+b)$

۲۸۴۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\log_2(4^x+15)=x+3$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۵ ۳) $\log_2 15$ ۴) $\log_4 15$

۲۸۴۹- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}+\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}=x+2$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۸۵۰- فرض کنید مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{((m^2-1)x^2-4mx+4)(2x-3)}{x-3\sqrt{x}+2}\geq 0$ فقط یک بازه باشد. مقدار m، کدام می‌تواند باشد؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{7}{3}$

۲۸۵۱- ساده شدهٔ عبارت $\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}+\frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$، کدام است؟

۱) $\cos(\frac{\theta}{2})$ ۲) $\sin(\frac{\theta}{2})$ ۳) $2\cot(\frac{\theta}{2})$ ۴) $2\tan(\frac{\theta}{2})$

۲۸۵۲- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(1+\cos(\alpha))(1+\cos(2\alpha))(1+\cos(4\alpha))=\frac{1}{8}$، در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۲۸۵۳- باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2+2x به‌ترتیب $3x+1$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-2)=3$، آن‌گاه مقدار باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+2$، کدام است؟

۱) -6 ۲) -5 ۳) -4 ۴) -3

۲۸۵۴- دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$ با شرط $a_1=-1$ را در نظر بگیرید. حاصل‌ضرب صد جملهٔ اول دنباله، کدام است؟

۱) -201 ۲) -199 ۳) -197 ۴) ۱۹۷

۲۸۵۵- دنبالهٔ $a_n=\begin{cases}2^k & ;n=3k\\ -2k+4 & ;n=3k+1\\ \left[\left[\frac{n}{k+2}\right]\right]+a & ;n=3k+2\end{cases}$ به‌ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله ۱۹ باشد، میانگین جملات بیست و نهم و سی‌ام دنباله، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{-43}{6}$ ۲) -7 ۳) ۵۰۵ ۴) ۱۰۲۴

۲۸۵۶- فرض کنید $[a,b]$ برد تابع $f(x)=2^{-\sqrt{5\sin^2(x)-1}}$ باشد. مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۲۸۵۷- اگر برد تابع $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{12+\sqrt{[x]-[x]}}-1)$، برابر $\{\log_2 3,\log_2 5\}$ باشد، حداکثر چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع f وجود دارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۵۸- نمودار منحنی $y=\sqrt{\sqrt{x}+3}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام‌یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به‌دست آمده، قرار دارد؟

۱) $(1-\sqrt{5},0)$ ۲) $(-\sqrt{5},0)$ ۳) $(0,1-\sqrt{5})$ ۴) $(0,-\sqrt{5})$

محل انجام محاسبات

۲۸۵۹- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$. ماکزیمم مقدار تابع $gof-fog$، کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۲۸۶۰- فرض کنید $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos(\sqrt{3x}))}=a$ باشد. مقدار a^n، کدام می‌تواند باشد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۸۶۱- مقدار $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+}\frac{16x-[-\frac{2}{x^2}]}{16x+[\frac{3}{x^2}]}$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) $\frac{2}{3}$

۲۸۶۲- اگر تابع $f(x)=\frac{x^3-5x+4}{(x-a)(4x^2-4x+1)}$، فقط دارای دو مجانب باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۲۸۶۳- فرض کنید $f(x)=\sin^n(x^2)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)f'(x)}{(1-\cos(x))^m}=32\sqrt{2}$. مقدار $2m+n$، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۲۸۶۴- از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x)=\sqrt{x}+2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر α زاویهٔ حادهٔ بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(2\alpha)$، کدام است؟

۱) $\frac{7}{15}$ ۲) $\frac{8}{15}$ ۳) $\frac{225}{289}$ ۴) $\frac{240}{289}$

۲۸۶۵- مجموعهٔ مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x)=\sqrt[3]{3}x+|x|$ صعودی باشند، کدام است؟

۱) $[-1,\infty)$ ۲) $(-\infty,\infty)$ ۳) $[-1,0)\cup(0,\infty)$ ۴) $[-3\sqrt{3},0]$

۲۸۶۶- جهت یکنوایی نمودار تابع $f(x)=\frac{x^4-3}{x^2-2}; x\in(-2,2)$، چند بار تغییر می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۸۶۷- فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x)=x^4-6x^2+5$ باشند. زاویهٔ بین پاره‌خط‌های AB و CD، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

۲۸۶۸- فرض کنید $a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$. مقدار $(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2$، کدام است؟

۱) $4(2+\sqrt{3})$ ۲) $4(2-\sqrt{3})$ ۳) $16(2+\sqrt{3})$ ۴) $16(2-\sqrt{3})$

۲۸۶۹- فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[3]{x^2}-1)(\sqrt[3]{x^2}+1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})=2\sqrt[3]{x}$ باشند. مقدار x_1+x_2، کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۸۷۰- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=5-x^2$ باشند. $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_1+1)^3}$، ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $125x^2+16x=1$ ۲) $125x^2=16x+1$ ۳) $125x^2=12x+1$ ۴) $125x^2+12x=1$

۲۸۷۱- اگر $f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{36})$، کدام است؟

۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$ ۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$ ۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$ ۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

۲۸۷۲- اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha)=\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)}$، کدام است؟

۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

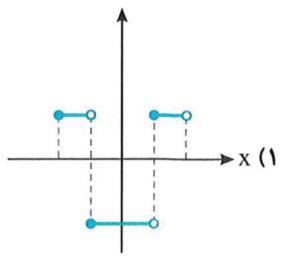
۲۸۷۳- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2(x)-\sin^2(x)\cos(3x)=1$، در فاصلهٔ $[0,2\pi]$، کدام است؟

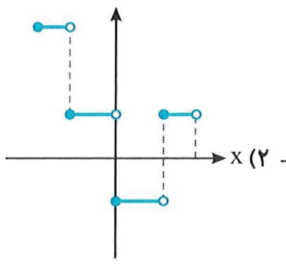
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

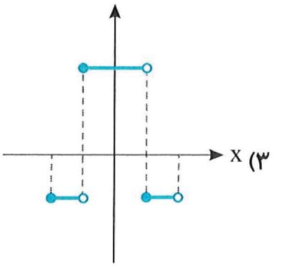
۲۸۷۴- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\log_4(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}$، کدام است؟

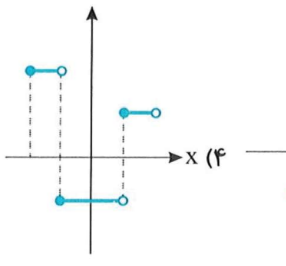
۱) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ ۴) $(-2,1)$

۲۸۷۵- نمودار تابع $y=2|[3x]|-1$ به‌ازای $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$، کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۸۷۶- فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $2y=x^2$ و $x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{15}$

۲۸۷۷- اگر $\frac{3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+3^{x+4}+3^{x+5}}{2^{x-2}+2^{x-1}+2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}}=52$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۷۸- نمودار تابع $y=2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[0,\pi]$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

۲۸۷۹- اگر تساوی $\log_x y - ۲\log_y x = ۱$ به‌ازای $x, y > ۱$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

۱) $y = x^۲$ ۲) $y = x^۳$ ۳) $y = \sqrt{x}$ ۴) $xy = ۲$

۲۸۸۰- مقدار $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۶}^-} [۲\sin x - ۱]$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۲۸۸۱- قرینهٔ نمودار تابع $y = ۲ + \sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۴

۲۸۸۲- فرض کنید $g(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$ و $f(x) = ۱ - x^۲$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof ، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸۸۳- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^۲}{x^۲-۱}|x^۲ - ۴|$ ، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۸۸۴- قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x) = x^۲$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با خط نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA' ، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

۲۸۸۵- فرض کنید $f(x) = (x[x^۲ + \frac{۱}{۲}])^۲ + ۱$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x = \frac{۳}{\sqrt{۸}}$ ، چند برابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است؟

۱) -۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۸۸۶- فرض کنید $g(x) = ax^۲ + bx + c$ ، $(a \neq ۰)$ و $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به‌شرط $b + c = a$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۸۷- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ محاط می‌شود، کدام است؟

۱) ۳۲π ۲) ۶۴π ۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵۱۲\pi}{۳}$

۲۸۸۸- شیب نیم‌خطی با نقطهٔ شروع $A(۲, ۴)$ برابر ۳ است. مستطیل ABCD را چنان می‌سازیم، که نقطهٔ B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-۳, -۱)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) $۶\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۱۰}$

۲۸۸۹- نقطهٔ $H(۲, ۱)$ را روی خط $۳x - y = ۵$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم. به‌طوری که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A ، کدام است؟

۱) $(\frac{۷}{۲}, \frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱۱}{۶})$

آزمون ۲۶۹ آزمون جامع (۲۱) (برگزیدهٔ کنکور رشتهٔ تجربی سال ۱۴۰۰ - خارج کشور)

محل انجام م

۲۸۹۰- فرض کنید $a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}$. مقدار $(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲$، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۴۹

۲۸۹۱- مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن‌گاه حاصل‌ضرب پول‌های باقی‌ماندهٔ آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیهٔ اکرم، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۸۵ ۴) ۹۱

۲۸۹۲- فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x=x^۲-۴$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲}$ و $x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}$، است؟

۱) $۴x^۲=۵۱x+۲۲۱$ ۲) $۴x^۲+۵۱x=۲۲۱$ ۳) $۴x^۲=۵۱x+۱۹۷$ ۴) $۴x^۲+۵۱x=۱۹۷$

۲۸۹۳- اگر $f(x)=۳۲\cos^۲(x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$، کدام است؟

۱) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$ ۲) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۳۲}$

۲۸۹۴- فرض کنید زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha)=\frac{۲}{۳}$ باشد. حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})-\sin(\alpha-\pi)}{|\tan^۲(\alpha)-۱|}$، کدام است؟

۱) $\frac{۴(۲+\sqrt{۵})}{۳}$ ۲) $\frac{۴(-۲+\sqrt{۵})}{۳}$ ۳) $\frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$ ۴) $-\frac{۴(۲+\sqrt{۵})}{۳}$

۲۸۹۵- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۵\sin^۲(x)+۲\cos(۳x)=-۲$، در فاصلهٔ $[-\pi,\pi]$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

۲۸۹۶- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_۴(|x^۲-۲|-x)$، کدام است؟

۱) $(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$ ۳) $[-۱,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$

۲۸۹۷- فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y=\sqrt{x+۳}-۱$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲۸۹۸- از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر توپی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازهٔ ۰/۸ ارتفاع قبلی از زمین به‌صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۷ ۳) ۶۰ ۴) ۶۶

۲۸۹۹- تابع $y=۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور xها در جهت منفی و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

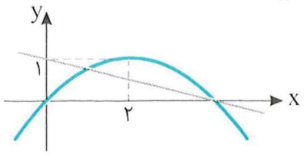
۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۲۹۰۰- اگر در معادلهٔ $۲\log_x a+\log_a \sqrt{x}=۲$، مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۹

محل انجام محاسبات

۲۹۰۱- نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۴^-}\dfrac{f(x)+g(x)}{۴-x}$، کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۹۰۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-۱}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۸ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۲۹۰۳- فرض کنید $f(x)=x(۱-x^۲)$ و $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(fof)og$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۹۰۴- مینیمم مطلق تابع $f(x)=x|۳-x^۲|$ در بازهٔ $[-۱/۵,\sqrt{۳}]$، کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۴}$ ۲) -۲ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $-\frac{۹}{۸}$

۲۹۰۵- قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر منحنی $f(x)=\sqrt[۳]{-x}$ را در دامنهٔ $[۰,۱]$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم صفحهٔ مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA'، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳\sqrt{۶}}$ ۲) $\frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$ ۳) $\frac{۲}{۳\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۴}{۳\sqrt{۲}}$

۲۹۰۶- فرض کنید $f(x)=(x[x])^۳$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$. مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ چند برابر $(-۴۸\sqrt{۵})$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۹۰۷- فرض کنید $g(x)=ax^۲+۵x+b$. اگر $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\le ۲\\ g'(x) & x>۲\end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۲۹۰۸- کوتاه‌ترین فاصلهٔ سهمی $y^۲=۴x$ از نقطهٔ $M(۳,۰)$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۲۹۰۹- سهمی $y=-x^۲+۲x+۱$ خط راست گذرا از نقطهٔ $(۱,۰)$ و با عرض از مبدأ -۱ را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ M، کدام مضرب $\sqrt{۲۶}$ است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۹۱۰- نقاط B، C و $M(۳,۲)$ روی خط $x+۲y=۷$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازهٔ میانهٔ AM برابر $۵\sqrt{۵}$ واحد و BC قاعدهٔ مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A، کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) -۸

آزمون ۲۷۰ — آزمون جامع (۲۲) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۱ - داخل کشور)

محل انجام م

۲۹۱۱- دنباله‌های هندسی با قدرنسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,100\}$ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۹۱۲- کمترین مقدار تابع $y=mx^2-12x+5m-1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟

۱) $x=2$ ۲) $x=2/5$ ۳) $x=3$ ۴) $x=3/5$

۲۹۱۳- α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+6x+a=0$ هستند. اگر $\alpha<\beta<0$ و $3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) $\frac{21}{5}$ ۴) ۲

۲۹۱۴- اگر $\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{a^3-1}=2$ باشد، حاصل $\left(\frac{1}{a^3-\sqrt{a^3}+1}+\frac{1}{a^3+\sqrt{a^3}+1}\right)^{1401}$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

۲۹۱۵- تابع $f(x)=x^2\sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\sqrt{x^3}\ ,\ x\le 0$ ۲) $-\sqrt[3]{x}\ ,\ x\le 0$ ۳) $-\sqrt{x^3}\ ,\ x\ge 0$ ۴) $-\sqrt[3]{x}\ ,\ x\ge 0$

۲۹۱۶- فاصلهٔ نقطهٔ A روی خط $x+y=a$ از دو نقطهٔ $B(-3,2)$ و $C(-1,4)$ به‌ترتیب برابر $\sqrt{29}$ و ۵ است. مقدار a چقدر است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲-

۲۹۱۷- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{3x-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $(fofof)(\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

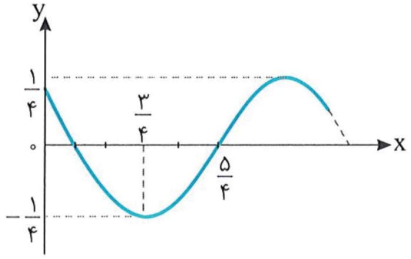
۲۹۱۸- فرض کنید $5^x=10$ است. اگر $2^{f(x)}=20$ باشد، ضابطهٔ f کدام است؟

۱) $\frac{2x+1}{x+1}$ ۲) $\frac{x-1}{2x-1}$ ۳) $\frac{2x-1}{x-1}$ ۴) $\frac{x+1}{2x+1}$

۲۹۱۹- اندازهٔ زاویهٔ A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیشتر از اندازهٔ زاویهٔ B است. حاصل $2\cos\hat{A}\sin\hat{B}-\sin\hat{C}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۹۲۰- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx+c)$ را نشان می‌دهد.



اگر $0<c<\pi$ و $b>0$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) ۱
۳) $\frac{1}{4\pi}$ ۴) π

۲۹۲۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ در بازهٔ $[-\pi,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{7\pi}{3}$ ۳) $\frac{9\pi}{4}$ ۴) $\frac{11\pi}{6}$

۲۹۲۲- حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲- ۴) $-\frac{3}{2}$

محل انجام محاسبات

۲۹۲۳- تابع $f(x)=\begin{cases}|x|+[-x] & |x^{۳}|<x^{۲}\\ ۱+\cos \pi x & |x^{۳}|=x^{۲}\\ [x^{۲}]-[x] & |x^{۳}|>x^{۲}\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) بی‌شمار ۴) در همهٔ نقاط پیوسته است.

۲۹۲۴- چندجمله‌ای $p(x)=x^{۳n+۱}+۲x^{۳n}+x^{۶}+۳x^{۵}+۱۶a$، به‌ازای هر عدد طبیعی n بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. برای $n=۱$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x^{۲}+۲x-۳$ کدام است؟

۱) $-۱۵x+۲۴$ ۲) $-۱۵x+۱۴$ ۳) $-۵x+۳۴$ ۴) $-۵x+۴۴$

۲۹۲۵- اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به‌جز دستهٔ اول و دوم)، برابر بزرگ‌ترین عضو دستهٔ قبل است؛ یعنی $\{۱\},\{۲,۳\},\{۴,۵,۶\},\{۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\},\ldots$. میانگین عضوهای دستهٔ سیزدهم، کدام است؟

۱) ۲۳۰۴/۵ ۲) ۳۰۷۲/۵ ۳) ۴۶۰۸/۵ ۴) ۶۱۴۴/۵

۲۹۲۶- تابع $f(x)=\frac{|ax+۱|+۲x}{|x|+b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر ریشهٔ مخرج با یکی از حدهای تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۹۲۷- در نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$ و $g(x)=\frac{۳}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{\pi}{۴}-۱$ ۲) $\frac{\pi}{۴}-۳$ ۳) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}+\frac{۳}{۸}$

۲۹۲۸- تابع f مشتق‌پذیر و با دورهٔ تناوب ۵ است. اگر $f'(-۱)=\frac{۳}{۲}$ و $g(x)=f(x+۱)+f(۳x+۱۰)$ باشد، حاصل $g'(-۲)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) ۶ ۴) $\frac{۱۳}{۲}$

۲۹۲۹- اگر $f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f^{۲}(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۰}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۱۵}$

۲۹۳۰- نقطهٔ $A(-۱,۱)$ اکسترمم نسبی تابع $y=x^{۲}|x|+۳ax^{۲}+b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۹۳۱- محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+۳}{(a+۱)x+(a-۱)}$، نقطهٔ مینیمم تابع $y=\frac{۳}{۲}x^{۲}+x+\frac{۵}{۶}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

۲۹۳۲- یک دانش‌آموز مربع‌هایی رسم می‌کند که مساحت هر مربع، ۹ برابر مساحت مربع رسم شدهٔ قبلی است. محیط این مربع‌ها، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۲۹۳۳- نمودار تابع $y=۳x^۲+(۲m-۱)x+m+\frac{۴}{۳}$ در ناحیهٔ دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $-\frac{۷}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۲۹۳۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۲(a+۱)x+۲a-۱=۰$ باشند، به ازای کدام مقدار a، به ترتیب سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

۲۹۳۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۳+kx^۲-۹x-۲=۰$، $\alpha+\beta=۱$ و $\alpha\beta=-۲$ باشد، مقدار k چقدر است؟

۱) $-\frac{۲۷}{۵}$ ۲) $\frac{۲۷}{۵}$ ۳) ۳- ۴) ۳

۲۹۳۶- تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{(x+۱)^۲}-|۳x-۶|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}x-۷\ ,\ x\geq ۲$ ۲) $-\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\ ,\ x\leq ۳$ ۳) $-۲x+۱۴\ ,\ x\leq ۳$ ۴) $-۲x-\frac{۱۴}{۳}\ ,\ x\geq ۲$

۲۹۳۷- نمودارهای دو تابع $y=|x+۲|+|x-۱|$ و $۳y+x=۱۷$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۲۹۳۸- فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^۳+۳x-۱۲$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

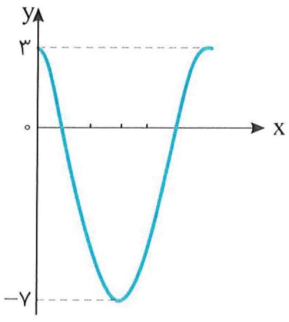
۲۹۳۹- اگر $a^۲+۹b^۲=۱۰ab$ باشد، مقدار $\log(\frac{a+۳b}{۴})$، واسطهٔ حسابی کدام دو جملهٔ زیر است؟

۱) $\log a\ ,\log(۳b)$ ۲) $\log a\ ,\log b$ ۳) $\log\sqrt{a},\log\sqrt{b}$ ۴) $\log\sqrt{a},\log\sqrt{۳b}$

۲۹۴۰- اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}=۴$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

۲۹۴۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos x+b$ را نشان می‌دهد. مقدار $f(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۱}{۲}$

۲۹۴۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۴}$

۲۹۴۳- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲-۳x}-\sqrt{۲-۵x}}{\sqrt{۲-۲\cos x}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

محل انجام محاسبات

۲۹۴۴- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{2bx^2} & x>0\\ |b-x| & x=0\\ [x]-2a & x<0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است. مقدار حقیقی $b-a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{25}{16}$

۲۹۴۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x)=x^2+4x+5$ برابر $x+2$ است. اگر $f(1)=13$ و $f(-1)=11$ باشد، خارج قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

۱) $-x+2$ ۲) $2x-1$ ۳) $3x-2$ ۴) $-2x+3$

۲۹۴۶- اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دستهٔ اول) برابر بزرگ‌ترین عضو دستهٔ قبل است؛ یعنی $\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7,8\},\ldots$. میانهٔ عضوهای دستهٔ سیزدهم، کدام است؟

۱) ۶۱۴۴/۵ ۲) ۶۱۴۵/۵ ۳) ۱۲۲۸۹/۵ ۴) ۱۲۲۸۸/۵

۲۹۴۷- نقطهٔ $A(-\frac{1}{2},3)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار $y=\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

۲۹۴۸- در کدام نقطه از منحنی $y=x^2-4x+5$، خط مماس بر منحنی، بر $6y-3x=1$ عمود است؟

۱) $(-2,17)$ ۲) $(-1,10)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(2,1)$

۲۹۴۹- اگر f تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f(\tan^2 x+\sqrt{2}\cos x)$ و $g'(\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$ باشد، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۹۵۰- در بازهٔ $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$، آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin x\cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۹۵۱- نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

۱) -3 ۲) -6 ۳) ۳ ۴) ۶

آزمون ۲۷۲ — آزمون جامع (۲۴) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۲ - نوبت اول)

محل انجام م

۲۹۵۲- با ضرب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی به‌ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنبالهٔ حسابی به‌دست می‌آید. اگر مجموع مربعات سه جملهٔ هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۳۲}{۷}$ ۲) $\frac{۶۴}{۷}$ ۳) $\frac{۲۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴۸}{۵}$

۲۹۵۳- رأس سهمی $y=kx^۲-۴x-۶$ روی خط $y=-۴x-۴$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) -۴ ۴) -۸

۲۹۵۴- معادله‌های $x^۲+۶x+m=۰$ و $x^۲+۲x-۳m=۰$ یک ریشهٔ مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۲۹۵۵- نمودار تابع $y=\frac{۲}{x^۲-۳x+۲}$، به‌ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y=۰$ و $y=-۲$ واقع می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۲۹۵۶- نقاط $A(۰,۱)$ و $B(۴,-۲)$ دو رأس مجاور مربع ABCD هستند. طول مختصات نقطهٔ D در ربع سوم، کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۲۹۵۷- توابع $f(x)=\log(۲x-۵)$ و $g(x)=x+\sqrt{۲x-۴}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y=g^{-۱}of^{-۱}(x)$ محور yها را در α قطع کند، مقدار α کدام است؟

۱) $۴-\sqrt{۲}$ ۲) $۴-\sqrt{۳}$ ۳) $۴+\sqrt{۲}$ ۴) $۴+\sqrt{۳}$

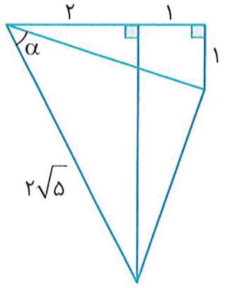
۲۹۵۸- نمودار $f(x)=۲+۲^{b-ax}$ نمودار تابع $g(x)=-x^۲-۳x+۸$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر $f^{-۱}(۱۰)=-۱$ باشد، مقدار $۲b-a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) -۲

۲۹۵۹- معادلهٔ $\frac{۶x}{x^۲-۲x+۴}=\frac{x^۲-۹x-۲}{x^۳+۸}-\frac{۱}{x+۲}$ دارای چند جواب مثبت است؟

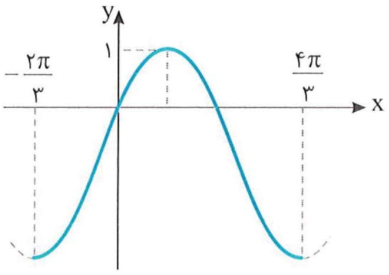
۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۹۶۰- در شکل مقابل، مقدار $\cos\alpha$ چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۱۰}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$

۲۹۶۱- شکل مقابل، قسمتی از نمودار $y=a+b\cos(cx-\frac{\pi}{۳})$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c-a)$ کدام است؟



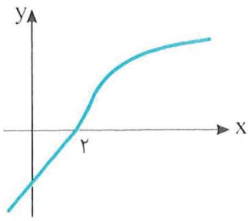
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

محل انجام محاسبات

۲۹۶۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos(\frac{۱۷\pi}{۸}+x)\cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\cos^۲(\frac{\pi}{۳})$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ کدام است؟

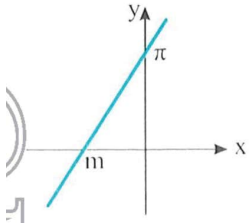
۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۲۹۶۳- اگر $f(x)=|\frac{۱}{۲}x-۱|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادلهٔ $g(f(g(x+۲)))=۰$ چند ریشه دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۲۹۶۴- شکل مقابل، نمودار تابع $f^{-۱}$ را نشان می‌دهد. اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=\pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



۱) $-\sqrt{\pi}$ ۲) $-\frac{۱}{\sqrt{\pi}}$
۳) $-\frac{۱}{\pi}$ ۴) $-\pi\sqrt{\pi}$

۲۹۶۵- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}|x-[x]| & [x]\text{ زوج}\\ |x-[x-a]| & [x]\text{ فرد}\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مجموعهٔ مقادیر $[a]$ شامل چند عضو است؟ $(a<-۱)$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۲۹۶۶- تابع $f(x)=\frac{x}{۱-x|x|}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۹۶۷- به‌ازای کدام مقدار a، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x)=|۴x-۳|\sqrt{ax}$، در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۴}$ برابر $۲\sqrt{۶}$ می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۲۹۶۸- نمودار تابع $f(x)=(m^۲+۱)x^۲+(۲-m)x-۵$ محور xها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β بیشترین مقدار باشد، m کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۵}$ ۲) $۲+\sqrt{۳}$ ۳) $۲-\sqrt{۵}$ ۴) $۲-\sqrt{۳}$

آزمون ۲۷۳ آزمون جامع (۲۵) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۲ - نوبت دوم - داخل کشور) [۱]

محل انجام...

۲۹۶۹- اگر جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهید داشت. مقدار $r+d$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۹۷۰- نقاط $A(۳,y)$ و $B(-۵,y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور xها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^۲+\beta^۲=۵$ باشد، این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۹۷۱- اگر α و β ریشه‌های متمایز معادلهٔ $ax^۲-ax-b=۰$ و $۴۰\beta^۲+۲۰\alpha^۲-۲۰\beta=۱۷$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

۲۹۷۲- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۱-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۲۵

۲۹۷۳- نقطهٔ $(۴/۵,۲)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $۴x+y=۳$ و $x-۴y=۵$ هستند. بیشترین فاصلهٔ وسط قطر از اضلاع کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$ ۳) $۲\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۱۷}$

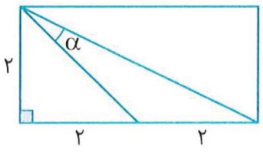
۲۹۷۴- وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$ در دامنهٔ محدود، خط $y=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۹۷۵- مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر ساعت $\frac{۱}{۹}$ از جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند دقیقه $\frac{۱}{۶}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_۳ ۵=۱/۴$ و $\log_۲ ۵=۲/۴$)

۱) ۳۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۴۴۰ ۴) ۴۲۰

۲۹۷۶- در شکل مقابل، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟

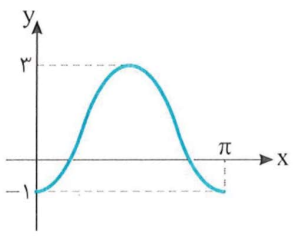


۱) ۱ ۲) ۳
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۹۷۷- مثلث ABC، با اضلاع $\sqrt{۳}$ و ۶ و α (زاویهٔ بین آن‌ها) قابل رسم است. اگر مساحت این مثلث ۴/۵ باشد، بیشترین مقدار α چند برابر کمترین مقدار α است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۹۷۸- اگر شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(cx-\frac{۳\pi}{۴})\cos(cx-\frac{۳\pi}{۴})$ باشد، اختلاف صفرهای تابع در بازهٔ $[۰,\pi]$، کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۱- برای دانلود پاسخ‌های تشریحی کنکورهای سراسری رشتهٔ ریاضی سال‌های ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳، به سایت نشر الگو به نشانی www.olgoobooks.ir مراجعه کنید.

۲۹۷۹- در معادلهٔ مثلثاتی $m(\cos x-\sin x)-۳\sqrt{۶}\sin(۲x)=\sqrt{۶}$ اگر $\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) ۳

۲۹۸۰- تابع f اکیداً نزولی و دامنهٔ آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۹۸۱- f تابع هموگرافیک، $g(x)=\frac{۱}{f(x)}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-۱}(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g^{-۱}(x)}{g(x)}$ است. کدام عدد می‌تواند حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} f^{-۱}(x)$ باشد؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۹۸۲- برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases}|x-[-x]| & [x] \text{ زوج}\\ x-[x]+k & [x] \text{ فرد}\end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$

۱) n زوج ۲) n فرد

۳) برای جمیع مقادیر n پیوسته است. ۴) برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

۲۹۸۳- اگر $f(x)=(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x})^۲$ و $f(x)=xg(x)+۱$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) -۲

۲۹۸۴- خط d موازی محور xها، قرینهٔ سهمی $y=x^۲+۱$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصلهٔ خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۳/۲۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۲/۷۵

۲۹۸۵- به‌ازای چند مقدار صحیح و منفی k، نقطهٔ عطف منحنی $y=kx^۳+(k+۱)x^۲$ در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیش از ۲ ۴) صفر

۲۹۸۶- کمترین فاصلهٔ نقاط واقع بر منحنی $y=\sqrt{x-[x^۲]}$ از خط $۲x-y+۲=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۰}$

محل انجام محاسبات

۲۹۸۷- یک دنباله با جملات غیرصفر، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d و دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r است. مقدار $r+d$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۹۸۸- نقاط $(۱,\beta)$ و $(-۵,\beta)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. اگر سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{۳}{۲}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۲۹۸۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $۳x^۲-۱۲x-a=۰$ و $۲\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷$ باشد، مقدار a چند برابر ریشهٔ بزرگ‌تر معادله است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) -۹

۲۹۹۰- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۲۹۹۱- نقطهٔ $(-۶,۳)$ یکی از رئوس متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $x-۳y=۴$ و $x+۴y=-۳$ هستند. بیشترین فاصلهٔ وسط قطر با اضلاع کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۲\sqrt{۱۰}}$ ۲) $\frac{۱۹}{\sqrt{۱۰}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶۵}}{\sqrt{۲}}$

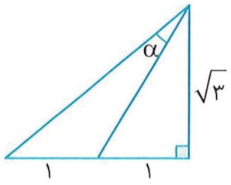
۲۹۹۲- وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-۱}$ در دامنهٔ محدود، خط $۵y-۱۰x=۱۲$ را در نقطه‌ای به عرض ۷/۲ قطع می‌کند. مقدار $f(\frac{۴}{m})$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۱۵}$ ۴) $۲\sqrt{۱۵}$

۲۹۹۳- مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر هفته ۱۲/۵ درصد از جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز، $\frac{۱}{۷}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_۷ ۳=۰/۶$ و $\log_۲ ۳=۱/۶$)

۱) ۸ ۲) ۲۸ ۳) ۵۶ ۴) ۱۲۶

۲۹۹۴- در شکل زیر، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

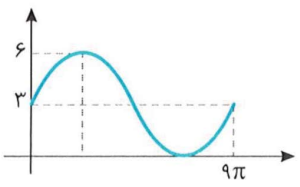


۱) $\frac{۱}{۵\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$

۲۹۹۵- در یک مثلث، زاویهٔ بین دو ضلع با اندازه‌های ۵ و ۱۲ برابر α است. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۲۹۹۶- اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۱+\tan^۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})}$ باشد، مقدار $f(\frac{۳\pi}{۴})$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۴/۷۵
۴) ۵

محل انجام محاسبات

۲۹۹۷- در معادلهٔ مثلثاتی $۳\sin x-\sqrt{۳}\cos x+m\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})=۱$ اگر $\sin(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) -۳

۲۹۹۸- تابع f اکیداً صعودی و دامنهٔ آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(۲m^۲-۹m-۲)<f(m^۲-۴m+۴)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۹۹۹- اگر f تابع هموگرافیک و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}$ باشد، کدام مورد می‌تواند محل تقاطع مجانب‌های تابع f باشد؟

۱) $(\sqrt{\pi},\pi)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۱,۲)$

۳۰۰۰- برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases}|[-x]-x| & [x]\text{ فرد}\\ k-x+[x] & [x]\text{ زوج}\end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$

۱) برای هیچ مقداری از n، پیوسته نیست.
۲) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.
۳) n فرد
۴) n زوج

۳۰۰۱- اگر $f(x)=\frac{۵\cos x}{۱-\sin x}$ و $f(x)=xg(x)-۲x+۵$ باشد، حاصل $\lim_{x\to۰}g(x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۳۰۰۲- خط d موازی محور xها، سهمی $y=x^۲-۱$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۳۰۰۳- به‌ازای چند مقدار صحیح k، نقطهٔ عطف منحنی $y=\frac{k}{۲}x^۳-(k+۲)x^۲$ در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) بیش از ۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۰۰۴- کمترین فاصلهٔ نقاط واقع بر منحنی $y=-\sqrt{-x-[x^۲]}$ از خط $x-y-۱=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$

آزمون ۲۷۵ — آزمون جامع (۲۷) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۳ - نوبت اول)

۳۰۰۵- مقادیر a، $2a+1$ و $-a+5$ به‌ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. اگر a جملهٔ نخست این دنباله باشد، جملهٔ نهم کدام است؟

۱) ۲/۷۵ ۲) ۴/۲۵ ۳) ۱۲/۲۵ ۴) ۱۴/۷۵

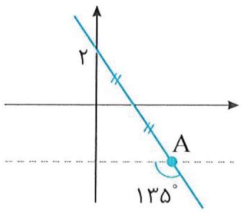
۳۰۰۶- نقاط $(3,-4)$ و $(-1/5,-4)$ روی یک تابع درجهٔ دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۳۰۰۷- اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $x^2+2kx+5=0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $[\frac{k^2}{2}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۰۸- در شکل مقابل، فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات کدام است؟



۱) $2\sqrt{5}$
۲) $3\sqrt{6}$
۳) $4\sqrt{3}$
۴) $5\sqrt{2}$

۳۰۰۹- اگر $f(x)=x^2-[x]$ و $f(af(\sqrt{5}))=2$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۳۰۱۰- برای چند مقدار صحیح و یک‌رقمی a، جواب معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a$، عددی صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

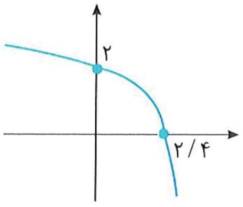
۳۰۱۱- به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+6x^2+ax+1$ خط $y-x=-10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۵

۳۰۱۲- اگر $\log_2(x^2+2x+4)+\log_2(x-2)=3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ کدام است؟

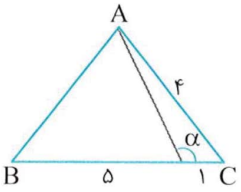
۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۱۳- نمودار تابع $y=c+\log_5(ax+b)$ به‌صورت مقابل است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) $-\frac{2}{5}$ ۲) $-\frac{3}{5}$
۳) $-\frac{1}{10}$ ۴) $-\frac{3}{10}$

۳۰۱۴- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $-\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$
۳) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

۳۰۱۵- حاصل عبارت $(3\cos 4x+\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{12}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

محل انجام محاسبات

۳۰۱۶- حاصل عبارت $\frac{\sin^۴\alpha+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{\cos^۴\alpha+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\cos ۲\alpha$ ۴) $\sin ۲\alpha$

۳۰۱۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos ۲x+\sin^۲ x=۰$ در بازهٔ $[-۳\pi,\pi]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\pi$ ۳) -۳π ۴) -۴π

۳۰۱۸- مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x)=\frac{x-۲}{x^۲-[x^۲]}$ در نقطهٔ $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۰۱۹- اگر $f(x)=\frac{۴}{x^۲+۲x-۳}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۱}$ باشد، نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۳,۰)$ ۳) $(۳,۱)$ ۴) $(۱,۰)$

۳۰۲۰- تابع $f(x)=\begin{cases}(۱-a)[x]+(۳a^۲-۱)[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ b\sin(\frac{\pi}{a}) & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۰۲۱- اگر $f(x)=\sqrt{x+۸}-\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x+۸}+\sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۳۰۲۲- به ازای چند مقدار صحیح m، تابع $y=\frac{mx+۲}{x-۱+m}$ روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ نزولی است؟ $(m\neq۲)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۲۳- به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a، تابع $f(x)=\begin{cases}bx+c & x<a\\ \frac{۱}{x} & x\geq a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۳۰۲۴- خط مماس بر منحنی $y=x^۳+ax^۲+bx-۱$ در نقطهٔ $(-۱,-۴)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

آزمون ۲۷۶ آزمون جامع (۲۸) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۳ - نوبت دوم - داخل کشور)

محل انجام م

۳۰۲۵- اگر $x+1$ ، $x-1$ ، $2x+1$ و x به ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنبالهٔ هندسی باشند، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۳۰۲۶- اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y=-5x^2+ax-8$ در آن اکیداً صعودی است، بازهٔ $(-\infty, 2/5]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) ۱۳/۷۵ ۲) ۱۴/۲۵ ۳) ۲۳/۲۵ ۴) ۲۴/۷۵

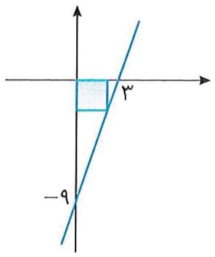
۳۰۲۷- اگر $r(x)$ باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^{14}-2$ بر x^2+x+1 باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ $(x\neq 1)$

۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) ۴

۳۰۲۸- برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشهٔ معادلهٔ $2x^2+7x+m=0$ بزرگ‌تر از -3 است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۰۲۹- در شکل مقابل، قطر مربع رنگی کدام است؟



۱) $2/5\sqrt{2}$
۲) $3/5\sqrt{2}$
۳) $\frac{9}{2\sqrt{2}}$
۴) $\frac{9}{\sqrt{2}}$

۳۰۳۰- در یک مستطیل، نقاط $A(5,2)$ و $C(4,-1)$ دو رأس غیرمجاور و دو رأس B و D روی خط $x-3y=3$ واقع‌اند. اختلاف طول نقاط B و D کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

۳۰۳۱- ضابطهٔ تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x)=\begin{cases} x^2-x-7 & x\geq 1 \\ 2x-1 & x<1 \end{cases}$ است، برای چند مقدار a ، $f(1-|a|)=f(2+|a|)$ است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

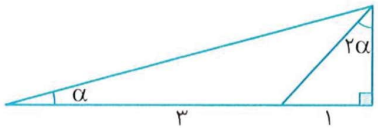
۳۰۳۲- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1+x}}$ ، در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۰۳۳- اگر $\log(2-x)-\log\frac{1}{(x-2)^2}=3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}}(-x)$ کدام است؟

۱) -6 ۲) ۶ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۳۰۳۴- در شکل زیر، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۳۰۳۵- اگر $3\sin^2 x+a\cos^2 x=4$ باشد، $\cot^2 x$ با کدام مورد برابر است؟

۱) $\frac{1}{a-4}$ ۲) $\frac{1}{4-a}$ ۳) $\frac{1}{a-3}$ ۴) $\frac{1}{3-a}$

۳۰۳۶- در مثلث ABC ، اگر $\tan(B-C)=\sqrt{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1-2\cos(B+C)}{4\sin B\cos C}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\tan B$ ۴) $\tan C$

محل انجام محاسبات

۳۰۳۷- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\cos(2x-\frac{\pi}{4})+\cos(x+\frac{\pi}{4})=0$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۳۸- اگر $\lim_{x\to 0}\frac{a+\sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x}=2$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -4 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۳۰۳۹- برای چند مقدار a، تابع $f(x)=\frac{3x^2-8x-3}{ax^2+(1-a)x+a+1}$ یک مجانب قائم دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۳۰۴۰- به ازای مقادیر طبیعی c، تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+1} & |x|\le c\\ ax^2+bx+2 & |x|>c\end{cases}$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است. کدام می‌تواند مقدار $[\frac{a}{b}]$ باشد؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۳۰۴۱- اگر $f(x)=\frac{8+\cos^3 x}{4-\cos^2 x}$ و $g(x)=\frac{2}{2-\cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'(\frac{7\pi}{6})-2g'(\frac{7\pi}{6})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۰۴۲- به ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=\begin{cases}b & x<a\\ b+(x-a)^m & x\ge a\end{cases}$ دارای نقطهٔ گوشه‌ای است؟

۱) صفر ۲) بیش از ۲ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۰۴۳- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x(1-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m+n+k$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

آزمون ۲۷۷ — آزمون جامع (۲۹) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۳ - نوبت دوم - خارج کشور)

محل انجام مه

۳۰۴۴- اگر $x+۱$ ، x، $x-۱$ و $۲-x$ به ترتیب جملات اول، دوم، چهارم و پنجم یک دنبالهٔ هندسی باشند، مجموع مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $-\sqrt{۵}$

۳۰۴۵- اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y=ax^۲+۷x-۱$ در آن اکیداً صعودی است، بازهٔ $[-۰/۷,+\infty)$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) $-۳/۴۵$ ۲) $-۴/۵۵$ ۳) $-۵/۲۵$ ۴) $-۶/۳۵$

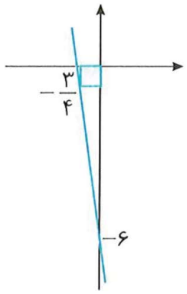
۳۰۴۶- اگر $r(x)$ باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^{۱۷}-۵$ بر $x^۲-x+۱$ باشد، حاصل‌ضرب ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ $(x\neq -۱)$

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۶ ۴) ۶

۳۰۴۷- برای چند مقدار صحیح m، هر دو ریشهٔ معادلهٔ $-x^۲+۵x+m=۰$ کوچک‌تر از $\frac{۹}{۲}$ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۰۴۸- در شکل مقابل، قطر مربع رنگی، کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۲\sqrt{۳}}$

۲) $\frac{۴}{۳\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$

۴) $\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}$

۳۰۴۹- دو رأس یک مستطیل روی خط $۲y-x=۴$ و نقاط $(۱,۴)$ و $(-۱,۰)$ رأس‌های غیرمجاور این مستطیل هستند. طول مستطیل کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۳۰۵۰- ضابطهٔ تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x)=\begin{cases} ۷-۳x & |x|>۱ \\ -۲x & |x|<۱ \end{cases}$ است. اگر $f(۱+a^۲)=f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})$ باشد، اختلاف مقادیر a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

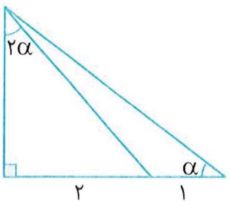
۳۰۵۱- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱+\sqrt{۱+x}}$ در چند نقطه، تابع وارون خود را قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۰۵۲- اگر $\log(x^۲-۲x+۱)+۳\log(۱-x)=۵$ باشد، مقدار $\log_۳(-x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۰۵۳- در شکل مقابل، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) $\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۳}$

۳۰۵۴- اگر $\cot x=۴$ باشد، مقدار $\frac{۳\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ کدام است؟

۱) $۰/۲$ ۲) $۰/۴$ ۳) $۱/۴$ ۴) $۲/۲$

محل انجام محاسبات

۳۰۵۵- در مثلث ABC، اگر $\cot(B-C)=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{۲\cos(B+C)+۱}{۴\sin B\cos C}$ کدام است؟

۱) $\tan B$ ۲) $\tan C$ ۳) $\cot B$ ۴) $\cot C$

۳۰۵۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos(x-\frac{\pi}{۳})+\cos(\frac{\pi}{۶}-x)=۰$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۹\pi}{۴}$

۳۰۵۷- اگر $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{a+\sqrt{bx+c}}{x}=\frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۳۰۵۸- برای چند مقدار a تابع $f(x)=\frac{۲x^۲+x-۶}{ax^۲+(a-۲)x+۴}$ یک مجانب قائم دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۳۰۵۹- بـه ازای برخی مقادیر صحیـح نامنفی c، تابـع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲-۴x+۴} & |x-۲|\le c\\ a(x-۲)^۲+b(x-۲) & |x-۲|>c\end{cases}$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است. چند مقدار برای $[ac]$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

۳۰۶۰- اگر $f(x)=\frac{۲۷-\sin^۳ x}{۹-\sin^۲ x}$ و $g(x)=\frac{۳}{۳+\sin x}$ باشد، حاصل عبارت $۳g'(\frac{۵\pi}{۳})-f'(\frac{۵\pi}{۳})$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۰۶۱- به ازای چند مقدار صحیح نامنفی m، (a,b) یک نقطهٔ گوشه‌ای برای منحنی $f(x)=\begin{cases}b & x<a\\ b+(x-a)^m & x\ge a\end{cases}$ است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۳۰۶۲- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x|x|-x}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $\frac{km+n}{k-n}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

دست‌گرمی

سؤال	پاسخ
۱	۲
۲	۳
۳	۱
۴	۱
۵	۱
۶	۳
۷	۴
۸	۳
۹	۲
۱۰	۳
۱۱	۲
۱۲	۴
۱۳	۲
۱۴	۱
۱۵	۱
۱۶	۳
۱۷	۳
۱۸	۲
۱۹	۳
۲۰	۴
۲۱	۲
۲۲	۳
۲۳	۳
۲۴	۴
۲۵	۱
۲۶	۱
۲۷	۳
۲۸	۳
۲۹	۱
۳۰	۱
۳۱	۲
۳۲	۳
۳۳	۳
۳۴	۴
۳۵	۳
۳۶	۴

سؤال	پاسخ
۳۷	۱
۳۸	۲
۳۹	۳
۴۰	۲
۴۱	۳
۴۲	۲
۴۳	۲
۴۴	۱
۴۵	۳
۴۶	۲
۴۷	۳
۴۸	۴
۴۹	۳
۵۰	۳
۵۱	۲
۵۲	۴
۵۳	۱
۵۴	۳
۵۵	۱
۵۶	۲
۵۷	۲
۵۸	۱
۵۹	۲
۶۰	۳
۶۱	۲
۶۲	۴
۶۳	۲
۶۴	۲
۶۵	۳
۶۶	۳
۶۷	۱
۶۸	۴
۶۹	۱
۷۰	۱
۷۱	۲
۷۲	۴

سؤال	پاسخ
۷۳	۱
۷۴	۴
۷۵	۳
۷۶	۱
۷۷	۴
۷۸	۲
۷۹	۳
۸۰	۱
۸۱	۱
۸۲	۱
۸۳	۳
۸۴	۲
۸۵	۲
۸۶	۱
۸۷	۴
۸۸	۲
۸۹	۱
۹۰	۳
۹۱	۴
۹۲	۲
۹۳	۳
۹۴	۱
۹۵	۲
۹۶	۴
۹۷	۲
۹۸	۴
۹۹	۲
۱۰۰	۱
۱۰۱	۲
۱۰۲	۳
۱۰۳	۲
۱۰۴	۲
۱۰۵	۳
۱۰۶	۱
۱۰۷	۱
۱۰۸	۲

سؤال	پاسخ
۱۰۹	۲
۱۱۰	۲
۱۱۱	۱
۱۱۲	۳
۱۱۳	۴
۱۱۴	۲
۱۱۵	۲
۱۱۶	۳
۱۱۷	۱
۱۱۸	۴
۱۱۹	۴
۱۲۰	۲
۱۲۱	۳
۱۲۲	۲
۱۲۳	۲
۱۲۴	۳
۱۲۵	۱
۱۲۶	۲
۱۲۷	۱
۱۲۸	۳
۱۲۹	۲
۱۳۰	۱
۱۳۱	۳
۱۳۲	۴
۱۳۳	۲
۱۳۴	۱
۱۳۵	۱
۱۳۶	۴
۱۳۷	۳
۱۳۸	۱
۱۳۹	۱
۱۴۰	۴
۱۴۱	۱
۱۴۲	۴
۱۴۳	۳
۱۴۴	۲

سؤال	پاسخ
۱۴۵	۲
۱۴۶	۲
۱۴۷	۲
۱۴۸	۱
۱۴۹	۳
۱۵۰	۲
۱۵۱	۳
۱۵۲	۲
۱۵۳	۳
۱۵۴	۴
۱۵۵	۴
۱۵۶	۳
۱۵۷	۱
۱۵۸	۲
۱۵۹	۴
۱۶۰	۱
۱۶۱	۱
۱۶۲	۳
۱۶۳	۴
۱۶۴	۲
۱۶۵	۱
۱۶۶	۲
۱۶۷	۲
۱۶۸	۳
۱۶۹	۳
۱۷۰	۴
۱۷۱	۳
۱۷۲	۱
۱۷۳	۲
۱۷۴	۳
۱۷۵	۳
۱۷۶	۲
۱۷۷	۳
۱۷۸	۱
۱۷۹	۴
۱۸۰	۱

سؤال	پاسخ
۱۸۱	۲
۱۸۲	۱
۱۸۳	۳
۱۸۴	۴
۱۸۵	۴
۱۸۶	۳
۱۸۷	۲
۱۸۸	۳
۱۸۹	۴
۱۹۰	۲
۱۹۱	۲
۱۹۲	۱
۱۹۳	۳
۱۹۴	۴
۱۹۵	۳
۱۹۶	۲
۱۹۷	۳
۱۹۸	۴
۱۹۹	۲
۲۰۰	۳
۲۰۱	۴
۲۰۲	۳
۲۰۳	۳
۲۰۴	۱
۲۰۵	۲
۲۰۶	۴
۲۰۷	۲
۲۰۸	۲
۲۰۹	۱
۲۱۰	۳
۲۱۱	۳
۲۱۲	۳
۲۱۳	۲
۲۱۴	۳
۲۱۵	۲
۲۱۶	۱

سؤال	پاسخ
۲۱۷	۳
۲۱۸	۲
۲۱۹	۴
۲۲۰	۳
۲۲۱	۱
۲۲۲	۲
۲۲۳	۳
۲۲۴	۱
۲۲۵	۴
۲۲۶	۴
۲۲۷	۲
۲۲۸	۲
۲۲۹	۲
۲۳۰	۱
۲۳۱	۱
۲۳۲	۳
۲۳۳	۱
۲۳۴	۱
۲۳۵	۴
۲۳۶	۲
۲۳۷	۳
۲۳۸	۳
۲۳۹	۳
۲۴۰	۴
۲۴۱	۱
۲۴۲	۱
۲۴۳	۱
۲۴۴	۲
۲۴۵	۲
۲۴۶	۲
۲۴۷	۴
۲۴۸	۳
۲۴۹	۳
۲۵۰	۴
۲۵۱	۳
۲۵۲	۳

سؤال	پاسخ
۲۵۳	۲
۲۵۴	۱
۲۵۵	۱
۲۵۶	۱
۲۵۷	۱
۲۵۸	۲
۲۵۹	۳
۲۶۰	۴
۲۶۱	۴
۲۶۲	۱
۲۶۳	۲
۲۶۴	۲
۲۶۵	۲
۲۶۶	۳
۲۶۷	۳
۲۶۸	۲
۲۶۹	۱
۲۷۰	۲
۲۷۱	۴
۲۷۲	۱
۲۷۳	۳
۲۷۴	۲
۲۷۵	۱
۲۷۶	۳
۲۷۷	۱
۲۷۸	۲
۲۷۹	۱
۲۸۰	۱
۲۸۱	۳
۲۸۲	۳
۲۸۳	۳
۲۸۴	۳
۲۸۵	۲
۲۸۶	۱
۲۸۷	۴
۲۸۸	۲

سؤال	پاسخ
۲۸۹	۳
۲۹۰	۱
۲۹۱	۳
۲۹۲	۳
۲۹۳	۳
۲۹۴	۲
۲۹۵	۱
۲۹۶	۳
۲۹۷	۴
۲۹۸	۱
۲۹۹	۴
۳۰۰	۲
۳۰۱	۴
۳۰۲	۱
۳۰۳	۳
۳۰۴	۱
۳۰۵	۱
۳۰۶	۱
۳۰۷	۳
۳۰۸	۲
۳۰۹	۱
۳۱۰	۳
۳۱۱	۴
۳۱۲	۴
۳۱۳	۳
۳۱۴	۱
۳۱۵	۲
۳۱۶	۴
۳۱۷	۱
۳۱۸	۴
۳۱۹	۱
۳۲۰	۴
۳۲۱	۴
۳۲۲	۳
۳۲۳	۳
۳۲۴	۲

سؤال	پاسخ
۳۲۵	۳
۳۲۶	۲
۳۲۷	۱
۳۲۸	۲
۳۲۹	۱
۳۳۰	۴
۳۳۱	۳
۳۳۲	۳
۳۳۳	۲
۳۳۴	۳

سؤال	پاسخ
۳۳۵	۲
۳۳۶	۱
۳۳۷	۴
۳۳۸	۱
۳۳۹	۱
۳۴۰	۱
۳۴۱	۴
۳۴۲	۲
۳۴۳	۱
۳۴۴	۴

سؤال	پاسخ
۳۴۵	۳
۳۴۶	۲
۳۴۷	۲
۳۴۸	۱
۳۴۹	۴
۳۵۰	۳
۳۵۱	۴
۳۵۲	۱
۳۵۳	۴
۳۵۴	۱

سؤال	پاسخ
۳۵۵	۴
۳۵۶	۲
۳۵۷	۲
۳۵۸	۲
۳۵۹	۲
۳۶۰	۴
۳۶۱	۳
۳۶۲	۱
۳۶۳	۳
۳۶۴	۱

سؤال	پاسخ
۳۶۵	۴
۳۶۶	۱
۳۶۷	۳
۳۶۸	۴
۳۶۹	۱
۳۷۰	۳
۳۷۱	۲
۳۷۲	۴
۳۷۳	۲
۳۷۴	۴

سؤال	پاسخ
۳۷۵	۴
۳۷۶	۱
۳۷۷	۲
۳۷۸	۱
۳۷۹	۲
۳۸۰	۲
۳۸۱	۱
۳۸۲	۱
۳۸۳	۴
۳۸۴	۳

سؤال	پاسخ
۳۸۵	۱
۳۸۶	۳
۳۸۷	۲
۳۸۸	۴
۳۸۹	۱
۳۹۰	۱
۳۹۱	۳
۳۹۲	۲
۳۹۳	۲
۳۹۴	۴

سؤال	پاسخ
۳۹۵	۲
۳۹۶	۱
۳۹۷	۱
۳۹۸	۴
۳۹۹	۴
۴۰۰	۲
۴۰۱	۴
۴۰۲	۳
۴۰۳	۲
۴۰۴	۱

سؤال	پاسخ
۴۰۵	۳
۴۰۶	۳
۴۰۷	۴

فصل چهاردهم: پاسخنامهٔ کلیدی

آزمون‌ها

سؤال	پاسخ
۱	۲
۲	۴
۳	۳
۴	۴
۵	۱
۶	۴
۷	۱
۸	۳
۹	۳
۱۰	۲
۱۱	۱
۱۲	۳
۱۳	۲
۱۴	۴
۱۵	۲
۱۶	۲
۱۷	۲
۱۸	۲
۱۹	۴
۲۰	۱
۲۱	۲
۲۲	۲
۲۳	۳
۲۴	۳

سؤال	پاسخ
۲۵	۱
۲۶	۳
۲۷	۱
۲۸	۱
۲۹	۱
۳۰	۳
۳۱	۳
۳۲	۱
۳۳	۳
۳۴	۳
۳۵	۴
۳۶	۴
۳۷	۳
۳۸	۱
۳۹	۴
۴۰	۲
۴۱	۴
۴۲	۳
۴۳	۲
۴۴	۲
۴۵	۱
۴۶	۱
۴۷	۲
۴۸	۴

سؤال	پاسخ
۴۹	۳
۵۰	۲
۵۱	۴
۵۲	۳
۵۳	۱
۵۴	۴
۵۵	۲
۵۶	۱
۵۷	۴
۵۸	۱
۵۹	۱
۶۰	۲
۶۱	۲
۶۲	۱
۶۳	۲
۶۴	۴
۶۵	۴
۶۶	۱
۶۷	۲
۶۸	۳
۶۹	۳
۷۰	۲
۷۱	۳
۷۲	۳

سؤال	پاسخ
۷۳	۲
۷۴	۱
۷۵	۲
۷۶	۳
۷۷	۲
۷۸	۲
۷۹	۲
۸۰	۲
۸۱	۴
۸۲	۳
۸۳	۳
۸۴	۲
۸۵	۱
۸۶	۳
۸۷	۳
۸۸	۴
۸۹	۲
۹۰	۳
۹۱	۱
۹۲	۳
۹۳	۳
۹۴	۳
۹۵	۳
۹۶	۱

سؤال	پاسخ
۹۷	۳
۹۸	۱
۹۹	۳
۱۰۰	۳
۱۰۱	۴
۱۰۲	۴
۱۰۳	۲
۱۰۴	۲
۱۰۵	۳
۱۰۶	۴
۱۰۷	۴
۱۰۸	۲
۱۰۹	۳
۱۱۰	۴
۱۱۱	۲
۱۱۲	۴
۱۱۳	۱
۱۱۴	۳
۱۱۵	۲
۱۱۶	۳
۱۱۷	۱
۱۱۸	۳
۱۱۹	۱
۱۲۰	۱

سؤال	پاسخ
۱۲۱	۴
۱۲۲	۴
۱۲۳	۱
۱۲۴	۳
۱۲۵	۱
۱۲۶	۱
۱۲۷	۲
۱۲۸	۲
۱۲۹	۴
۱۳۰	۴
۱۳۱	۱
۱۳۲	۱
۱۳۳	۱
۱۳۴	۴
۱۳۵	۱
۱۳۶	۴
۱۳۷	۲
۱۳۸	۲
۱۳۹	۳
۱۴۰	۲
۱۴۱	۴
۱۴۲	۲
۱۴۳	۲
۱۴۴	۴

سؤال	پاسخ
۱۴۵	۱
۱۴۶	۳
۱۴۷	۳
۱۴۸	۳
۱۴۹	۲
۱۵۰	۳
۱۵۱	۴
۱۵۲	۱
۱۵۳	۴
۱۵۴	۲
۱۵۵	۲
۱۵۶	۲
۱۵۷	۳
۱۵۸	۴
۱۵۹	۳
۱۶۰	۴
۱۶۱	۳
۱۶۲	۴
۱۶۳	۴
۱۶۴	۴
۱۶۵	۳
۱۶۶	۳
۱۶۷	۳
۱۶۸	۲

سؤال	پاسخ
۱۶۹	۴
۱۷۰	۳
۱۷۱	۳
۱۷۲	۱
۱۷۳	۲
۱۷۴	۱
۱۷۵	۲
۱۷۶	۲
۱۷۷	۴
۱۷۸	۳
۱۷۹	۲
۱۸۰	۳
۱۸۱	۱
۱۸۲	۳
۱۸۳	۲
۱۸۴	۱
۱۸۵	۳
۱۸۶	۲
۱۸۷	۲
۱۸۸	۳
۱۸۹	۲
۱۹۰	۴
۱۹۱	۳
۱۹۲	۱

سؤال	پاسخ
۱۹۳	۱
۱۹۴	۱
۱۹۵	۱
۱۹۶	۱
۱۹۷	۱
۱۹۸	۴
۱۹۹	۳
۲۰۰	۱
۲۰۱	۳
۲۰۲	۴
۲۰۳	۴
۲۰۴	۴
۲۰۵	۲
۲۰۶	۱
۲۰۷	۱
۲۰۸	۴
۲۰۹	۱
۲۱۰	۲
۲۱۱	۱
۲۱۲	۴
۲۱۳	۴
۲۱۴	۱
۲۱۵	۴
۲۱۶	۴

سؤال	پاسخ
۲۱۷	۳
۲۱۸	۴
۲۱۹	۴
۲۲۰	۳
۲۲۱	۳
۲۲۲	۳
۲۲۳	۴
۲۲۴	۱
۲۲۵	۴
۲۲۶	۱
۲۲۷	۲
۲۲۸	۴
۲۲۹	۳
۲۳۰	۱
۲۳۱	۳
۲۳۲	۳
۲۳۳	۱
۲۳۴	۲
۲۳۵	۳
۲۳۶	۲
۲۳۷	۳
۲۳۸	۴
۲۳۹	۱
۲۴۰	۲
۲۴۱	۲
۲۴۲	۲
۲۴۳	۲
۲۴۴	۱
۲۴۵	۱
۲۴۶	۴
۲۴۷	۱
۲۴۸	۲
۲۴۹	۲
۲۵۰	۱
۲۵۱	۴
۲۵۲	۳
۲۵۳	۳
۲۵۴	۳
۲۵۵	۲
۲۵۶	۳

سؤال	پاسخ
۲۵۷	۳
۲۵۸	۳
۲۵۹	۱
۲۶۰	۲
۲۶۱	۳
۲۶۲	۴
۲۶۳	۲
۲۶۴	۲
۲۶۵	۳
۲۶۶	۴
۲۶۷	۱
۲۶۸	۳
۲۶۹	۲
۲۷۰	۳
۲۷۱	۳
۲۷۲	۴
۲۷۳	۲
۲۷۴	۴
۲۷۵	۳
۲۷۶	۱
۲۷۷	۴
۲۷۸	۳
۲۷۹	۳
۲۸۰	۲
۲۸۱	۲
۲۸۲	۲
۲۸۳	۴
۲۸۴	۴
۲۸۵	۳
۲۸۶	۴
۲۸۷	۱
۲۸۸	۲
۲۸۹	۳
۲۹۰	۴
۲۹۱	۱
۲۹۲	۱
۲۹۳	۴
۲۹۴	۲
۲۹۵	۱
۲۹۶	۲

سؤال	پاسخ
۲۹۷	۲
۲۹۸	۳
۲۹۹	۱
۳۰۰	۱
۳۰۱	۲
۳۰۲	۴
۳۰۳	۴
۳۰۴	۲
۳۰۵	۳
۳۰۶	۳
۳۰۷	۲
۳۰۸	۱
۳۰۹	۲
۳۱۰	۲
۳۱۱	۲
۳۱۲	۲
۳۱۳	۴
۳۱۴	۲
۳۱۵	۲
۳۱۶	۳
۳۱۷	۳
۳۱۸	۱
۳۱۹	۴
۳۲۰	۳
۳۲۱	۱
۳۲۲	۴
۳۲۳	۱
۳۲۴	۱
۳۲۵	۱
۳۲۶	۱
۳۲۷	۲
۳۲۸	۳
۳۲۹	۳
۳۳۰	۴
۳۳۱	۲
۳۳۲	۳
۳۳۳	۱
۳۳۴	۱
۳۳۵	۳
۳۳۶	۴

سؤال	پاسخ
۳۳۷	۴
۳۳۸	۱
۳۳۹	۲
۳۴۰	۱
۳۴۱	۲
۳۴۲	۱
۳۴۳	۴
۳۴۴	۲
۳۴۵	۲
۳۴۶	۲
۳۴۷	۳
۳۴۸	۳
۳۴۹	۴
۳۵۰	۳
۳۵۱	۲
۳۵۲	۲
۳۵۳	۴
۳۵۴	۳
۳۵۵	۴
۳۵۶	۳
۳۵۷	۴
۳۵۸	۳
۳۵۹	۲
۳۶۰	۲
۳۶۱	۳
۳۶۲	۳
۳۶۳	۲
۳۶۴	۳
۳۶۵	۲
۳۶۶	۱
۳۶۷	۲
۳۶۸	۴
۳۶۹	۱
۳۷۰	۴
۳۷۱	۱
۳۷۲	۴
۳۷۳	۴
۳۷۴	۱
۳۷۵	۱
۳۷۶	۳

سؤال	پاسخ
۳۷۷	۲
۳۷۸	۲
۳۷۹	۲
۳۸۰	۱
۳۸۱	۲
۳۸۲	۴
۳۸۳	۱
۳۸۴	۲
۳۸۵	۲
۳۸۶	۱
۳۸۷	۱
۳۸۸	۲
۳۸۹	۴
۳۹۰	۳
۳۹۱	۴
۳۹۲	۴
۳۹۳	۴
۳۹۴	۴
۳۹۵	۱
۳۹۶	۳
۳۹۷	۱
۳۹۸	۱
۳۹۹	۳
۴۰۰	۱
۴۰۱	۱
۴۰۲	۱
۴۰۳	۲
۴۰۴	۳
۴۰۵	۳
۴۰۶	۱
۴۰۷	۴
۴۰۸	۳
۴۰۹	۱
۴۱۰	۲
۴۱۱	۲
۴۱۲	۳
۴۱۳	۴
۴۱۴	۳
۴۱۵	۳
۴۱۶	۴

سؤال	پاسخ
۴۱۷	۲
۴۱۸	۲
۴۱۹	۳
۴۲۰	۱
۴۲۱	۴
۴۲۲	۱
۴۲۳	۴
۴۲۴	۱
۴۲۵	۱
۴۲۶	۱
۴۲۷	۱
۴۲۸	۳
۴۲۹	۳
۴۳۰	۳
۴۳۱	۳
۴۳۲	۱
۴۳۳	۲
۴۳۴	۴
۴۳۵	۲
۴۳۶	۲
۴۳۷	۴
۴۳۸	۳
۴۳۹	۳
۴۴۰	۳
۴۴۱	۱
۴۴۲	۲
۴۴۳	۲
۴۴۴	۳
۴۴۵	۱
۴۴۶	۳
۴۴۷	۲
۴۴۸	۲
۴۴۹	۳
۴۵۰	۲
۴۵۱	۲
۴۵۲	۴
۴۵۳	۴
۴۵۴	۱
۴۵۵	۴
۴۵۶	۳

سؤال	پاسخ
۴۵۷	۳
۴۵۸	۲
۴۵۹	۱
۴۶۰	۳
۴۶۱	۱
۴۶۲	۲
۴۶۳	۱
۴۶۴	۳
۴۶۵	۴
۴۶۶	۲
۴۶۷	۱
۴۶۸	۳
۴۶۹	۴
۴۷۰	۴
۴۷۱	۱
۴۷۲	۲
۴۷۳	۴
۴۷۴	۲
۴۷۵	۳
۴۷۶	۴
۴۷۷	۱
۴۷۸	۲
۴۷۹	۲
۴۸۰	۴
۴۸۱	۳
۴۸۲	۱
۴۸۳	۴
۴۸۴	۱
۴۸۵	۴
۴۸۶	۱
۴۸۷	۴
۴۸۸	۴
۴۸۹	۳
۴۹۰	۱
۴۹۱	۲
۴۹۲	۲
۴۹۳	۲
۴۹۴	۲
۴۹۵	۴
۴۹۶	۲

سؤال	پاسخ
۴۹۷	۳
۴۹۸	۲
۴۹۹	۲
۵۰۰	۲
۵۰۱	۴
۵۰۲	۳
۵۰۳	۳
۵۰۴	۱
۵۰۵	۳
۵۰۶	۱
۵۰۷	۲
۵۰۸	۱
۵۰۹	۲
۵۱۰	۳
۵۱۱	۴
۵۱۲	۱
۵۱۳	۲
۵۱۴	۴
۵۱۵	۳
۵۱۶	۳
۵۱۷	۴
۵۱۸	۱
۵۱۹	۳
۵۲۰	۲
۵۲۱	۴
۵۲۲	۴
۵۲۳	۲
۵۲۴	۱
۵۲۵	۱
۵۲۶	۳
۵۲۷	۱
۵۲۸	۲
۵۲۹	۳
۵۳۰	۴
۵۳۱	۴
۵۳۲	۲
۵۳۳	۱
۵۳۴	۲
۵۳۵	۳
۵۳۶	۱

سؤال	پاسخ
۵۳۷	۲
۵۳۸	۱
۵۳۹	۲
۵۴۰	۴
۵۴۱	۱
۵۴۲	۲
۵۴۳	۲
۵۴۴	۱
۵۴۵	۲
۵۴۶	۲
۵۴۷	۳
۵۴۸	۲
۵۴۹	۴
۵۵۰	۳
۵۵۱	۲
۵۵۲	۴
۵۵۳	۱
۵۵۴	۳
۵۵۵	۲
۵۵۶	۳
۵۵۷	۱
۵۵۸	۱
۵۵۹	۴
۵۶۰	۱
۵۶۱	۱
۵۶۲	۳
۵۶۳	۲
۵۶۴	۳
۵۶۵	۱
۵۶۶	۲
۵۶۷	۲
۵۶۸	۳
۵۶۹	۳
۵۷۰	۴
۵۷۱	۲
۵۷۲	۴
۵۷۳	۲
۵۷۴	۴
۵۷۵	۳
۵۷۶	۲

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۵۷۷	۳	۶۱۷	۲	۶۵۷	۲	۶۹۷	۲	۷۳۷	۲	۷۷۷	۲	۸۱۷	۳	۸۵۷	۴
۵۷۸	۱	۶۱۸	۲	۶۵۸	۴	۶۹۸	۴	۷۳۸	۴	۷۷۸	۴	۸۱۸	۲	۸۵۸	۱
۵۷۹	۲	۶۱۹	۳	۶۵۹	۳	۶۹۹	۳	۷۳۹	۲	۷۷۹	۲	۸۱۹	۳	۸۵۹	۱
۵۸۰	۱	۶۲۰	۴	۶۶۰	۱	۷۰۰	۲	۷۴۰	۲	۷۸۰	۲	۸۲۰	۴	۸۶۰	۳
۵۸۱	۱	۶۲۱	۴	۶۶۱	۱	۷۰۱	۴	۷۴۱	۴	۷۸۱	۴	۸۲۱	۲	۸۶۱	۱
۵۸۲	۲	۶۲۲	۴	۶۶۲	۳	۷۰۲	۳	۷۴۲	۴	۷۸۲	۳	۸۲۲	۲	۸۶۲	۳
۵۸۳	۳	۶۲۳	۴	۶۶۳	۳	۷۰۳	۳	۷۴۳	۱	۷۸۳	۴	۸۲۳	۳	۸۶۳	۲
۵۸۴	۳	۶۲۴	۳	۶۶۴	۱	۷۰۴	۲	۷۴۴	۲	۷۸۴	۱	۸۲۴	۳	۸۶۴	۱
۵۸۵	۲	۶۲۵	۳	۶۶۵	۴	۷۰۵	۲	۷۴۵	۲	۷۸۵	۲	۸۲۵	۳	۸۶۵	۳
۵۸۶	۲	۶۲۶	۲	۶۶۶	۲	۷۰۶	۲	۷۴۶	۲	۷۸۶	۴	۸۲۶	۴	۸۶۶	۲
۵۸۷	۲	۶۲۷	۲	۶۶۷	۳	۷۰۷	۲	۷۴۷	۴	۷۸۷	۳	۸۲۷	۳	۸۶۷	۴
۵۸۸	۴	۶۲۸	۳	۶۶۸	۱	۷۰۸	۲	۷۴۸	۱	۷۸۸	۴	۸۲۸	۲	۸۶۸	۱
۵۸۹	۲	۶۲۹	۱	۶۶۹	۲	۷۰۹	۴	۷۴۹	۱	۷۸۹	۱	۸۲۹	۴	۸۶۹	۳
۵۹۰	۳	۶۳۰	۱	۶۷۰	۲	۷۱۰	۳	۷۵۰	۴	۷۹۰	۲	۸۳۰	۱	۸۷۰	۳
۵۹۱	۲	۶۳۱	۳	۶۷۱	۳	۷۱۱	۱	۷۵۱	۱	۷۹۱	۴	۸۳۱	۳	۸۷۱	۱
۵۹۲	۴	۶۳۲	۲	۶۷۲	۱	۷۱۲	۳	۷۵۲	۳	۷۹۲	۲	۸۳۲	۳	۸۷۲	۴
۵۹۳	۱	۶۳۳	۴	۶۷۳	۳	۷۱۳	۳	۷۵۳	۴	۷۹۳	۳	۸۳۳	۴	۸۷۳	۳
۵۹۴	۱	۶۳۴	۳	۶۷۴	۳	۷۱۴	۱	۷۵۴	۳	۷۹۴	۳	۸۳۴	۳	۸۷۴	۱
۵۹۵	۱	۶۳۵	۱	۶۷۵	۲	۷۱۵	۳	۷۵۵	۱	۷۹۵	۴	۸۳۵	۱	۸۷۵	۴
۵۹۶	۱	۶۳۶	۱	۶۷۶	۳	۷۱۶	۳	۷۵۶	۴	۷۹۶	۴	۸۳۶	۱	۸۷۶	۳
۵۹۷	۲	۶۳۷	۲	۶۷۷	۳	۷۱۷	۲	۷۵۷	۳	۷۹۷	۱	۸۳۷	۲	۸۷۷	۳
۵۹۸	۱	۶۳۸	۴	۶۷۸	۱	۷۱۸	۱	۷۵۸	۲	۷۹۸	۴	۸۳۸	۴	۸۷۸	۱
۵۹۹	۲	۶۳۹	۳	۶۷۹	۴	۷۱۹	۳	۷۵۹	۱	۷۹۹	۳	۸۳۹	۳	۸۷۹	۲
۶۰۰	۱	۶۴۰	۲	۶۸۰	۲	۷۲۰	۱	۷۶۰	۳	۸۰۰	۲	۸۴۰	۳	۸۸۰	۳
۶۰۱	۱	۶۴۱	۱	۶۸۱	۳	۷۲۱	۴	۷۶۱	۳	۸۰۱	۳	۸۴۱	۱	۸۸۱	۴
۶۰۲	۲	۶۴۲	۲	۶۸۲	۲	۷۲۲	۱	۷۶۲	۴	۸۰۲	۱	۸۴۲	۱	۸۸۲	۲
۶۰۳	۲	۶۴۳	۲	۶۸۳	۱	۷۲۳	۳	۷۶۳	۲	۸۰۳	۴	۸۴۳	۱	۸۸۳	۱
۶۰۴	۴	۶۴۴	۱	۶۸۴	۲	۷۲۴	۴	۷۶۴	۱	۸۰۴	۱	۸۴۴	۲	۸۸۴	۲
۶۰۵	۳	۶۴۵	۴	۶۸۵	۳	۷۲۵	۱	۷۶۵	۳	۸۰۵	۴	۸۴۵	۳	۸۸۵	۲
۶۰۶	۳	۶۴۶	۲	۶۸۶	۲	۷۲۶	۴	۷۶۶	۴	۸۰۶	۱	۸۴۶	۲	۸۸۶	۳
۶۰۷	۱	۶۴۷	۱	۶۸۷	۲	۷۲۷	۲	۷۶۷	۳	۸۰۷	۱	۸۴۷	۳	۸۸۷	۱
۶۰۸	۳	۶۴۸	۱	۶۸۸	۳	۷۲۸	۳	۷۶۸	۲	۸۰۸	۱	۸۴۸	۳	۸۸۸	۲
۶۰۹	۴	۶۴۹	۱	۶۸۹	۳	۷۲۹	۱	۷۶۹	۱	۸۰۹	۳	۸۴۹	۱	۸۸۹	۳
۶۱۰	۴	۶۵۰	۳	۶۹۰	۳	۷۳۰	۱	۷۷۰	۴	۸۱۰	۳	۸۵۰	۲	۸۹۰	۲
۶۱۱	۲	۶۵۱	۱	۶۹۱	۱	۷۳۱	۲	۷۷۱	۱	۸۱۱	۳	۸۵۱	۱	۸۹۱	۲
۶۱۲	۴	۶۵۲	۴	۶۹۲	۳	۷۳۲	۳	۷۷۲	۱	۸۱۲	۱	۸۵۲	۲	۸۹۲	۲
۶۱۳	۱	۶۵۳	۳	۶۹۳	۳	۷۳۳	۳	۷۷۳	۳	۸۱۳	۱	۸۵۳	۱	۸۹۳	۳
۶۱۴	۴	۶۵۴	۱	۶۹۴	۱	۷۳۴	۲	۷۷۴	۲	۸۱۴	۱	۸۵۴	۳	۸۹۴	۱
۶۱۵	۱	۶۵۵	۴	۶۹۵	۲	۷۳۵	۳	۷۷۵	۳	۸۱۵	۱	۸۵۵	۱	۸۹۵	۳
۶۱۶	۱	۶۵۶	۲	۶۹۶	۲	۷۳۶	۲	۷۷۶	۲	۸۱۶	۲	۸۵۶	۳	۸۹۶	۴

سؤال	پاسخ
۸۹۷	۱
۸۹۸	۱
۸۹۹	۲
۹۰۰	۱
۹۰۱	۱
۹۰۲	۴
۹۰۳	۳
۹۰۴	۳
۹۰۵	۴
۹۰۶	۴
۹۰۷	۲
۹۰۸	۱
۹۰۹	۳
۹۱۰	۴
۹۱۱	۳
۹۱۲	۳
۹۱۳	۱
۹۱۴	۱
۹۱۵	۳
۹۱۶	۲
۹۱۷	۳
۹۱۸	۴
۹۱۹	۳
۹۲۰	۴
۹۲۱	۲
۹۲۲	۳
۹۲۳	۴
۹۲۴	۲
۹۲۵	۲
۹۲۶	۳
۹۲۷	۲
۹۲۸	۱
۹۲۹	۱
۹۳۰	۱
۹۳۱	۲
۹۳۲	۳
۹۳۳	۴
۹۳۴	۳
۹۳۵	۴
۹۳۶	۱

سؤال	پاسخ
۹۳۷	۱
۹۳۸	۳
۹۳۹	۴
۹۴۰	۱
۹۴۱	۳
۹۴۲	۱
۹۴۳	۱
۹۴۴	۳
۹۴۵	۱
۹۴۶	۳
۹۴۷	۴
۹۴۸	۲
۹۴۹	۳
۹۵۰	۳
۹۵۱	۴
۹۵۲	۲
۹۵۳	۳
۹۵۴	۲
۹۵۵	۲
۹۵۶	۲
۹۵۷	۲
۹۵۸	۴
۹۵۹	۲
۹۶۰	۱
۹۶۱	۱
۹۶۲	۱
۹۶۳	۱
۹۶۴	۲
۹۶۵	۴
۹۶۶	۱
۹۶۷	۳
۹۶۸	۳
۹۶۹	۳
۹۷۰	۲
۹۷۱	۳
۹۷۲	۴
۹۷۳	۴
۹۷۴	۴
۹۷۵	۲
۹۷۶	۱

سؤال	پاسخ
۹۷۷	۲
۹۷۸	۴
۹۷۹	۳
۹۸۰	۴
۹۸۱	۳
۹۸۲	۲
۹۸۳	۲
۹۸۴	۲
۹۸۵	۳
۹۸۶	۴
۹۸۷	۲
۹۸۸	۴
۹۸۹	۱
۹۹۰	۲
۹۹۱	۴
۹۹۲	۳
۹۹۳	۲
۹۹۴	۴
۹۹۵	۱
۹۹۶	۴
۹۹۷	۳
۹۹۸	۴
۹۹۹	۲
۱۰۰۰	۱
۱۰۰۱	۴
۱۰۰۲	۲
۱۰۰۳	۳
۱۰۰۴	۴
۱۰۰۵	۳
۱۰۰۶	۲
۱۰۰۷	۱
۱۰۰۸	۲
۱۰۰۹	۴
۱۰۱۰	۱
۱۰۱۱	۳
۱۰۱۲	۱
۱۰۱۳	۳
۱۰۱۴	۲
۱۰۱۵	۳
۱۰۱۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۰۱۷	۳
۱۰۱۸	۴
۱۰۱۹	۱
۱۰۲۰	۳
۱۰۲۱	۱
۱۰۲۲	۴
۱۰۲۳	۴
۱۰۲۴	۳
۱۰۲۵	۳
۱۰۲۶	۴
۱۰۲۷	۴
۱۰۲۸	۱
۱۰۲۹	۲
۱۰۳۰	۳
۱۰۳۱	۲
۱۰۳۲	۴
۱۰۳۳	۳
۱۰۳۴	۳
۱۰۳۵	۲
۱۰۳۶	۴
۱۰۳۷	۳
۱۰۳۸	۳
۱۰۳۹	۲
۱۰۴۰	۳
۱۰۴۱	۱
۱۰۴۲	۱
۱۰۴۳	۲
۱۰۴۴	۴
۱۰۴۵	۳
۱۰۴۶	۴
۱۰۴۷	۱
۱۰۴۸	۲
۱۰۴۹	۴
۱۰۵۰	۴
۱۰۵۱	۱
۱۰۵۲	۱
۱۰۵۳	۳
۱۰۵۴	۱
۱۰۵۵	۲
۱۰۵۶	۳

سؤال	پاسخ
۱۰۵۷	۲
۱۰۵۸	۱
۱۰۵۹	۴
۱۰۶۰	۱
۱۰۶۱	۲
۱۰۶۲	۲
۱۰۶۳	۴
۱۰۶۴	۱
۱۰۶۵	۱
۱۰۶۶	۲
۱۰۶۷	۴
۱۰۶۸	۴
۱۰۶۹	۴
۱۰۷۰	۳
۱۰۷۱	۴
۱۰۷۲	۲
۱۰۷۳	۲
۱۰۷۴	۳
۱۰۷۵	۴
۱۰۷۶	۲
۱۰۷۷	۴
۱۰۷۸	۱
۱۰۷۹	۳
۱۰۸۰	۲
۱۰۸۱	۱
۱۰۸۲	۴
۱۰۸۳	۳
۱۰۸۴	۱
۱۰۸۵	۲
۱۰۸۶	۲
۱۰۸۷	۴
۱۰۸۸	۱
۱۰۸۹	۴
۱۰۹۰	۱
۱۰۹۱	۲
۱۰۹۲	۲
۱۰۹۳	۳
۱۰۹۴	۲
۱۰۹۵	۴
۱۰۹۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۰۹۷	۳
۱۰۹۸	۳
۱۰۹۹	۴
۱۱۰۰	۳
۱۱۰۱	۱
۱۱۰۲	۳
۱۱۰۳	۲
۱۱۰۴	۴
۱۱۰۵	۱
۱۱۰۶	۴
۱۱۰۷	۳
۱۱۰۸	۳
۱۱۰۹	۲
۱۱۱۰	۳
۱۱۱۱	۲
۱۱۱۲	۳
۱۱۱۳	۴
۱۱۱۴	۲
۱۱۱۵	۳
۱۱۱۶	۲
۱۱۱۷	۲
۱۱۱۸	۱
۱۱۱۹	۲
۱۱۲۰	۳
۱۱۲۱	۲
۱۱۲۲	۲
۱۱۲۳	۳
۱۱۲۴	۳
۱۱۲۵	۲
۱۱۲۶	۴
۱۱۲۷	۳
۱۱۲۸	۱
۱۱۲۹	۳
۱۱۳۰	۲
۱۱۳۱	۲
۱۱۳۲	۲
۱۱۳۳	۳
۱۱۳۴	۳
۱۱۳۵	۴
۱۱۳۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۱۳۷	۱
۱۱۳۸	۲
۱۱۳۹	۳
۱۱۴۰	۲
۱۱۴۱	۱
۱۱۴۲	۲
۱۱۴۳	۱
۱۱۴۴	۱
۱۱۴۵	۲
۱۱۴۶	۴
۱۱۴۷	۱
۱۱۴۸	۲
۱۱۴۹	۲
۱۱۵۰	۳
۱۱۵۱	۲
۱۱۵۲	۳
۱۱۵۳	۳
۱۱۵۴	۳
۱۱۵۵	۳
۱۱۵۶	۴
۱۱۵۷	۲
۱۱۵۸	۴
۱۱۵۹	۴
۱۱۶۰	۲
۱۱۶۱	۲
۱۱۶۲	۲
۱۱۶۳	۳
۱۱۶۴	۴
۱۱۶۵	۳
۱۱۶۶	۱
۱۱۶۷	۳
۱۱۶۸	۲
۱۱۶۹	۲
۱۱۷۰	۳
۱۱۷۱	۲
۱۱۷۲	۱
۱۱۷۳	۳
۱۱۷۴	۱
۱۱۷۵	۴
۱۱۷۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۱۷۷	۳
۱۱۷۸	۱
۱۱۷۹	۴
۱۱۸۰	۲
۱۱۸۱	۱
۱۱۸۲	۳
۱۱۸۳	۳
۱۱۸۴	۴
۱۱۸۵	۲
۱۱۸۶	۱
۱۱۸۷	۳
۱۱۸۸	۱
۱۱۸۹	۳
۱۱۹۰	۳
۱۱۹۱	۳
۱۱۹۲	۱
۱۱۹۳	۴
۱۱۹۴	۲
۱۱۹۵	۴
۱۱۹۶	۱
۱۱۹۷	۱
۱۱۹۸	۲
۱۱۹۹	۲
۱۲۰۰	۴
۱۲۰۱	۴
۱۲۰۲	۴
۱۲۰۳	۴
۱۲۰۴	۱
۱۲۰۵	۴
۱۲۰۶	۲
۱۲۰۷	۲
۱۲۰۸	۳
۱۲۰۹	۴
۱۲۱۰	۱
۱۲۱۱	۴
۱۲۱۲	۲
۱۲۱۳	۱
۱۲۱۴	۲
۱۲۱۵	۳
۱۲۱۶	۳

سؤال	پاسخ
۱۲۱۷	۴
۱۲۱۸	۴
۱۲۱۹	۱
۱۲۲۰	۳
۱۲۲۱	۴
۱۲۲۲	۴
۱۲۲۳	۳
۱۲۲۴	۲
۱۲۲۵	۲
۱۲۲۶	۳
۱۲۲۷	۴
۱۲۲۸	۲
۱۲۲۹	۲
۱۲۳۰	۱
۱۲۳۱	۳
۱۲۳۲	۱
۱۲۳۳	۴
۱۲۳۴	۴
۱۲۳۵	۳
۱۲۳۶	۴
۱۲۳۷	۳
۱۲۳۸	۱
۱۲۳۹	۱
۱۲۴۰	۲
۱۲۴۱	۱
۱۲۴۲	۳
۱۲۴۳	۴
۱۲۴۴	۳
۱۲۴۵	۳
۱۲۴۶	۴
۱۲۴۷	۳
۱۲۴۸	۴
۱۲۴۹	۴
۱۲۵۰	۲
۱۲۵۱	۱
۱۲۵۲	۱
۱۲۵۳	۲
۱۲۵۴	۴
۱۲۵۵	۴
۱۲۵۶	۲

سؤال	پاسخ
۱۲۵۷	۱
۱۲۵۸	۳
۱۲۵۹	۳
۱۲۶۰	۳
۱۲۶۱	۲
۱۲۶۲	۴
۱۲۶۳	۳
۱۲۶۴	۱
۱۲۶۵	۳
۱۲۶۶	۳
۱۲۶۷	۳
۱۲۶۸	۴
۱۲۶۹	۴
۱۲۷۰	۳
۱۲۷۱	۲
۱۲۷۲	۱
۱۲۷۳	۲
۱۲۷۴	۳
۱۲۷۵	۱
۱۲۷۶	۴
۱۲۷۷	۳
۱۲۷۸	۱
۱۲۷۹	۲
۱۲۸۰	۴
۱۲۸۱	۲
۱۲۸۲	۳
۱۲۸۳	۲
۱۲۸۴	۳
۱۲۸۵	۴
۱۲۸۶	۴
۱۲۸۷	۴
۱۲۸۸	۱
۱۲۸۹	۴
۱۲۹۰	۲
۱۲۹۱	۳
۱۲۹۲	۴
۱۲۹۳	۴
۱۲۹۴	۱
۱۲۹۵	۴
۱۲۹۶	۲

سؤال	پاسخ
۱۲۹۷	۴
۱۲۹۸	۴
۱۲۹۹	۳
۱۳۰۰	۳
۱۳۰۱	۴
۱۳۰۲	۲
۱۳۰۳	۳
۱۳۰۴	۲
۱۳۰۵	۲
۱۳۰۶	۱
۱۳۰۷	۱
۱۳۰۸	۳
۱۳۰۹	۴
۱۳۱۰	۲
۱۳۱۱	۲
۱۳۱۲	۳
۱۳۱۳	۴
۱۳۱۴	۴
۱۳۱۵	۴
۱۳۱۶	۴
۱۳۱۷	۴
۱۳۱۸	۴
۱۳۱۹	۳
۱۳۲۰	۳
۱۳۲۱	۲
۱۳۲۲	۱
۱۳۲۳	۴
۱۳۲۴	۱
۱۳۲۵	۱
۱۳۲۶	۱
۱۳۲۷	۴
۱۳۲۸	۳
۱۳۲۹	۳
۱۳۳۰	۲
۱۳۳۱	۳
۱۳۳۲	۳
۱۳۳۳	۲
۱۳۳۴	۳
۱۳۳۵	۳
۱۳۳۶	۳

سؤال	پاسخ
۱۳۳۷	۳
۱۳۳۸	۳
۱۳۳۹	۴
۱۳۴۰	۳
۱۳۴۱	۱
۱۳۴۲	۲
۱۳۴۳	۱
۱۳۴۴	۱
۱۳۴۵	۱
۱۳۴۶	۴
۱۳۴۷	۱
۱۳۴۸	۲
۱۳۴۹	۱
۱۳۵۰	۲
۱۳۵۱	۳
۱۳۵۲	۳
۱۳۵۳	۳
۱۳۵۴	۴
۱۳۵۵	۳
۱۳۵۶	۲
۱۳۵۷	۲
۱۳۵۸	۴
۱۳۵۹	۴
۱۳۶۰	۱
۱۳۶۱	۱
۱۳۶۲	۲
۱۳۶۳	۴
۱۳۶۴	۳
۱۳۶۵	۲
۱۳۶۶	۱
۱۳۶۷	۴
۱۳۶۸	۳
۱۳۶۹	۲
۱۳۷۰	۱
۱۳۷۱	۱
۱۳۷۲	۲
۱۳۷۳	۳
۱۳۷۴	۴
۱۳۷۵	۲
۱۳۷۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۳۷۷	۴
۱۳۷۸	۴
۱۳۷۹	۱
۱۳۸۰	۱
۱۳۸۱	۴
۱۳۸۲	۲
۱۳۸۳	۳
۱۳۸۴	۴
۱۳۸۵	۲
۱۳۸۶	۲
۱۳۸۷	۲
۱۳۸۸	۲
۱۳۸۹	۳
۱۳۹۰	۴
۱۳۹۱	۱
۱۳۹۲	۱
۱۳۹۳	۴
۱۳۹۴	۴
۱۳۹۵	۲
۱۳۹۶	۲
۱۳۹۷	۳
۱۳۹۸	۱
۱۳۹۹	۳
۱۴۰۰	۲
۱۴۰۱	۲
۱۴۰۲	۱
۱۴۰۳	۴
۱۴۰۴	۱
۱۴۰۵	۱
۱۴۰۶	۲
۱۴۰۷	۳
۱۴۰۸	۴
۱۴۰۹	۲
۱۴۱۰	۲
۱۴۱۱	۱
۱۴۱۲	۲
۱۴۱۳	۲
۱۴۱۴	۱
۱۴۱۵	۳
۱۴۱۶	۲

سؤال	پاسخ
۱۴۱۷	۴
۱۴۱۸	۳
۱۴۱۹	۲
۱۴۲۰	۳
۱۴۲۱	۱
۱۴۲۲	۴
۱۴۲۳	۲
۱۴۲۴	۴
۱۴۲۵	۳
۱۴۲۶	۳
۱۴۲۷	۱
۱۴۲۸	۳
۱۴۲۹	۲
۱۴۳۰	۲
۱۴۳۱	۱
۱۴۳۲	۳
۱۴۳۳	۱
۱۴۳۴	۱
۱۴۳۵	۳
۱۴۳۶	۲
۱۴۳۷	۳
۱۴۳۸	۳
۱۴۳۹	۱
۱۴۴۰	۱
۱۴۴۱	۴
۱۴۴۲	۱
۱۴۴۳	۴
۱۴۴۴	۴
۱۴۴۵	۴
۱۴۴۶	۲
۱۴۴۷	۱
۱۴۴۸	۴
۱۴۴۹	۲
۱۴۵۰	۴
۱۴۵۱	۴
۱۴۵۲	۴
۱۴۵۳	۲
۱۴۵۴	۳
۱۴۵۵	۳
۱۴۵۶	۲

سؤال	پاسخ
۱۴۵۷	۲
۱۴۵۸	۳
۱۴۵۹	۱
۱۴۶۰	۱
۱۴۶۱	۲
۱۴۶۲	۱
۱۴۶۳	۱
۱۴۶۴	۴
۱۴۶۵	۲
۱۴۶۶	۴
۱۴۶۷	۴
۱۴۶۸	۱
۱۴۶۹	۳
۱۴۷۰	۲
۱۴۷۱	۳
۱۴۷۲	۲
۱۴۷۳	۱
۱۴۷۴	۴
۱۴۷۵	۲
۱۴۷۶	۲
۱۴۷۷	۲
۱۴۷۸	۳
۱۴۷۹	۳
۱۴۸۰	۱
۱۴۸۱	۲
۱۴۸۲	۴
۱۴۸۳	۳
۱۴۸۴	۲
۱۴۸۵	۲
۱۴۸۶	۳
۱۴۸۷	۴
۱۴۸۸	۲
۱۴۸۹	۱
۱۴۹۰	۴
۱۴۹۱	۲
۱۴۹۲	۲
۱۴۹۳	۳
۱۴۹۴	۳
۱۴۹۵	۲
۱۴۹۶	۲

سؤال	پاسخ
۱۴۹۷	۲
۱۴۹۸	۴
۱۴۹۹	۴
۱۵۰۰	۴
۱۵۰۱	۴
۱۵۰۲	۲
۱۵۰۳	۱
۱۵۰۴	۱
۱۵۰۵	۴
۱۵۰۶	۱
۱۵۰۷	۳
۱۵۰۸	۳
۱۵۰۹	۱
۱۵۱۰	۲
۱۵۱۱	۳
۱۵۱۲	۳
۱۵۱۳	۳
۱۵۱۴	۱
۱۵۱۵	۲
۱۵۱۶	۳
۱۵۱۷	۱
۱۵۱۸	۲
۱۵۱۹	۲
۱۵۲۰	۳
۱۵۲۱	۴
۱۵۲۲	۴
۱۵۲۳	۳
۱۵۲۴	۱
۱۵۲۵	۴
۱۵۲۶	۲
۱۵۲۷	۱
۱۵۲۸	۳
۱۵۲۹	۴
۱۵۳۰	۱
۱۵۳۱	۲
۱۵۳۲	۳
۱۵۳۳	۳
۱۵۳۴	۳
۱۵۳۵	۳
۱۵۳۶	۱

سؤال	پاسخ
۱۵۳۷	۲
۱۵۳۸	۲
۱۵۳۹	۳
۱۵۴۰	۱
۱۵۴۱	۳
۱۵۴۲	۲
۱۵۴۳	۲
۱۵۴۴	۱
۱۵۴۵	۲
۱۵۴۶	۲
۱۵۴۷	۳
۱۵۴۸	۲
۱۵۴۹	۴
۱۵۵۰	۲
۱۵۵۱	۳
۱۵۵۲	۱
۱۵۵۳	۲
۱۵۵۴	۳
۱۵۵۵	۳
۱۵۵۶	۲
۱۵۵۷	۱
۱۵۵۸	۱
۱۵۵۹	۴
۱۵۶۰	۳
۱۵۶۱	۳
۱۵۶۲	۳
۱۵۶۳	۴
۱۵۶۴	۱
۱۵۶۵	۲
۱۵۶۶	۱
۱۵۶۷	۱
۱۵۶۸	۳
۱۵۶۹	۴
۱۵۷۰	۳
۱۵۷۱	۴
۱۵۷۲	۲
۱۵۷۳	۱
۱۵۷۴	۳
۱۵۷۵	۴
۱۵۷۶	۱

سؤال	پاسخ
۱۵۷۷	۴
۱۵۷۸	۳
۱۵۷۹	۳
۱۵۸۰	۳
۱۵۸۱	۱
۱۵۸۲	۲
۱۵۸۳	۴
۱۵۸۴	۴
۱۵۸۵	۱
۱۵۸۶	۲
۱۵۸۷	۴
۱۵۸۸	۴
۱۵۸۹	۲
۱۵۹۰	۲
۱۵۹۱	۳
۱۵۹۲	۲
۱۵۹۳	۲
۱۵۹۴	۱
۱۵۹۵	۲
۱۵۹۶	۳
۱۵۹۷	۲
۱۵۹۸	۱
۱۵۹۹	۱
۱۶۰۰	۴
۱۶۰۱	۲
۱۶۰۲	۴
۱۶۰۳	۱
۱۶۰۴	۱
۱۶۰۵	۳
۱۶۰۶	۳
۱۶۰۷	۴
۱۶۰۸	۱
۱۶۰۹	۱
۱۶۱۰	۳
۱۶۱۱	۲
۱۶۱۲	۴
۱۶۱۳	۱
۱۶۱۴	۱
۱۶۱۵	۳
۱۶۱۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۶۱۷	۲
۱۶۱۸	۴
۱۶۱۹	۱
۱۶۲۰	۳
۱۶۲۱	۱
۱۶۲۲	۲
۱۶۲۳	۲
۱۶۲۴	۲
۱۶۲۵	۴
۱۶۲۶	۴
۱۶۲۷	۱
۱۶۲۸	۴
۱۶۲۹	۳
۱۶۳۰	۳
۱۶۳۱	۲
۱۶۳۲	۳
۱۶۳۳	۱
۱۶۳۴	۱
۱۶۳۵	۲
۱۶۳۶	۴
۱۶۳۷	۳
۱۶۳۸	۲
۱۶۳۹	۴
۱۶۴۰	۳
۱۶۴۱	۴
۱۶۴۲	۲
۱۶۴۳	۱
۱۶۴۴	۳
۱۶۴۵	۳
۱۶۴۶	۱
۱۶۴۷	۳
۱۶۴۸	۱
۱۶۴۹	۲
۱۶۵۰	۲
۱۶۵۱	۴
۱۶۵۲	۴
۱۶۵۳	۴
۱۶۵۴	۳
۱۶۵۵	۳
۱۶۵۶	۲

سؤال	پاسخ
۱۶۵۷	۳
۱۶۵۸	۴
۱۶۵۹	۱
۱۶۶۰	۱
۱۶۶۱	۱
۱۶۶۲	۲
۱۶۶۳	۱
۱۶۶۴	۴
۱۶۶۵	۲
۱۶۶۶	۱
۱۶۶۷	۳
۱۶۶۸	۲
۱۶۶۹	۴
۱۶۷۰	۲
۱۶۷۱	۴
۱۶۷۲	۲
۱۶۷۳	۳
۱۶۷۴	۴
۱۶۷۵	۲
۱۶۷۶	۲
۱۶۷۷	۱
۱۶۷۸	۳
۱۶۷۹	۱
۱۶۸۰	۲
۱۶۸۱	۳
۱۶۸۲	۴
۱۶۸۳	۱
۱۶۸۴	۴
۱۶۸۵	۱
۱۶۸۶	۳
۱۶۸۷	۱
۱۶۸۸	۳
۱۶۸۹	۳
۱۶۹۰	۴
۱۶۹۱	۳
۱۶۹۲	۳
۱۶۹۳	۴
۱۶۹۴	۴
۱۶۹۵	۱
۱۶۹۶	۲

سؤال	پاسخ
۱۶۹۷	۱
۱۶۹۸	۴
۱۶۹۹	۳
۱۷۰۰	۳
۱۷۰۱	۴
۱۷۰۲	۲
۱۷۰۳	۲
۱۷۰۴	۳
۱۷۰۵	۳
۱۷۰۶	۱
۱۷۰۷	۳
۱۷۰۸	۲
۱۷۰۹	۴
۱۷۱۰	۴
۱۷۱۱	۳
۱۷۱۲	۴
۱۷۱۳	۲
۱۷۱۴	۱
۱۷۱۵	۴
۱۷۱۶	۱
۱۷۱۷	۳
۱۷۱۸	۳
۱۷۱۹	۱
۱۷۲۰	۳
۱۷۲۱	۴
۱۷۲۲	۱
۱۷۲۳	۲
۱۷۲۴	۱
۱۷۲۵	۴
۱۷۲۶	۳
۱۷۲۷	۱
۱۷۲۸	۲
۱۷۲۹	۱
۱۷۳۰	۳
۱۷۳۱	۳
۱۷۳۲	۲
۱۷۳۳	۴
۱۷۳۴	۴
۱۷۳۵	۴
۱۷۳۶	۱

سؤال	پاسخ
۱۷۳۷	۱
۱۷۳۸	۲
۱۷۳۹	۲
۱۷۴۰	۳
۱۷۴۱	۲
۱۷۴۲	۲
۱۷۴۳	۴
۱۷۴۴	۳
۱۷۴۵	۴
۱۷۴۶	۱
۱۷۴۷	۲
۱۷۴۸	۳
۱۷۴۹	۳
۱۷۵۰	۳
۱۷۵۱	۳
۱۷۵۲	۳
۱۷۵۳	۲
۱۷۵۴	۱
۱۷۵۵	۴
۱۷۵۶	۴
۱۷۵۷	۳
۱۷۵۸	۲
۱۷۵۹	۱
۱۷۶۰	۱
۱۷۶۱	۳
۱۷۶۲	۳
۱۷۶۳	۳
۱۷۶۴	۲
۱۷۶۵	۲
۱۷۶۶	۳
۱۷۶۷	۲
۱۷۶۸	۲
۱۷۶۹	۴
۱۷۷۰	۳
۱۷۷۱	۳
۱۷۷۲	۲
۱۷۷۳	۴
۱۷۷۴	۲
۱۷۷۵	۲
۱۷۷۶	۲

سؤال	پاسخ
۱۷۷۷	۴
۱۷۷۸	۲
۱۷۷۹	۴
۱۷۸۰	۲
۱۷۸۱	۴
۱۷۸۲	۲
۱۷۸۳	۱
۱۷۸۴	۴
۱۷۸۵	۳
۱۷۸۶	۲
۱۷۸۷	۲
۱۷۸۸	۳
۱۷۸۹	۳
۱۷۹۰	۳
۱۷۹۱	۱
۱۷۹۲	۲
۱۷۹۳	۱
۱۷۹۴	۳
۱۷۹۵	۲
۱۷۹۶	۳
۱۷۹۷	۱
۱۷۹۸	۲
۱۷۹۹	۱
۱۸۰۰	۴
۱۸۰۱	۲
۱۸۰۲	۳
۱۸۰۳	۲
۱۸۰۴	۴
۱۸۰۵	۳
۱۸۰۶	۳
۱۸۰۷	۲
۱۸۰۸	۱
۱۸۰۹	۲
۱۸۱۰	۳
۱۸۱۱	۴
۱۸۱۲	۱
۱۸۱۳	۲
۱۸۱۴	۴
۱۸۱۵	۱
۱۸۱۶	۲

سؤال	پاسخ
۱۸۱۷	۴
۱۸۱۸	۳
۱۸۱۹	۱
۱۸۲۰	۱
۱۸۲۱	۳
۱۸۲۲	۳
۱۸۲۳	۳
۱۸۲۴	۱
۱۸۲۵	۳
۱۸۲۶	۱
۱۸۲۷	۳
۱۸۲۸	۲
۱۸۲۹	۱
۱۸۳۰	۳
۱۸۳۱	۱
۱۸۳۲	۳
۱۸۳۳	۴
۱۸۳۴	۱
۱۸۳۵	۴
۱۸۳۶	۲
۱۸۳۷	۳
۱۸۳۸	۴
۱۸۳۹	۲
۱۸۴۰	۲
۱۸۴۱	۳
۱۸۴۲	۳
۱۸۴۳	۲
۱۸۴۴	۱
۱۸۴۵	۱
۱۸۴۶	۲
۱۸۴۷	۴
۱۸۴۸	۲
۱۸۴۹	۲
۱۸۵۰	۱
۱۸۵۱	۲
۱۸۵۲	۲
۱۸۵۳	۴
۱۸۵۴	۳
۱۸۵۵	۳
۱۸۵۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۸۵۷	۴
۱۸۵۸	۳
۱۸۵۹	۳
۱۸۶۰	۴
۱۸۶۱	۴
۱۸۶۲	۱
۱۸۶۳	۳
۱۸۶۴	۴
۱۸۶۵	۱
۱۸۶۶	۳
۱۸۶۷	۲
۱۸۶۸	۳
۱۸۶۹	۱
۱۸۷۰	۳
۱۸۷۱	۴
۱۸۷۲	۴
۱۸۷۳	۲
۱۸۷۴	۴
۱۸۷۵	۲
۱۸۷۶	۴
۱۸۷۷	۱
۱۸۷۸	۳
۱۸۷۹	۳
۱۸۸۰	۱
۱۸۸۱	۲
۱۸۸۲	۱
۱۸۸۳	۴
۱۸۸۴	۳
۱۸۸۵	۳
۱۸۸۶	۱
۱۸۸۷	۴
۱۸۸۸	۳
۱۸۸۹	۳
۱۸۹۰	۴
۱۸۹۱	۳
۱۸۹۲	۳
۱۸۹۳	۲
۱۸۹۴	۴
۱۸۹۵	۳
۱۸۹۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۸۹۷	۱
۱۸۹۸	۲
۱۸۹۹	۱
۱۹۰۰	۳
۱۹۰۱	۴
۱۹۰۲	۳
۱۹۰۳	۲
۱۹۰۴	۱
۱۹۰۵	۴
۱۹۰۶	۲
۱۹۰۷	۲
۱۹۰۸	۴
۱۹۰۹	۴
۱۹۱۰	۳
۱۹۱۱	۱
۱۹۱۲	۳
۱۹۱۳	۱
۱۹۱۴	۲
۱۹۱۵	۱
۱۹۱۶	۴
۱۹۱۷	۲
۱۹۱۸	۲
۱۹۱۹	۱
۱۹۲۰	۲
۱۹۲۱	۴
۱۹۲۲	۳
۱۹۲۳	۳
۱۹۲۴	۳
۱۹۲۵	۴
۱۹۲۶	۴
۱۹۲۷	۲
۱۹۲۸	۳
۱۹۲۹	۳
۱۹۳۰	۳
۱۹۳۱	۲
۱۹۳۲	۱
۱۹۳۳	۴
۱۹۳۴	۳
۱۹۳۵	۱
۱۹۳۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۹۳۷	۲
۱۹۳۸	۳
۱۹۳۹	۱
۱۹۴۰	۲
۱۹۴۱	۲
۱۹۴۲	۱
۱۹۴۳	۲
۱۹۴۴	۳
۱۹۴۵	۳
۱۹۴۶	۱
۱۹۴۷	۱
۱۹۴۸	۴
۱۹۴۹	۲
۱۹۵۰	۲
۱۹۵۱	۳
۱۹۵۲	۲
۱۹۵۳	۱
۱۹۵۴	۴
۱۹۵۵	۱
۱۹۵۶	۲
۱۹۵۷	۳
۱۹۵۸	۱
۱۹۵۹	۱
۱۹۶۰	۴
۱۹۶۱	۲
۱۹۶۲	۲
۱۹۶۳	۱
۱۹۶۴	۲
۱۹۶۵	۴
۱۹۶۶	۲
۱۹۶۷	۲
۱۹۶۸	۳
۱۹۶۹	۱
۱۹۷۰	۳
۱۹۷۱	۲
۱۹۷۲	۴
۱۹۷۳	۲
۱۹۷۴	۴
۱۹۷۵	۴
۱۹۷۶	۴

سؤال	پاسخ
۱۹۷۷	۳
۱۹۷۸	۲
۱۹۷۹	۳
۱۹۸۰	۱
۱۹۸۱	۳
۱۹۸۲	۴
۱۹۸۳	۱
۱۹۸۴	۴
۱۹۸۵	۱
۱۹۸۶	۱
۱۹۸۷	۴
۱۹۸۸	۳
۱۹۸۹	۲
۱۹۹۰	۲
۱۹۹۱	۱
۱۹۹۲	۳
۱۹۹۳	۲
۱۹۹۴	۳
۱۹۹۵	۳
۱۹۹۶	۱
۱۹۹۷	۱
۱۹۹۸	۳
۱۹۹۹	۴
۲۰۰۰	۱
۲۰۰۱	۱
۲۰۰۲	۴
۲۰۰۳	۴
۲۰۰۴	۱
۲۰۰۵	۲
۲۰۰۶	۲
۲۰۰۷	۱
۲۰۰۸	۲
۲۰۰۹	۳
۲۰۱۰	۳
۲۰۱۱	۳
۲۰۱۲	۴
۲۰۱۳	۳
۲۰۱۴	۱
۲۰۱۵	۱
۲۰۱۶	۳

سؤال	پاسخ
۲۰۱۷	۱
۲۰۱۸	۱
۲۰۱۹	۳
۲۰۲۰	۲
۲۰۲۱	۲
۲۰۲۲	۲
۲۰۲۳	۲
۲۰۲۴	۲
۲۰۲۵	۱
۲۰۲۶	۲
۲۰۲۷	۲
۲۰۲۸	۱
۲۰۲۹	۳
۲۰۳۰	۳
۲۰۳۱	۲
۲۰۳۲	۳
۲۰۳۳	۴
۲۰۳۴	۱
۲۰۳۵	۳
۲۰۳۶	۲
۲۰۳۷	۲
۲۰۳۸	۴
۲۰۳۹	۲
۲۰۴۰	۲
۲۰۴۱	۴
۲۰۴۲	۴
۲۰۴۳	۴
۲۰۴۴	۳
۲۰۴۵	۳
۲۰۴۶	۳
۲۰۴۷	۴
۲۰۴۸	۱
۲۰۴۹	۱
۲۰۵۰	۳
۲۰۵۱	۲
۲۰۵۲	۲
۲۰۵۳	۱
۲۰۵۴	۴
۲۰۵۵	۱
۲۰۵۶	۲

سؤال	پاسخ
۲۰۵۷	۳
۲۰۵۸	۳
۲۰۵۹	۲
۲۰۶۰	۲
۲۰۶۱	۳
۲۰۶۲	۴
۲۰۶۳	۴
۲۰۶۴	۲
۲۰۶۵	۳
۲۰۶۶	۱
۲۰۶۷	۳
۲۰۶۸	۳
۲۰۶۹	۲
۲۰۷۰	۱
۲۰۷۱	۱
۲۰۷۲	۲
۲۰۷۳	۳
۲۰۷۴	۳
۲۰۷۵	۲
۲۰۷۶	۲
۲۰۷۷	۴
۲۰۷۸	۱
۲۰۷۹	۲
۲۰۸۰	۱
۲۰۸۱	۴
۲۰۸۲	۱
۲۰۸۳	۳
۲۰۸۴	۴
۲۰۸۵	۲
۲۰۸۶	۲
۲۰۸۷	۴
۲۰۸۸	۲
۲۰۸۹	۱
۲۰۹۰	۱
۲۰۹۱	۱
۲۰۹۲	۱
۲۰۹۳	۱
۲۰۹۴	۱
۲۰۹۵	۴
۲۰۹۶	۳

سؤال	پاسخ
۲۰۹۷	۲
۲۰۹۸	۲
۲۰۹۹	۳
۲۱۰۰	۳
۲۱۰۱	۱
۲۱۰۲	۱
۲۱۰۳	۲
۲۱۰۴	۲
۲۱۰۵	۳
۲۱۰۶	۳
۲۱۰۷	۱
۲۱۰۸	۴
۲۱۰۹	۲
۲۱۱۰	۳
۲۱۱۱	۱
۲۱۱۲	۴
۲۱۱۳	۲
۲۱۱۴	۲
۲۱۱۵	۲
۲۱۱۶	۱
۲۱۱۷	۱
۲۱۱۸	۳
۲۱۱۹	۳
۲۱۲۰	۴
۲۱۲۱	۱
۲۱۲۲	۱
۲۱۲۳	۲
۲۱۲۴	۱
۲۱۲۵	۱
۲۱۲۶	۲
۲۱۲۷	۲
۲۱۲۸	۳
۲۱۲۹	۱
۲۱۳۰	۳
۲۱۳۱	۴
۲۱۳۲	۴
۲۱۳۳	۳
۲۱۳۴	۱
۲۱۳۵	۳
۲۱۳۶	۲

سؤال	پاسخ
۲۱۳۷	۱
۲۱۳۸	۱
۲۱۳۹	۱
۲۱۴۰	۲
۲۱۴۱	۳
۲۱۴۲	۴
۲۱۴۳	۲
۲۱۴۴	۱
۲۱۴۵	۴
۲۱۴۶	۳
۲۱۴۷	۳
۲۱۴۸	۳
۲۱۴۹	۴
۲۱۵۰	۳
۲۱۵۱	۳
۲۱۵۲	۳
۲۱۵۳	۲
۲۱۵۴	۲
۲۱۵۵	۱
۲۱۵۶	۲
۲۱۵۷	۲
۲۱۵۸	۱
۲۱۵۹	۲
۲۱۶۰	۴
۲۱۶۱	۲
۲۱۶۲	۲
۲۱۶۳	۴
۲۱۶۴	۳
۲۱۶۵	۴
۲۱۶۶	۳
۲۱۶۷	۱
۲۱۶۸	۳
۲۱۶۹	۲
۲۱۷۰	۴
۲۱۷۱	۲
۲۱۷۲	۳
۲۱۷۳	۳
۲۱۷۴	۲
۲۱۷۵	۳
۲۱۷۶	۲

سؤال	پاسخ
۲۱۷۷	۴
۲۱۷۸	۴
۲۱۷۹	۲
۲۱۸۰	۲
۲۱۸۱	۲
۲۱۸۲	۴
۲۱۸۳	۱
۲۱۸۴	۱
۲۱۸۵	۴
۲۱۸۶	۳
۲۱۸۷	۲
۲۱۸۸	۴
۲۱۸۹	۱
۲۱۹۰	۳
۲۱۹۱	۴
۲۱۹۲	۲
۲۱۹۳	۱
۲۱۹۴	۳
۲۱۹۵	۲
۲۱۹۶	۴
۲۱۹۷	۱
۲۱۹۸	۱
۲۱۹۹	۳
۲۲۰۰	۳
۲۲۰۱	۲
۲۲۰۲	۳
۲۲۰۳	۲
۲۲۰۴	۴
۲۲۰۵	۴
۲۲۰۶	۴
۲۲۰۷	۲
۲۲۰۸	۴
۲۲۰۹	۱
۲۲۱۰	۴
۲۲۱۱	۴
۲۲۱۲	۳
۲۲۱۳	۳
۲۲۱۴	۴
۲۲۱۵	۴
۲۲۱۶	۲

سؤال	پاسخ
۲۲۱۷	۱
۲۲۱۸	۲
۲۲۱۹	۲
۲۲۲۰	۲
۲۲۲۱	۴
۲۲۲۲	۳
۲۲۲۳	۳
۲۲۲۴	۲
۲۲۲۵	۳
۲۲۲۶	۱
۲۲۲۷	۲
۲۲۲۸	۲
۲۲۲۹	۳
۲۲۳۰	۳
۲۲۳۱	۱
۲۲۳۲	۱
۲۲۳۳	۲
۲۲۳۴	۲
۲۲۳۵	۳
۲۲۳۶	۴
۲۲۳۷	۲
۲۲۳۸	۲
۲۲۳۹	۲
۲۲۴۰	۴
۲۲۴۱	۱
۲۲۴۲	۲
۲۲۴۳	۱
۲۲۴۴	۱
۲۲۴۵	۱
۲۲۴۶	۲
۲۲۴۷	۲
۲۲۴۸	۲
۲۲۴۹	۱
۲۲۵۰	۳
۲۲۵۱	۱
۲۲۵۲	۳
۲۲۵۳	۴
۲۲۵۴	۲
۲۲۵۵	۱
۲۲۵۶	۴

سؤال	پاسخ
۲۲۵۷	۲
۲۲۵۸	۳
۲۲۵۹	۲
۲۲۶۰	۳
۲۲۶۱	۲
۲۲۶۲	۲
۲۲۶۳	۲
۲۲۶۴	۲
۲۲۶۵	۱
۲۲۶۶	۴
۲۲۶۷	۲
۲۲۶۸	۳
۲۲۶۹	۲
۲۲۷۰	۲
۲۲۷۱	۳
۲۲۷۲	۲
۲۲۷۳	۱
۲۲۷۴	۳
۲۲۷۵	۲
۲۲۷۶	۱
۲۲۷۷	۴
۲۲۷۸	۲
۲۲۷۹	۴
۲۲۸۰	۱
۲۲۸۱	۲
۲۲۸۲	۱
۲۲۸۳	۳
۲۲۸۴	۴
۲۲۸۵	۲
۲۲۸۶	۱
۲۲۸۷	۳
۲۲۸۸	۲
۲۲۸۹	۱
۲۲۹۰	۱
۲۲۹۱	۴
۲۲۹۲	۴
۲۲۹۳	۳
۲۲۹۴	۳
۲۲۹۵	۴
۲۲۹۶	۳

سؤال	پاسخ
۲۲۹۷	۲
۲۲۹۸	۳
۲۲۹۹	۱
۲۳۰۰	۱
۲۳۰۱	۳
۲۳۰۲	۱
۲۳۰۳	۲
۲۳۰۴	۴
۲۳۰۵	۱
۲۳۰۶	۳
۲۳۰۷	۲
۲۳۰۸	۲
۲۳۰۹	۴
۲۳۱۰	۲
۲۳۱۱	۳
۲۳۱۲	۲
۲۳۱۳	۴
۲۳۱۴	۴
۲۳۱۵	۱
۲۳۱۶	۴
۲۳۱۷	۲
۲۳۱۸	۳
۲۳۱۹	۴
۲۳۲۰	۱
۲۳۲۱	۱
۲۳۲۲	۲
۲۳۲۳	۳
۲۳۲۴	۲
۲۳۲۵	۱
۲۳۲۶	۲
۲۳۲۷	۲
۲۳۲۸	۴
۲۳۲۹	۳
۲۳۳۰	۱
۲۳۳۱	۱
۲۳۳۲	۲
۲۳۳۳	۳
۲۳۳۴	۲
۲۳۳۵	۱
۲۳۳۶	۲

سؤال	پاسخ
۲۳۳۷	۳
۲۳۳۸	۴
۲۳۳۹	۳
۲۳۴۰	۳
۲۳۴۱	۱
۲۳۴۲	۱
۲۳۴۳	۱
۲۳۴۴	۳
۲۳۴۵	۱
۲۳۴۶	۲
۲۳۴۷	۲
۲۳۴۸	۲
۲۳۴۹	۱
۲۳۵۰	۴
۲۳۵۱	۳
۲۳۵۲	۱
۲۳۵۳	۲
۲۳۵۴	۲
۲۳۵۵	۲
۲۳۵۶	۴
۲۳۵۷	۲
۲۳۵۸	۲
۲۳۵۹	۱
۲۳۶۰	۱
۲۳۶۱	۱
۲۳۶۲	۱
۲۳۶۳	۱
۲۳۶۴	۲
۲۳۶۵	۱
۲۳۶۶	۲
۲۳۶۷	۲
۲۳۶۸	۴
۲۳۶۹	۴
۲۳۷۰	۱
۲۳۷۱	۴
۲۳۷۲	۲
۲۳۷۳	۴
۲۳۷۴	۲
۲۳۷۵	۱
۲۳۷۶	۲

سؤال	پاسخ
۲۳۷۷	۲
۲۳۷۸	۳
۲۳۷۹	۳
۲۳۸۰	۳
۲۳۸۱	۴
۲۳۸۲	۲
۲۳۸۳	۴
۲۳۸۴	۲
۲۳۸۵	۳
۲۳۸۶	۱
۲۳۸۷	۱
۲۳۸۸	۳
۲۳۸۹	۴
۲۳۹۰	۲
۲۳۹۱	۳
۲۳۹۲	۱
۲۳۹۳	۱
۲۳۹۴	۴
۲۳۹۵	۱
۲۳۹۶	۱
۲۳۹۷	۳
۲۳۹۸	۲
۲۳۹۹	۴
۲۴۰۰	۲
۲۴۰۱	۱
۲۴۰۲	۱
۲۴۰۳	۳
۲۴۰۴	۲
۲۴۰۵	۲
۲۴۰۶	۲
۲۴۰۷	۱
۲۴۰۸	۲
۲۴۰۹	۴
۲۴۱۰	۲
۲۴۱۱	۴
۲۴۱۲	۱
۲۴۱۳	۱
۲۴۱۴	۲
۲۴۱۵	۲
۲۴۱۶	۲

سؤال	پاسخ
۲۴۱۷	۲
۲۴۱۸	۳
۲۴۱۹	۴
۲۴۲۰	۴
۲۴۲۱	۱
۲۴۲۲	۴
۲۴۲۳	۳
۲۴۲۴	۲
۲۴۲۵	۳
۲۴۲۶	۱
۲۴۲۷	۱
۲۴۲۸	۱
۲۴۲۹	۱
۲۴۳۰	۱
۲۴۳۱	۳
۲۴۳۲	۲
۲۴۳۳	۳
۲۴۳۴	۱
۲۴۳۵	۴
۲۴۳۶	۲
۲۴۳۷	۴
۲۴۳۸	۳
۲۴۳۹	۳
۲۴۴۰	۳
۲۴۴۱	۲
۲۴۴۲	۳
۲۴۴۳	۳
۲۴۴۴	۱
۲۴۴۵	۴
۲۴۴۶	۱
۲۴۴۷	۳
۲۴۴۸	۴
۲۴۴۹	۲
۲۴۵۰	۱
۲۴۵۱	۲
۲۴۵۲	۲
۲۴۵۳	۲
۲۴۵۴	۴
۲۴۵۵	۳
۲۴۵۶	۴

سؤال	پاسخ
۲۴۵۷	۲
۲۴۵۸	۴
۲۴۵۹	۲
۲۴۶۰	۳
۲۴۶۱	۱
۲۴۶۲	۱
۲۴۶۳	۴
۲۴۶۴	۱
۲۴۶۵	۳
۲۴۶۶	۲
۲۴۶۷	۱
۲۴۶۸	۳
۲۴۶۹	۴
۲۴۷۰	۱
۲۴۷۱	۴
۲۴۷۲	۱
۲۴۷۳	۳
۲۴۷۴	۲
۲۴۷۵	۱
۲۴۷۶	۲
۲۴۷۷	۳
۲۴۷۸	۲
۲۴۷۹	۲
۲۴۸۰	۴
۲۴۸۱	۲
۲۴۸۲	۴
۲۴۸۳	۲
۲۴۸۴	۱
۲۴۸۵	۱
۲۴۸۶	۳
۲۴۸۷	۱
۲۴۸۸	۱
۲۴۸۹	۴
۲۴۹۰	۲
۲۴۹۱	۳
۲۴۹۲	۲
۲۴۹۳	۳
۲۴۹۴	۲
۲۴۹۵	۱
۲۴۹۶	۱

سؤال	پاسخ
۲۴۹۷	۳
۲۴۹۸	۱
۲۴۹۹	۲
۲۵۰۰	۲
۲۵۰۱	۲
۲۵۰۲	۳
۲۵۰۳	۳
۲۵۰۴	۳
۲۵۰۵	۴
۲۵۰۶	۱
۲۵۰۷	۳
۲۵۰۸	۲
۲۵۰۹	۱
۲۵۱۰	۴
۲۵۱۱	۳
۲۵۱۲	۱
۲۵۱۳	۴
۲۵۱۴	۴
۲۵۱۵	۱
۲۵۱۶	۴
۲۵۱۷	۴
۲۵۱۸	۱
۲۵۱۹	۲
۲۵۲۰	۲
۲۵۲۱	۴
۲۵۲۲	۲
۲۵۲۳	۱
۲۵۲۴	۳
۲۵۲۵	۲
۲۵۲۶	۴
۲۵۲۷	۲
۲۵۲۸	۴
۲۵۲۹	۱
۲۵۳۰	۲
۲۵۳۱	۲
۲۵۳۲	۳
۲۵۳۳	۳
۲۵۳۴	۱
۲۵۳۵	۳
۲۵۳۶	۱

سؤال	پاسخ
۲۵۳۷	۲
۲۵۳۸	۳
۲۵۳۹	۴
۲۵۴۰	۴
۲۵۴۱	۲
۲۵۴۲	۳
۲۵۴۳	۳
۲۵۴۴	۳
۲۵۴۵	۲
۲۵۴۶	۲
۲۵۴۷	۳
۲۵۴۸	۴
۲۵۴۹	۴
۲۵۵۰	۱
۲۵۵۱	۱
۲۵۵۲	۳
۲۵۵۳	۲
۲۵۵۴	۳
۲۵۵۵	۴
۲۵۵۶	۱
۲۵۵۷	۱
۲۵۵۸	۴
۲۵۵۹	۴
۲۵۶۰	۱
۲۵۶۱	۳
۲۵۶۲	۱
۲۵۶۳	۲
۲۵۶۴	۳
۲۵۶۵	۴
۲۵۶۶	۲
۲۵۶۷	۲
۲۵۶۸	۱
۲۵۶۹	۴
۲۵۷۰	۳
۲۵۷۱	۴
۲۵۷۲	۳
۲۵۷۳	۴
۲۵۷۴	۲
۲۵۷۵	۴
۲۵۷۶	۴

سؤال	پاسخ
۲۵۷۷	۳
۲۵۷۸	۲
۲۵۷۹	۲
۲۵۸۰	۳
۲۵۸۱	۲
۲۵۸۲	۲
۲۵۸۳	۳
۲۵۸۴	۱
۲۵۸۵	۳
۲۵۸۶	۱
۲۵۸۷	۲
۲۵۸۸	۳
۲۵۸۹	۲
۲۵۹۰	۳
۲۵۹۱	۲
۲۵۹۲	۳
۲۵۹۳	۳
۲۵۹۴	۲
۲۵۹۵	۲
۲۵۹۶	۱
۲۵۹۷	۴
۲۵۹۸	۴
۲۵۹۹	۲
۲۶۰۰	۱
۲۶۰۱	۲
۲۶۰۲	۲
۲۶۰۳	۳
۲۶۰۴	۱
۲۶۰۵	۳
۲۶۰۶	۳
۲۶۰۷	۴
۲۶۰۸	۲
۲۶۰۹	۱
۲۶۱۰	۱
۲۶۱۱	۳
۲۶۱۲	۴
۲۶۱۳	۳
۲۶۱۴	۲
۲۶۱۵	۳
۲۶۱۶	۲

سؤال	پاسخ
۲۶۱۷	۴
۲۶۱۸	۴
۲۶۱۹	۴
۲۶۲۰	۴
۲۶۲۱	۲
۲۶۲۲	۳
۲۶۲۳	۴
۲۶۲۴	۲
۲۶۲۵	۲
۲۶۲۶	۴
۲۶۲۷	۳
۲۶۲۸	۲
۲۶۲۹	۲
۲۶۳۰	۲
۲۶۳۱	۳
۲۶۳۲	۱
۲۶۳۳	۳
۲۶۳۴	۲
۲۶۳۵	۳
۲۶۳۶	۴
۲۶۳۷	۲
۲۶۳۸	۳
۲۶۳۹	۲
۲۶۴۰	۳
۲۶۴۱	۱
۲۶۴۲	۱
۲۶۴۳	۳
۲۶۴۴	۴
۲۶۴۵	۲
۲۶۴۶	۲
۲۶۴۷	۲
۲۶۴۸	۳
۲۶۴۹	۲
۲۶۵۰	۳
۲۶۵۱	۳
۲۶۵۲	۲
۲۶۵۳	۱
۲۶۵۴	۴
۲۶۵۵	۴
۲۶۵۶	۳

سؤال	پاسخ
۲۶۵۷	۱
۲۶۵۸	۴
۲۶۵۹	۲
۲۶۶۰	۱
۲۶۶۱	۴
۲۶۶۲	۲
۲۶۶۳	؟
۲۶۶۴	۱
۲۶۶۵	۲
۲۶۶۶	۴
۲۶۶۷	۱
۲۶۶۸	۴
۲۶۶۹	۲
۲۶۷۰	۳
۲۶۷۱	۳
۲۶۷۲	۳
۲۶۷۳	۱
۲۶۷۴	۲
۲۶۷۵	۳
۲۶۷۶	۱
۲۶۷۷	۴
۲۶۷۸	۱
۲۶۷۹	۳
۲۶۸۰	۱
۲۶۸۱	۴
۲۶۸۲	۳
۲۶۸۳	۲
۲۶۸۴	۱
۲۶۸۵	۱
۲۶۸۶	۲
۲۶۸۷	۴
۲۶۸۸	۳
۲۶۸۹	۲
۲۶۹۰	۲
۲۶۹۱	۳
۲۶۹۲	۱
۲۶۹۳	۴
۲۶۹۴	!
۲۶۹۵	۴
۲۶۹۶	۳

سؤال	پاسخ
۲۶۹۷	۲
۲۶۹۸	۴
۲۶۹۹	۳
۲۷۰۰	۴
۲۷۰۱	۴
۲۷۰۲	۳
۲۷۰۳	۱
۲۷۰۴	۴
۲۷۰۵	۳
۲۷۰۶	۳
۲۷۰۷	۱
۲۷۰۸	۲
۲۷۰۹	۱
۲۷۱۰	۱
۲۷۱۱	۴
۲۷۱۲	۳
۲۷۱۳	۴
۲۷۱۴	۳
۲۷۱۵	۲
۲۷۱۶	۱
۲۷۱۷	۲
۲۷۱۸	۴
۲۷۱۹	۳
۲۷۲۰	۴
۲۷۲۱	۱
۲۷۲۲	۳
۲۷۲۳	۱
۲۷۲۴	۳
۲۷۲۵	۲
۲۷۲۶	۳
۲۷۲۷	۲
۲۷۲۸	۴
۲۷۲۹	۳
۲۷۳۰	۲
۲۷۳۱	۴
۲۷۳۲	۱
۲۷۳۳	۳
۲۷۳۴	۳
۲۷۳۵	۲
۲۷۳۶	۳

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۲۷۳۷	۱	۲۷۷۴	۲	۲۸۱۱	۱	۲۸۴۸	۳	۲۸۸۵	۴	۲۹۲۲	۴	۲۹۵۹	۴	۲۹۹۶	۲	۳۰۳۳	۲
۲۷۳۸	۴	۲۷۷۵	۳	۲۸۱۲	۳	۲۸۴۹	۳	۲۸۸۶	۳	۲۹۲۳	۳	۲۹۶۰	۲	۲۹۹۷	۴	۳۰۳۴	۴
۲۷۳۹	۳	۲۷۷۶	۲	۲۸۱۳	۴	۲۸۵۰	۲و۳	۲۸۸۷	۲	۲۹۲۴	۴	۲۹۶۱	۳	۲۹۹۸	۱	۳۰۳۵	۱
۲۷۴۰	۴	۲۷۷۷	۱	۲۸۱۴	۳	۲۸۵۱	۳	۲۸۸۸	۳	۲۹۲۵	۳	۲۹۶۲	۴	۲۹۹۹	۳	۳۰۳۶	۴
۲۷۴۱	۳	۲۷۷۸	۴	۲۸۱۵	۱	۲۸۵۲	۳	۲۸۸۹	۲	۲۹۲۶	۱	۲۹۶۳	۲	۳۰۰۰	۴	۳۰۳۷	۳
۲۷۴۲	۴	۲۷۷۹	۱	۲۸۱۶	۳	۲۸۵۳	۴	۲۸۹۰	۲	۲۹۲۷	۲	۲۹۶۴	۱	۳۰۰۱	۲	۳۰۳۸	۲
۲۷۴۳	۱	۲۷۸۰	۳	۲۸۱۷	۴	۲۸۵۴	۲	۲۸۹۱	۳	۲۹۲۸	۳	۲۹۶۵	۱	۳۰۰۲	۱	۳۰۳۹	۳
۲۷۴۴	۳	۲۷۸۱	۱	۲۸۱۸	۲	۲۸۵۵	۲	۲۸۹۲	۱	۲۹۲۹	۲	۲۹۶۶	۲	۳۰۰۳	۳	۳۰۴۰	۱
۲۷۴۵	۴	۲۷۸۲	۲	۲۸۱۹	۴	۲۸۵۶	۴	۲۸۹۳	۱	۲۹۳۰	۱	۲۹۶۷	۳	۳۰۰۴	۴	۳۰۴۱	۲
۲۷۴۶	۳	۲۷۸۳	۳	۲۸۲۰	۴	۲۸۵۷	۲	۲۸۹۴	۳	۲۹۳۱	۴	۲۹۶۸	۱	۳۰۰۵	۴	۳۰۴۲	۴
۲۷۴۷	۲	۲۷۸۴	۲	۲۸۲۱	۱	۲۸۵۸	۳	۲۸۹۵	۲	۲۹۳۲	۱	۲۹۶۹	۲	۳۰۰۶	۱	۳۰۴۳	۲
۲۷۴۸	۳	۲۷۸۵	۱	۲۸۲۲	۱	۲۸۵۹	۴	۲۸۹۶	۴	۲۹۳۳	۳	۲۹۷۰	۳	۳۰۰۷	۴	۳۰۴۴	۱
۲۷۴۹	۱	۲۷۸۶	۲	۲۸۲۳	۲	۲۸۶۰	۱	۲۸۹۷	۲	۲۹۳۴	۴	۲۹۷۱	۴	۳۰۰۸	۱	۳۰۴۵	۱
۲۷۵۰	۱	۲۷۸۷	۴	۲۸۲۴	۴	۲۸۶۱	۲	۲۸۹۸	۱	۲۹۳۵	۳	۲۹۷۲	۳	۳۰۰۹	۲	۳۰۴۶	۲
۲۷۵۱	۲	۲۷۸۸	۲	۲۸۲۵	۳	۲۸۶۲	۱	۲۸۹۹	۱	۲۹۳۶	۲	۲۹۷۳	۱	۳۰۱۰	۳	۳۰۴۷	۳
۲۷۵۲	۱	۲۷۸۹	۴	۲۸۲۶	۴	۲۸۶۳	۳	۲۹۰۰	۳	۲۹۳۷	۱	۲۹۷۴	۴	۳۰۱۱	۲	۳۰۴۸	۲
۲۷۵۳	۱	۲۷۹۰	۴	۲۸۲۷	۲	۲۸۶۴	۴	۲۹۰۱	۳	۲۹۳۸	۳	۲۹۷۵	۱	۳۰۱۲	۴	۳۰۴۹	۳
۲۷۵۴	۲	۲۷۹۱	۴	۲۸۲۸	۲	۲۸۶۵	۱	۲۹۰۲	۱	۲۹۳۹	۲	۲۹۷۶	۲	۳۰۱۳	۱	۳۰۵۰	۲
۲۷۵۵	۴	۲۷۹۲	۳	۲۸۲۹	۱	۲۸۶۶	۴	۲۹۰۳	۱	۲۹۴۰	۴	۲۹۷۷	۱	۳۰۱۴	۳	۳۰۵۱	۴
۲۷۵۶	۳	۲۷۹۳	۱	۲۸۳۰	۴	۲۸۶۷	۱	۲۹۰۴	۲	۲۹۴۱	۱	۲۹۷۸	۴	۳۰۱۵	۲	۳۰۵۲	۱
۲۷۵۷	۴	۲۷۹۴	۳	۲۸۳۱	۳	۲۸۶۸	۴	۲۹۰۵	۲	۲۹۴۲	۲	۲۹۷۹	۳	۳۰۱۶	۳	۳۰۵۳	۲
۲۷۵۸	۱	۲۷۹۵	۴	۲۸۳۲	۱	۲۸۶۹	۴	۲۹۰۶	۴	۲۹۴۳	۳	۲۹۸۰	۱	۳۰۱۷	۴	۳۰۵۴	۴
۲۷۵۹	۴	۲۷۹۶	۱	۲۸۳۳	۱	۲۸۷۰	۱	۲۹۰۷	۱	۲۹۴۴	۳	۲۹۸۱	۳	۳۰۱۸	۱	۳۰۵۵	۳
۲۷۶۰	۴	۲۷۹۷	۴	۲۸۳۴	۴	۲۸۷۱	۴	۲۹۰۸	۳	۲۹۴۵	۴	۲۹۸۲	۲	۳۰۱۹	۲	۳۰۵۶	۲
۲۷۶۱	۲	۲۷۹۸	۴	۲۸۳۵	۱	۲۸۷۲	۲	۲۹۰۹	۴	۲۹۴۶	۱	۲۹۸۳	۳	۳۰۲۰	۳	۳۰۵۷	۴
۲۷۶۲	۳	۲۷۹۹	۱	۲۸۳۶	۳	۲۸۷۳	۳	۲۹۱۰	۲	۲۹۴۷	۱	۲۹۸۴	۱	۳۰۲۱	۱	۳۰۵۸	۱
۲۷۶۳	۱	۲۸۰۰	۴	۲۸۳۷	۳	۲۸۷۴	۱	۲۹۱۱	۴	۲۹۴۸	۳	۲۹۸۵	۴	۳۰۲۲	۲	۳۰۵۹	۲
۲۷۶۴	۱	۲۸۰۱	۱	۲۸۳۸	۲	۲۸۷۵	۲	۲۹۱۲	۱	۲۹۴۹	۴	۲۹۸۶	۲	۳۰۲۳	۴	۳۰۶۰	۳
۲۷۶۵	۳	۲۸۰۲	۴	۲۸۳۹	؟	۲۸۷۶	۴	۲۹۱۳	۱	۲۹۵۰	۱	۲۹۸۷	۳	۳۰۲۴	۳	۳۰۶۱	۱
۲۷۶۶	۲	۲۸۰۳	۳	۲۸۴۰	۱	۲۸۷۷	۲	۲۹۱۴	۳	۲۹۵۱	۲	۲۹۸۸	۱	۳۰۲۵	۲	۳۰۶۲	۴
۲۷۶۷	۱	۲۸۰۴	۲	۲۸۴۱	۴	۲۸۷۸	۳	۲۹۱۵	۴	۲۹۵۲	۲	۲۹۸۹	۲	۳۰۲۶	۳		
۲۷۶۸	۲	۲۸۰۵	۱	۲۸۴۲	۲	۲۸۷۹	۱	۲۹۱۶	۱	۲۹۵۳	۴	۲۹۹۰	۱	۳۰۲۷	۴		
۲۷۶۹	۲	۲۸۰۶	۲	۲۸۴۳	۳	۲۸۸۰	۱	۲۹۱۷	۱	۲۹۵۴	۳	۲۹۹۱	۱	۳۰۲۸	۲		
۲۷۷۰	۲	۲۸۰۷	۳	۲۸۴۴	۲	۲۸۸۱	۳	۲۹۱۸	۳	۲۹۵۵	۴	۲۹۹۲	۲	۳۰۲۹	۳		
۲۷۷۱	۴	۲۸۰۸	۳	۲۸۴۵	۱	۲۸۸۲	۳	۲۹۱۹	۲	۲۹۵۶	۳	۲۹۹۳	۳	۳۰۳۰	۱		
۲۷۷۲	۱	۲۸۰۹	۴	۲۸۴۶	۳	۲۸۸۳	۲	۲۹۲۰	۱	۲۹۵۷	۲	۲۹۹۴	۴	۳۰۳۱	۳		
۲۷۷۳	۳	۲۸۱۰	۲	۲۸۴۷	۱	۲۸۸۴	۳	۲۹۲۱	۳	۲۹۵۸	۱	۲۹۹۵	۱	۳۰۳۲	۴		

۳۰۶۳- اگر مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت صحیح، ۷۳ برابر مجموع ۳ جملهٔ اول آن باشد، جملهٔ سوم این دنباله چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۰۶۴- اگر $x^۲+\frac{۱۰}{x^۲+۱}=۹$ باشد، مقدار $(x^۲+۱)^۲+\frac{۱۰۰}{(x^۲+۱)^۲}$ کدام است؟

۱) ۹۸ ۲) ۹۰ ۳) ۸۸ ۴) ۸۰

۳۰۶۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x+۲=۰$ باشند، مقدار $\frac{۴\alpha+\beta^۵}{۵\beta^۲}$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸

۳۰۶۶- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۵}{\sqrt{mx^۲-۸x+۳۹}}$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اگر برای یک مقدار m، بیشترین مقدار تابع f برابر ۱ باشد، مقدار $[m]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۳۰۶۷- اگر بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای $p(x)=x^۵+ax^۳$ و $q(x)=x^۴+۳x^۳+۲x^۲$، دوجمله‌ای $x^n+x^۳$ باشد، مقدار na کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۱

۳۰۶۸- اگر $f(x)=\begin{cases} x-۱ & ۰\le x\le ۲ \\ x+۱ & -۲\le x<۰ \end{cases}$ باشد، معادلهٔ $fof(x)=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰۶۹- تابع پیوستهٔ f یک‌به‌یک بوده و وارون خود را در نقطهٔ $A(a,f(a))$ قطع می‌کند. اگر $f(۰)=۲$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) a ۴) $f'(a)$

۳۰۷۰- اگر $\log(۳x+۱)=\begin{vmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{vmatrix}$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{۲}} x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

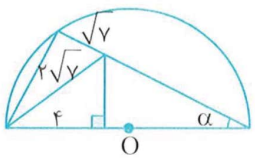
۳۰۷۱- اگر $۲\sin\alpha<\sin ۲\alpha$ و $\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}>۰$ باشد، انتهای کمان α در کدام ربع قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۳۰۷۲- حاصل عبارت $\frac{\sin(-۲۸۵^\circ)+۲\cos(-۱۰۵^\circ)}{۲\sin(۱۶۵^\circ)+۳\sin(۳۷۵^\circ)}$ کدام است؟

۱) ۰/۲$\sqrt{۶}$ ۲) ۰/۴$\sqrt{۶}$ ۳) ۰/۲$\sqrt{۳}$ ۴) ۰/۴$\sqrt{۳}$

۳۰۷۳- در نیم‌دایرهٔ شکل زیر، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) ۰/۲$\sqrt{۳}$

۲) ۰/۳$\sqrt{۳}$

۳) ۰/۴$\sqrt{۳}$

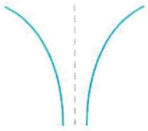
۴) ۰/۵$\sqrt{۳}$

محل انجام محاسبات

۳۰۷۴- اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{k+\cos(\sqrt{a}x)}{kx^{۲}}$ باشد، مقدار $\frac{a}{k}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۶

۳۰۷۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{a^{۲}x^{۲}-۲x+۱}{(x+a)(mx-۲)}$ در همسایگی $x=-a$ به صورت شکل زیر است. اگر $y=-۴$ مجانب افقی تابع f باشد، مقدار a کدام است؟



۱) -۲ ۲) -۴
۳) ۲ ۴) ۴

۳۰۷۶- حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^{-}}\frac{\cot x}{[x-\pi]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

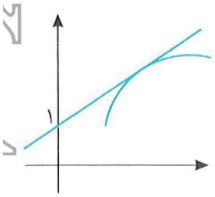
۳۰۷۷- تابع ناصفر f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{۳}|ax+a|}{|x^{۳}+(m-۲)x+a^{۲}|}$ روی $\mathbb{R}-\{a\}$ تعریف شده و برای هر $x\neq a$ پیوسته است. اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ موجود باشد، مقدار آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۰۷۸- اگر $f(x)=\frac{|۲x-۴|}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}+\sqrt{۳x}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}$ باشد، مقدار $f'(۱)-۲g'(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۶}$

۳۰۷۹- نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطهٔ $(۳,۵)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(۳)$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۳۰۸۰- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۲bx+c & x>a\\ ۳x^{۲} & x\leq a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a^{۳}+b-c$ کدام است؟

۱) $(a+۱)^{۳}-۱$ ۲) $(a+۱)^{۳}+۱$
۳) $(a-۱)^{۳}-۱$ ۴) $(a-۱)^{۳}+۱$

۳۰۸۱- ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}}|x-a|$ روی بازهٔ $[۰,a]$ برابر ۱/۵ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۱

آزمون ۲۷۹ آزمون جامع (۳۱) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۴ - نوبت دوم - داخل کشور)

محل انجام م

۳۰۸۲- کدام‌یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهد؟

۱) $a, a^۲, a^۳, \ldots$ ۲) $a, ۱, \frac{۱}{a}, \ldots$ ۳) $a^۲, a, ۱, \ldots$ ۴) $۱, a, a^۲, \ldots$

۳۰۸۳- مقدار عبارت $\frac{۲۴x^۳+۳۶x^۲+۱۸x+۳}{(۴x^۲+۴x+۱)^۲}$ به‌ازای ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲+x=۱$ کدام است؟

۱) $۰/۱\sqrt{۵}$ ۲) $۰/۲\sqrt{۵}$ ۳) $۰/۳\sqrt{۵}$ ۴) $۰/۶\sqrt{۵}$

۳۰۸۴- نقاط $A(۲a+۳, a-۲)$ و $B(۷-۲a, a-۲)$ دو نقطهٔ متمایز با مؤلفه‌های طبیعی از یک سهمی هستند. اگر نقطهٔ $S(b, b-۲)$ رأس این سهمی باشد، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد سهمی با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۸}$

۳۰۸۵- اگر عکس مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $-۴ax^۲+bx+\frac{۱}{۲}c=۰$ برابر $\log ۴$ و واسطهٔ حسابی b و c باشد، مقدار $(\frac{۱}{\sqrt[۸]{۲}})^{\frac{c}{a}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۴]{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt[۴]{۱۰}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۳۰۸۶- اگر معادلهٔ $|۴x-۲|=x^۲-x+a$ دارای سه ریشهٔ حقیقی باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر معادله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

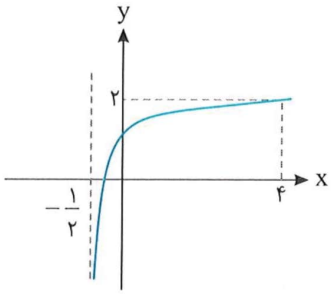
۳۰۸۷- اگر $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x>۲ \\ -۳x+۷ & x\le ۲ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} -x+۴ & f(x)\ge ۰ \\ x-۴ & f(x)<۰ \end{cases}$ باشد، مقدار $fog(-۴)$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۹ ۳) -۱۵ ۴) -۵

۳۰۸۸- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۶x-x\sqrt{x}-۲\sqrt{x}+۱۰$ در یک همسایگی از a، وارون‌پذیر است. اگر $fof(a)=a$ باشد، مقدار $f(a-۹)$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۷ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

۳۰۸۹- شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\log_۳(ax+b)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f^{-۱}(-۲)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۴}{۹}$
۲) $-\frac{۲}{۹}$
۳) $-\frac{۵}{۱۸}$
۴) $-\frac{۷}{۱۸}$

۳۰۹۰- اگر انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $(۱+\cos\alpha)(\sqrt{۱+\cot^۲\alpha}+\frac{۱}{\tan\alpha})$ کدام است؟

۱) $\cos\alpha$ ۲) $\sin\alpha$ ۳) $-\cos\alpha$ ۴) $-\sin\alpha$

۳۰۹۱- اگر $\tan(\alpha+۱۲^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ باشد، مقدار $\cot(۱۸^\circ-\alpha)$ کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۵}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$

محل انجام محاسبات

۳۰۹۲- حاصل عبارت $A=\sqrt{۳}\cos(۲۱۰^\circ)\sin(۲۴۳^\circ)-\sqrt{۲}\sin(۱۳۵^\circ)\cos(۱۵۳^\circ)$ چند برابر $\cos(۲۷^\circ)$ است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۰/۵

۳۰۹۳- معادلهٔ مثلثاتی $\tan ۲x+\tan ۳x=\tan ۵\pi$ چند جواب در بازهٔ $(۰,\pi)$ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

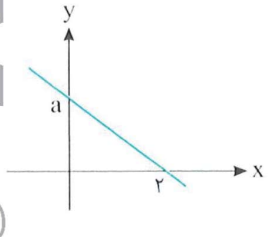
۳۰۹۴- حاصل $\lim\limits_{x\to ۳a^+}\frac{۲\sqrt{x-۳a}+۳\sqrt{x}-\sqrt{۲۷a}}{\sqrt{x^۲-۹a^۲}}$ کدام است؟ $(a>۰)$

۱) ۸ ۲) $\sqrt{\frac{۲}{a}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۲}{۳a}}$ ۴) $+\infty$

۳۰۹۵- اگر $\lim\limits_{x\to\sqrt[۳]{۴}}\frac{x}{x^۲+ax+b}=+\infty$ باشد، مقدار $[\frac{b}{a}]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۰۹۶- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر داده شده است. اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{|۲f(x)-af^{-۱}(x)|}$ باشد، مقدار غیرصحیح a کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۱+\sqrt{۲}$
۳) $-۱+\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

۳۰۹۷- اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲+|x|}{x^۲+a|x|} & x\neq ۰\\ \frac{۲a-۱}{۲a+۲} & x=۰\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{a}}f(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳۰۹۸- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin ۲x\cot(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲})}{x-\frac{\pi}{۲}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۳

۳۰۹۹- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}a+\sqrt{x^۲} & x<۱\\ b\sqrt[۳]{x^۲} & x\geq ۱\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر نباشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۱۰۰- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۵|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به‌ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y=|f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

آزمون ۲۸۰ آزمون جامع (۳۲) (کنکور رشتهٔ ریاضی سال ۱۴۰۴ - نوبت دوم - خارج کشور)

محل انجام م

۳۱۰۱- کدام‌یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهد؟

۱) $۰, a, a^۲, \ldots$ ۲) $a, \frac{a}{۲}, \frac{a}{۴}, \ldots$ ۳) $a, a, a, \ldots$ ۴) $\frac{۱}{a}, \frac{۱}{a}, \frac{۱}{a}, \ldots$

۳۱۰۲- مقدار عبارت $\frac{۸x^۳-۳۶x^۲+۵۴x-۲۷}{۸x^۲-۲۴x+۱۸}$ به‌ازای ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۰/۵\sqrt{۵}$ ۳) $۰/۱\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۵}$

۳۱۰۳- اگر $A(۲b+۱, ۲b-b^۲)$ و $B(۲b-۱, ۲b-b^۲)$ دو نقطهٔ متمایز با مؤلفه‌های صحیح مثبت از سهمی $y=m(x-\alpha+۱)^۲+\alpha+۱$ باشند، مقدار m کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۳۱۰۴- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $(a\log ۲)x^۲+ax+b\log ۲=۰$، برابر -۱ باشد، مقدار $(\sqrt{۲})^{\frac{b}{a}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۳۱۰۵- به‌ازای چند مقدار صحیح از a، معادلهٔ $|۴x-۲|=x^۲-x+a$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

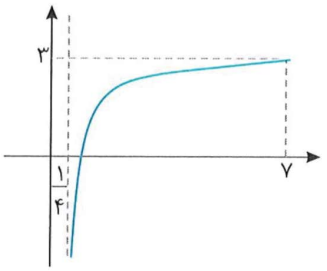
۳۱۰۶- اگر $f(x)=\begin{cases} x+۲ & x>۳ \\ -۲x+۱ & x\le ۳ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x+۳ & f(-x)>۰ \\ x-۳ & f(-x)\le ۰ \end{cases}$ باشد، مقدار $fog(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{۱۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۷}{۲}$ ۴) -۴

۳۱۰۷- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۴x-x\sqrt{x}-۳\sqrt{x}+۹$ در یک همسایگی از a، وارون‌پذیر است. اگر $fof(a)=a$ باشد، مقدار $f(a-۵)$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۷

۳۱۰۸- شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\log_۳(ax+b)$ را نشان می‌دهد. مقدار $f^{-۱}(-۱)$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۱۰۹- اگر انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}}=\sqrt{۱+\tan^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) $-\cot\alpha$ ۲) $-\tan\alpha$ ۳) $\cot\alpha$ ۴) $\tan\alpha$

۳۱۱۰- اگر $\tan(\alpha+۲۵^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، مقدار $\cot(۳۵^\circ-\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۱۵}$ ۳) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$

۳۱۱۱- اگر $A=\sqrt{۲}\cos(۱۳۵^\circ)\cos(۲۹۷^\circ)+\sqrt{۳}\cos(۶۳^\circ)\sin(۱۲۰^\circ)$ باشد، حاصل ۲A کدام است؟

۱) $\cos(۲۷^\circ)$ ۲) $\sin(۲۷^\circ)$ ۳) $۵\sin(۲۷^\circ)$ ۴) $۵\cos(۲۷^\circ)$

۳۱۱۲- معادلهٔ مثلثاتی $\tan(۳x-\frac{\pi}{۳})+\tan ۲(x-\frac{\pi}{۲})=\cot(\frac{۳\pi}{۲})$ چند جواب در بازهٔ $[۰,\pi]$ دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

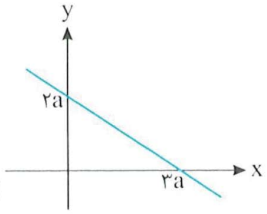
۳۱۱۳- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{۳}{a})^+}\frac{۲\sqrt{x-\frac{۳}{a}}+۳\sqrt{x}-\sqrt{\frac{۲۷}{a}}}{\sqrt{x^۲-\frac{۹}{a^۲}}}$ کدام است؟ $(a>۰)$

۱) $\sqrt{\frac{۳a}{۲}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۳}{۲a}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۲}{۳a}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۲a}{۳}}$

۳۱۱۴- اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^+}\frac{[-x]+a}{|\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+a|+a}=-\infty$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۳۱۱۵- اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^۲(x)}{x|f^{-۱}(x)|}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۴}{۹}$
۲) $-\frac{۸}{۲۷}$
۳) $-\frac{۸}{۹}$
۴) $-\frac{۴}{۲۷}$

۳۱۱۶- اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^۲+mx-m-۱|}{m|x^۲-۱|+|x-۱|} & x\neq۱\\ \frac{m}{m+۲} & x=۱\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{m}}f(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

۳۱۱۷- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin x\tan(\frac{\pi}{۲}-x)}{۲x-\pi}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۳۱۱۸- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}a\sqrt[۳]{x^۲} & x\geq۱\\ b+c\sqrt{x^۲} & x<۱\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر نباشد، مقدار $\frac{ab}{c^۲}$ کدام است؟ $(c\neq۰)$

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۱۱۹- تابع $y=|f(x)|$ که در آن $f(x)=x(|x|+۳)$ است، چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخنامهٔ کلیدی (سازمان سنجش)

سؤال	پاسخ
۳۰۶۳	۲
۳۰۶۴	۴
۳۰۶۵	۳
۳۰۶۶	۳
۳۰۶۷	۱
۳۰۶۸	۳
۳۰۶۹	۱
۳۰۷۰	۲
۳۰۷۱	۴

سؤال	پاسخ
۳۰۷۲	۳
۳۰۷۳	۱
۳۰۷۴	۴
۳۰۷۵	۳
۳۰۷۶	۳
۳۰۷۷	۲
۳۰۷۸	۲
۳۰۷۹	۴
۳۰۸۰	۱

سؤال	پاسخ
۳۰۸۱	۱
۳۰۸۲	۲
۳۰۸۳	۴
۳۰۸۴	۳
۳۰۸۵	۱
۳۰۸۶	۲
۳۰۸۷	۲
۳۰۸۸	۴
۳۰۸۹	۱

سؤال	پاسخ
۳۰۹۰	۴
۳۰۹۱	۱
۳۰۹۲	۲
۳۰۹۳	۳
۳۰۹۴	۳
۳۰۹۵	۱
۳۰۹۶	۲
۳۰۹۷	۴
۳۰۹۸	۳

سؤال	پاسخ
۳۰۹۹	۴
۳۱۰۰	۱
۳۱۰۱	۴
۳۱۰۲	۲
۳۱۰۳	۳
۳۱۰۴	۲
۳۱۰۵	۴
۳۱۰۶	۱
۳۱۰۷	۱

سؤال	پاسخ
۳۱۰۸	۴
۳۱۰۹	۲
۳۱۱۰	۳
۳۱۱۱	۲
۳۱۱۲	۳
۳۱۱۳	۴
۳۱۱۴	۱
۳۱۱۵	۲
۳۱۱۶	۴

سؤال	پاسخ
۳۱۱۷	۲
۳۱۱۸	۱
۳۱۱۹	۳

موج آزمون ریاضی

رشته ریاضی (ویراست چهارم)



مؤلفان:

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

- ۲۵۴ آزمون موضوعی و جامع از ریاضی ۱، حسابان ۱ و ۲
- آزمون‌های جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری
- پاسخ‌های کاملاً تشریحی برای همهٔ آزمون‌ها
- کتابی کامل و جامع برای مرور مطالب ریاضی
- در کل شامل ۲۷۸۰ تست با پاسخ تشریحی

